Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 2 — Ecuaciones diferenciales ordinarias II

Resolución por series de potencias

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas por series de potencias.** Clasificación de los puntos del dominio de la ecuación en ordinarios, singulares regulares y singulares irregulares. Desarrollos posibles en cada caso, series de Frobenius y teorema de Fuchs-Frobenius.

b) **Desarrollos en torno a puntos ordinarios.** Convergencia de la serie de Taylor de la solución en torno a un punto ordinario. Ecuación de Legendre: solución por serie de potencias. Polinomios de Legendre. Ecuación asociada de Legendre y armónicos esféricos.

c) **Desarrollos en torno a puntos singulares regulares.** Series de Frobenius, polinomio indicial y formas posibles de la solución según sus raíces. Ecuación de Bessel.

d) **Comportamiento en torno a puntos singulares irregulares.** Comportamiento asintótico. Ejemplos de determinación de comportamiento leading.

Bibliografía: Bender y Orszag (1978, cap. 3), Coddington (1961, caps. 3 y 4).

Problema 1. Considere la ecuación

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{2.1}$$

Diga si existen puntos singulares y clasifíquelos. Considere $x_0 = 0$ y muestre que se trata de un punto ordinario. ¿Cúal es el radio de convergencia mínimo de la serie de Taylor de la solución en torno a $x = 0$? Encuentre la solución exacta, su desarrollo de Taylor y su radio de convergencia.

Problema 2. Muestre que si bien la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\operatorname{senh} x}, \tag{2.2}$$

tiene un punto singular regular en $x_0 = 0$, la solución exacta es analítica en $x_0 = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la correspondiente serie? ¿Cuál es la cota inferior de este radio que surge de analizar los coeficientes de la ecuación?

Problema 3. Clasifique los puntos de las siguientes ecuaciones (incluído $x = \infty$) en ordinarios, singulares regulares y singulares irregulares.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x^2} = 0. \tag{2.5}$$

Muestre que las singularidades en las correspondientes soluciones son: una singularidad esencial en $x = \infty$ para (2.3), puntos de ramificación en $x = 0$ y $x = \infty$ en el caso de (2.4) y una singularidad esencial en $x = 0$ para (2.5).

***Problema 4.** Demuestre, siguiendo los pasos que se indican, que todas las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria lineal y homogénea de segundo orden son analíticas en un punto ordinario, y que su serie de Taylor en torno a ese punto tiene un radio de convergencia al menos igual a la distancia hasta la singularidad más cercana de los coeficientes.

a) Considere por simplicidad que el punto ordinario es $x = 0$. Se tiene entonces la ecuación

$$u''(x) + A(x)u'(x) + B(x) = 0, \tag{2.6}$$

con $A(x)$ y $B(x)$ analíticas en $x = 0$, de modo que admiten sendos desarrollos

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n, \qquad |x| < R. \tag{2.7}$$

Proponga un desarrollo de Taylor $u(x) = \sum_n u_n x^2$ para la solución, y muestre que si la serie converge, los coeficientes deben satisfacer la relación de recursión

$$u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{n+1} u_m [B_{n-m} + m A_{n-m+1}], \qquad n \geq 0, B_{-1} \equiv 0, \tag{2.8}$$

con u_0 y u_1 arbitrarios.

b) Encuentre una serie mayorante para $u(x)$. Para esto tome un número t dentro del radio de convergencia $(0 \leq |x| < t < R)$. Observe que dado que las series para $A(x)$ y $B(x)$ convergen en $x = t$, puede encontrarse un número M tal que $|A_n t^n| \leq Mt$ y $|B_n t^n| \leq M$ para todo n. Demuestre entonces la desigualdad

$$|u_n| \leq \frac{M}{t^n (n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{n+1} |u_m| t^m (m+1). \tag{2.9}$$

Definiendo ahora $C_0 = u_0$, $C_1 = u_1$ y

$$C_n = \frac{M}{t^n (n+1)(n+2)} \sum_{m=0}^{n+1} C_m t^m (m+1), \tag{2.10}$$

ha obtenido la serie mayorante puesto que $|u_n| \leq |C_n| \; \forall n$.

c) Finalmente, demuestre la convergencia de la serie mayorante $\sum_n C_n x^n$ utilizando el criterio del cociente. Obtendrá que la mayorante y por lo tanto la serie de $u(x)$ converge para $|x| < t$, con lo cual habrá encontrado también un radio de convergencia mínimo.

Problema 5. Resuelva el problema $xy'' + y' + xy = 0$ con valores iniciales $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$, desarrollando en potencias de x y luego desarrollando en potencias de $x - 1$.

