Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 4 — Problemas de valores de contorno

Problema de Sturm-Liouville

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Condiciones de contorno.** Condiciones locales (Dirichlet, Neumann, Cauchy, mixtas) y no locales (periódicas, antiperiódicas). Problema de segundo orden homogéneo: carácter aislado de las raíces y teorema de separación de Sturm. Operador de Sturm-Liouville: carácter autoadjunto. Reducción de EDOs de segundo orden a la forma de Sturm-Liouville.

b) **Problema de Sturm-Liouville inhomogéneo.** Existencia del operador inverso y construcción de la función de Green. Propiedades de la función de Green: carácter autoadjunto y principio de reciprocidad.

c) **Problema de autovalores de Sturm-Liouville.** Propiedades de autovalores y autovectores. Problema en 3 dimensiones y problema variacional asociado: funcional "energía" y cociente de Rayleigh. Casos de las distintas condiciones de contorno. Aproximación de Rayleigh-Ritz.

Bibliografía: Naón et al. (2012, cap. II), Al-Gwaiz (2008, cap. 2), Duff y Naylor (1966, cap. 6).

Problema 1. La catenaria. Considere el problema de establecer la tensión horizontal necesaria para colgar una cuerda entre dos puntos. Para esto llamemos L a la longitud de la cuerda y ω al peso por unidad de longitud y supongamos que se desea suspender a la misma entre dos puntos a alturas h_1 y h_2, separados por una distancia horizontal b.

a) Obtenga primero la ecuación diferencial de la catenaria,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{T_H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \tag{4.1}$$

donde $y(x)$ es la curva que describe a la catenaria y T_H la componente horizontal de la tensión aplicada en los extremos. **Ayuda:** note que la tensión *no es constante* a lo largo de la cuerda, y recuerde que la longitud de una curva está dada por $S(a,b) = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$.

b) Obtenga la solución general de la ecuación anterior:

$$y(x) = \frac{T_H}{\omega}\cosh\left[\frac{\omega}{T_H} + A\right] + B. \tag{4.2}$$

c) Imponga las condiciones de contorno apropiadas. Poniendo el extremo de altura h_1 en $x=0$ y el otro en $x=b$ debe obtener

$$A = \operatorname{arcsenh}\frac{\omega(h_2-h_1)}{2T_H\operatorname{senh}(\omega b/2T_H)} - \frac{\omega b}{2T_H}, \tag{4.3}$$

$$B = h_2 - \frac{T_H}{\omega}\cosh\left(\frac{\omega b}{2T_H}\right)\sqrt{1+\frac{\omega^2(h_2-h_1)^2}{4T_H^2\operatorname{senh}(\omega b/2T_H)}}. \tag{4.4}$$

Ayuda: Recuerde que $\cosh(\operatorname{arcsenh} x) = \sqrt{1+x^2}$.

d) Finalmente calcule la longitud de la catenaria para relacionar T_H con L:

$$\frac{4T_H^2}{\omega^2}\operatorname{senh}^2\frac{\omega b}{2T_H} = L^2 - (h_2-h_1)^2. \tag{4.5}$$

¿Qué sucede si se desea estirar completamente la cuerda?

***Problema 2. Operador de Sturm-Liouville.**

a) Muestre que cualquier ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden $y'' + a(x)y' + b(x)y = F(x)$ puede escribirse en la *forma de Sturm-Liouville,*

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = f(x), \tag{4.6}$$

eligiendo $p(x) = -\exp[\int A(x)\,dx]$, $q(x) = -p(x)b(x)$ y $f(x) = -p(x)F(x)$.

b) Muestre que, en el espacio de las funciones con derivada segunda continua y cuadrado integrable en $[a, b]$ que cumplen las condiciones de contorno *locales homogéneas*

$$Ay(a) + Cy'(a) = 0, \qquad By(b) + Dy'y(b) = 0, \tag{4.7}$$

o bien las condiciones *(anti)periódicas*

$$y(a) = \pm y(b), \qquad p(a)y'(a) = \pm p(b)y'(b), \tag{4.8}$$

el *operador de Sturm-Liouville*

$$L = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x), \tag{4.9}$$

es autoadjunto, es decir que $(Lf, g) = (f, Lg)$, con el producto interno dado por $(f, g) = \int_a^b f^*(x)g(x)$. **Sugerencia:** Pruebe primero la *identidad de Lagrange,* $(Lf)^*g - f^*(Lg) = \frac{d}{dx}[p(x)(f^*g' - gf^{*\prime})]$.

Problema 3. Demuestre que no puede haber dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo de Sturm-Liouville con condiciones de contorno homogéneas de Dirichlet, Neumann o Cauchy.

***Problema 4.** Demuestre que la función de Green del problema de Sturm-Liouville

$$L_x G(x, x') = \delta(x - x'), \tag{4.10}$$

con condiciones de contorno de Cauchy homogéneas sólo existe si la única solución del problema homogéno es la solución trivial.

Problema 5. Demuestre que el resultado del problema anterior se aplica también al caso de condiciones de contorno (anti)periódicas.

Problema 6. Dado el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$L(u) = -\frac{d^2u}{dx^2} - ku = f(x) \tag{4.11}$$

con $k > 0, u(0) = u(l) = 0$,

a) Analice para qué valores de l el problema es no singular

b) Obtenga la función de Green en esos casos y dé una expresión para la solución

c) Halle la solución para el caso particular $k = 1$ y $f(x) = x$.

Problema 7. Calcule la función de Green del problema

$$L(y) = -x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0\,, \tag{4.12}$$

con las condiciones $y(x \to 0)$ acotada e $y(1) = 0$.

Problema 8. Dado el operador de Sturm-Liouville

$$L(u) = -\frac{d^2u}{dt^2}, \qquad u(0) = u'(1) = 0, \tag{4.13}$$

a) demuestre que los autovalores (λ) son reales y positivos, y forman una sucesión monótonamente creciente, y

b) encuentre las autofunciones.

Problema 9. Encuentre los autovalores y autofunciones del operador

$$L(u) = -\frac{d^2u}{dx^2} \tag{4.14}$$

a) con las condiciones de contorno de Neumann $u'(0) = u'(l) = 0$,

b) con condiciones de contorno periódicas.

¿Cuál es la dimensión de los espacios propios en cada caso?