Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 3 — Problemas de valores iniciales

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **PVI para una ecuación de primer orden.** Existencia y unicidad de la solución de solución del PVI de una ecuación de primer orden: teorema de Picard.

b) **PVI para un sistema de ecuaciones de primer orden.** Existencia y unicidad de la solución: generalización del teorema de Picard. Sistemas lineales de primer orden homogéneos: matriz fundamental y principio de superposición (espacio vectorial de soluciones). Sistemas inhomogéneos: matriz de Green. Caso de coeficientes constantes: evaluación de la exponencial de una matriz.

c) **Sistemas de orden n.** Reducción de ecuaciones y sistemas de orden n a sistemas de primer orden. Ecuación lineal de orden n. Ecuación lineal de coeficientes constantes de orden n: forma de la solución general, matriz de Green.

Bibliografía: Naón et al. (2009, cap. 1), Coddington (1961, cap. 5).

Problema 1. La condición de Lipschitz.

a) Muestre que $f(x,y) = 4x^2+y^2$ cumple la condición de Lipschitz en el rectángulo $R = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

b) Muestre que $f(x,y,) = x^2 \cos^2 y + y \operatorname{sen}^2 x$ cumple la condición de Lipschitz la franja $S = \{(x,y) : |x| \leq 1\}$.

c) Muestre que $f(x,y) = \sqrt{y}$ *no* cumple la condición de Lipschitz en el rectángulo $R = \{(x,y) : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, mientras que sí la cumple en $R' = \{(x,y) : |x| \leq a, b \leq y \leq c, \text{con } a,b,c > 0\}$.

d) Muestre que una condición suficiente para garantizar que $f(x,y)$ cumple la condición de Lipschitz en R es que $\partial f/\partial y$ exista y sea acotada en R.

***Problema 2. Aproximaciones sucesivas y teorema de Picard.** Demuestre que si $f(t,u)$ es continua y cumple la condición de Lipschitz en el rectángulo $R = \{(t,u) : |t-t_0| \leq a,\ |u-u_0| \leq b\}$, entonces el problema de valores iniciales

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \qquad u(t_0) = u_0, \tag{3.1}$$

tiene solución única en el intervalo

$$|t-t_0| \leq r, \qquad r = \min(a, b/M), \qquad M = \max_{(t,u)\in R} |f(t,u)|. \tag{3.2}$$

Para ello trabaje con la ecuación integral equivalente

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))\, dt' \tag{3.3}$$

y considere las *aproximaciones sucesivas*

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u_{n-1}(t'))\, dt'. \tag{3.4}$$

a) Muestre primero que todas las aproximaciones permanecen dentro del rectángulo, es decir que

$$|u_n(t) - u_0| \leq b, \qquad \text{si } |t-t_0| \leq r. \tag{3.5}$$

b) Escribiendo $u(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(t) - u_{n-1}(t)]$, utilice el criterio de Weierstrass para mostrar que la sucesión $u_n(t)$ converge uniformemente a una $u(t)$, acotando (por inducción completa) cada término con $MN^{n-1}|t - t_0|^n/n!$ (N es la constante de la condición de Lpischitz).

c) Muestre que entonces $f(t, u_n(t)) \to f(t, u(t)$ uniformemente y por lo tanto las aproximaciones de Picard convergen a una solución.

d) Muestre finalmente que la solución es única. Para esto suponga que $u(t)$ y $v(t)$ son dos soluciones y observe que la condición de Lipschitz permite acotar la diferencia (en $|t - t_0| \leq r$) por

$$|u(t) - v(t)| \leq NK|t - t_0|, \qquad K = \max_{|t-t_0|\leq r} |u(t) - v(t)|. \tag{3.6}$$

Aplicando reiteradamente esta cota, muestre que $|u(t) - v(t)| \leq KN^n|t - t_0|^n/n!$ para n arbitrario, y que por lo tanto las soluciones tienen que ser coincidentes.

Problema 3. Utilice el método de Picard con $u^{[0]}(t) = 1$ para obtener las aproximaciones sucesivas a la solución de

$$\frac{du(t)}{dt} = u(t), \qquad u(0) = 1. \tag{3.7}$$

Muestre que estas aproximaciones no son sino las sumas parciales de la serie de Taylor de e^t. ¿En qué intervalo converge la serie obtenida? ¿Cuál es el intervalo de convergencia que garantiza el teorema de Picard?