***Problema 6. La función Γ.** Definamos la *función Γ de Euler* por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx, \qquad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0. \tag{2.11}$$

a) Integrando por partes, demuestre que

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1). \tag{2.12}$$

Como $\Gamma(1) = 1$, concluya que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Esta relación de recursión permite también extender la definición de la función, mediante prolongación analítica, a todo el plano $\operatorname{Re} z < 0$ excepto los enteros negativos.

b) Definamos la *función beta* por

$$B(r,s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\, dx, \tag{2.13}$$

donde la útlima relación se puede demostrar escribiendo el producto $\Gamma(r)\Gamma(s)$ como una integral iterada en x e y y haciendo los sucesivos cambios de variable $y \to u - x$, $x \to ut$.

c) Considere el caso particular de (2.13) con $r = z$, $s = 1 - z$ y observe que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(1)B(z, 1-z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t}\, dt \tag{2.14}$$

(para obtener la última integral haga el cambio $x \to t/(1+t)$). Evaluando la última integral en el plano complejo, demuestre que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}. \tag{2.15}$$

Problema 7. Ecuación de Legendre. La ecuación de Legendre es

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda(\lambda+1)y = 0, \tag{2.16}$$

que también puede escribirse

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda(\lambda+1)y = 0. \tag{2.17}$$

Resuelva esta ecuación mediante un desarrollo en serie de potencias $y(x) = \sum_n y_n x^n$ en torno a $x = 0$.

a) Muestre que la relación de recurrencia para los coeficientes es (es conveniente utilizar la segunda forma de la ecuación)

$$y_{n+2} = \frac{(n+\lambda+1)(n-\lambda)}{(n+1)(n+2)} y_n, \tag{2.18}$$

con y_0, y_1 constantes arbitrarias.

b) Muestre que los coeficientes pueden escribirse explícitamente, con expresiones para los coeficientes pares e impares dadas por:

$$y_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{\Gamma(\lambda+2n)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(\lambda/2)}{\Gamma(\lambda/2+n)}\frac{\Gamma(\lambda/2)}{\Gamma(\lambda/2-n)}x^{2n}, \tag{2.19}$$

$$y_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(\lambda+2n)}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma((\lambda-1)/2)}{\Gamma((\lambda-1)/2+n)}\frac{\Gamma((\lambda-1)/2)}{\Gamma((\lambda-1)/2-n)}x^{2n+1}. \tag{2.20}$$

c) Calcule el radio de convergencia.

d) Diga en qué casos existen soluciones finitas para $x = \pm 1$.

***Problema 8. Desarrollo de Frobenius.** Considere una ecuación de segundo orden

$$y'' + \frac{p(x)}{x-x_0}y' + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y = 0, \tag{2.21}$$

con $p(x)$ y $q(x)$ analíticos. Muestre que proponiendo un desarrollo de Frobenius $y(x) = x^\alpha \sum_n a_n(x-x_0)^n$ se obtienen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$P(\alpha)a_0 = 0, \tag{2.22}$$

$$P(\alpha+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(\alpha+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k, \tag{2.23}$$

donde $P(\alpha)$ es el *polinomio indicial*

$$P(\alpha) = \alpha^2 + (p_0 - 1) + q_0. \tag{2.24}$$

¿Pueden encontrarse dos soluciones linealmente independientes en forma de serie de Frobenius si el polinomio tiene una raíz múltiple? ¿Y si tiene dos raíces que difieren en un número entero?

Problema 9. Relaciones asintóticas. Muestre que si $f(x) \sim a(x-x_0)^{-b}$ para $x \to x_0^+$, entonces

$$\int^x f\,dx \sim \frac{a}{1-b}(x-x_0)^{1-b} \qquad \text{si } b > 1, \tag{2.25}$$

$$\int^x f\,dx \sim c + \frac{a}{1-b}(x-x_0)^{1-b} \qquad \text{si } b < 1, \tag{2.26}$$

$$\int^x f\,dx \sim a\log(x-x_0) \qquad \text{si } b = 1. \tag{2.27}$$

Problema 10. Estudie el comportamiento asintótico de

$$x^3y'' = y \qquad \text{para } x \to 0 \tag{2.28}$$

$$y'' = x^4y \qquad \text{para } x \to \infty \tag{2.29}$$

y muestre que el mayor orden es $y(x) \sim e^{2x^{-1/2}}x^{3/4}$ en el primer caso e $y(x) \sim x^{-1}e^{\pm x^3/3}$ en el segundo.