Problema 4. Utilice el método de Picard para resolver

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u^2, \qquad u(0) = u_0. \tag{3.8}$$

a) Muestre que si $\lambda > 0$ la solución existe más allá de la región de convergencia de las aproximaciones sucesivas de Picard.

b) Muestre que para $\lambda < 0$ la solución sólo existe dentro de la región de convergencia. Utilizando la condición de Lipschitz, muestre que la existencia de la solución sólo puede garantizarse en una región tal que $|x| < |\lambda u_0|^{-1}$.

Problema 5. Analice el problema

$$\frac{du}{dt} = q\frac{u}{t}, \qquad u(0) = u_0. \tag{3.9}$$

Muestre que el problema sólo tiene solución si $u_0 = 0$, y que en ese caso la solución es única si $q < 0$, mientras que hay infinitas soluciones si $q > 0$.

Problema 6. Sistemas lineales de primer orden y matriz fundamental. Determine la matriz A correspondiente al siguiente sistema, que describe el comportamiento de las corrientes transitorias en un transformador eléctrico:

$$L_1\frac{dx}{dt} + M\frac{dy}{dt} + R_1 x = 0 \tag{3.10}$$

$$M\frac{dx}{dt} + L_2\frac{dy}{dt} + R_2 y = 0 \tag{3.11}$$

Si L_1, L_2, R_1 y R_2 son positivos, y $L_1L_2 - M^2 > 0$, mostrar que los autovalores de A son reales, distintos y negativos.

Problema 7. Considere el problema

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ a & -b \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}(5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

con a y b constantes.

a) Resuelva primero suponiendo $a \neq b$.

b) ¿Qué sucede si $a = b$? Encuentre pare este caso la matriz fundamental.

Problema 8. Sistemas inhomogéneos y matriz de Green. Utilice la matriz de Green para escribir una solución general de

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}(t) + \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a \text{ constante, } a \neq 0. \tag{3.13}$$

Aplique el resultado para resolver el caso $\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

***Problema 9. El Wronskiano y la independencia lineal.** Decimos que $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son linealmente dependientes en $[a, b]$, si existen n constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no simultáneamente nulas tales que $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$.
Dados $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$, definimos el *Wronskiano* $W[f_1, \ldots, f_n](x)$:

$$W[f_1 \ldots f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Pruebe que si $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ son linealmente dependientes en $[a, b]$ entonces $W[f_1, \ldots, f_n](x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$. Nótese que en general no vale la recíproca.

***Problema 10.** Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se puede escribir

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.15}$$

Pruebe que si $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en $[a, b]$, y si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes en $[a, b]$ $\Rightarrow W[y_1, y_2](x) \neq 0 \, x \in [a, b]$. *Sugerencia:* suponer la existencia de un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, con y_1 e y_2 linealmente independientes, y ver que se llega a un absurdo.

***Problema 11.** Sea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, con $p(x)$ y $q(x)$ continuas. Transformando la ecuación en un sistema de ecuaciones lineales de primer orden, demuestre que:

a) La solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se escribe como una combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes de la misma ecuación.

b) La solución general de la ecuación inhomogónea es la suma de la solución general de la ecuación homogónea más una solución particular de la inhomogénea.

Problema 12. Método de variación de las constantes. Pruebe que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (p y q continuas), entonces $y_p(x) = y_1(x)v_1(x) + y_2(x)v_2(x)$ es solución particular de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, donde $v_1(x) = -\int dx \frac{y_2(x)r(x)}{W[y_1,y_2]}$ y $v_2(x) = \int dx \frac{y_1(x)r(x)}{W[y_1,y_2]}$.

Problema 13. Resuelva las siguientes ecuaciones inhomogéneas

$$y'' - y' - 6y = e^{-2x}, \tag{3.16}$$

$$2y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x}, \tag{3.17}$$

$$my'' + 2\gamma y' + ky = C \cos \Omega t \tag{3.18}$$

(la última de estas ecuaciones corresponde al oscilador amortiguado y forzado).