Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 11 — Probabilidades

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) Definiciones y axiomas. Interpretación y propiedades de las probabilidades. Variables aleatorias discretas y continuas. Distribución de probabilidad, densidad de probabilidad y distribución cumulativa. Principio de igual probabilidad *a priori*. Probabilidad condicional. Dependencia e independencia de eventos. Teorema de Bayes.

b) Momentos de una distribución: valor de expectación, mediana, moda, varianza y desviación estándar. Momentos de orden superior. Distribución uniforme, distribución binomial y distribución de Poisson. Distribución normal, normal estándar, gamma y chi cuadrado: momentos. Función generatriz de momentos y de momentos centrados. Función generatriz de las distribuciones normal y de Poisson.

c) Distribución de probabilidad conjunta de varias variables aleatorias. Distribución marginal. Variables aleatorias independientes, descorrelacionadas y ortogonales. Valores esperados, covarianza y correlación. Función característica para distribuciones bidimensionales.

Bibliografía: Marinari y Parisi (2002, caps. 1–3), Cramer (1946, caps. 13–20).

Problema 1. Partiendo de los axiomas de las probabilidades, demuestre las siguientes proposiciones

$$P(\varnothing) = 0, \tag{11.1}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A \cap B), \tag{11.2}$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{11.3}$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C), \tag{11.4}$$
$$\text{Si } B \subset A \implies P(A - B) = P(A) - P(B) \tag{11.5}$$
$$\text{Si } A \cap B = \varnothing \implies P(A - B) = P(A) - P(B), \quad (A \text{ y } B \text{ se denominan } \textit{incompatibles} \text{ o } \textit{autoexcluyentes}) \tag{11.6}$$

Problema 2. Conteste las siguientes preguntas para el experimento aleatorio de arrojar una moneda al aire observando si el resultado final al caer es “cara” o “ceca”.

a) ¿Cuál es el espacio muestral de los posibles resultados?

b) Siendo que el movimiento de la moneda durante su caída está regido por las leyes de Newton, y que éstas son deterministas, ¿a qúe se debe el comportamiento aleatorio del resultado de este experimento?

c) ¿Qué probabilidad le asignaría a priori a cada uno de los resultados? ¿Por qué?

Problema 3. Se tiran dos dados al azar. Suponiendo que los dados no están cargados,

a) Identifique el espacio muestral

b) Calcule la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea igual a 7 o a 11.

c) Calcule la probabilidad de que la suma sea mayor que 7 pero diferente de 11.

Problema 4. Una bolsa contiene 10 llaves, de las cuales una es correcta para abrir cierta puerta. Se sacan las llaves hasta abrir la puerta.

a) ¿Cuál es la probabilidad de abrir en el primer intento?

b) Si el primer intento falló ¿cuál es la probabilidad de abrir en el segundo intento?

c) ¿Cuál es la probabilidad *a priori* (o sea antes de realizar el primer intento) de abrir en el segundo intento? ¿y en el enésimo?

d) Si las llaves probadas se vuelven a colocar en la bolsa ¿cuál es la probabilidad de abrir en el enésimo intento?

Problema 5. Probabilidad condicional y fórmula de Bayes. La *probabilidad condicional* se define por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{11.7}$$

y dos eventos se dicen *independientes* cuando

$$P(A|B) = P(A), \qquad \text{(eventos independientes)} \tag{11.8}$$

lo que implica que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

a) Considere ahora un *conjunto completo mutuamente excluyente* de eventos, es decir un $\{E_i\}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S, \qquad E_j \cap E_j = \varnothing, \quad \forall i, j. \tag{11.9}$$

Utilizando los axiomas y la definición de probabilidad condicional, demuestre la *fórmula de Bayes,*

$$P(E_i|B) = \frac{P(E_i)P(B|E_i)}{\sum_j P(E_j)P(B|E_j)}, \tag{11.10}$$

y observe que puede utilizarse para "invertir" probabilidades condicionales, es decir para obtener $P(E_i|B)$ a partir del conocimiento de las $P(B|E_i)$.

b) La siguiente es una aplicación clásica de la fórmula de Bayes: un test para detectar una cierta enfermedad tiene una probabilidad del 10 % de dar un falso resultado negativo, y del 1 % de dar un falso resultado positivo. Suponiendo que el 3 % de las población está afectada por esa enfermedad ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que obtiene un resultado postitivo en el test esté realmente enfermo?

c) Ahora suponga que se tienen tres escritorios idénticos A, B y C, cada uno de ellos con dos floreros. En A cada florero tiene una moneda de oro, en C cada florero tiene una moneda de plata y en B un florero tiene una moneda de plata y el otro una de oro. Se elige un escritorio al azar y se encuentra una moneda de oro en uno de los floreros. ¿Cuál es la probabilidad de que el escritorio elegido haya sido el B?

Problema 6. Distribuciones de probabilidad discretas.

a) Suponga que se lanza un par de dados honrados y que la variable aleatoria X denota la suma de los puntos obtenidos. Obtenga la distribución de probabilidad para X y represente gráficamente.

b) Halle la distribución de probabilidad de niños y niñas en familias con tres hijos, suponiendo igual probabilidad para niños y niñas. Haga lo mismo para familias con n hijos si la probabilidad de un niño es p y la de una niña es $1 - p$.

c) Se sabe que cierta moneda sale cara con frecuencia 3 veces mayor que ceca. Se arroja la moneda 4 veces. Halle la distribución de probabilidad del número de caras. ¿Cuál es el número de caras que tiene mayor probabilidad? ¿cuál es el valor esperado del número de caras?

Problema 7. Distribución binomial. Consideremos una serie de experimentos tales que el espacio muestral consta de dos elementos, y que la probabilidad de los eventos no varía al repetir el experimento. Estos eventos se denominan *eventos de Bernoulli.* Llamemos "evento positivo" a uno de ellos, y p a su probabilidad (evidentemente la probabilidad del "evento negativo" será $q = 1 - p$).

a) Muestre en N tentativas de Bernoulli, la probabilidad de obtener exactamente k resultados positivos (en cualquier orden) está dada por la *distribución binomial,*

$$B_{N,p}(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}. \tag{11.11}$$

b) Muestre que la distribución binomial está correctamente normalizada y que su media y la varianza son

$$\mu = \langle k \rangle = Np, \qquad \sigma^2 = \langle (k-\mu)^2 \rangle = Npq. \tag{11.12}$$

c) Muestre que $B_{N,p}(k)$ es máxima para $p(N+1)$.

Problema 8. Distribución de Poisson. Considere una serie de experimentos de Bernoulli en el límite en que $N \to \infty$ y $p \to 0$ de modo que el producto $\lambda = Np$ permanece fijo.

a) Muestre que la distribución del número de positivos en ese caso está dada por la *distribución de Poisson,*

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{11.13}$$

b) Muestre que la distribución está correctamente normalizada y que sus primeros momentos son

$$\mu = \lambda, \qquad \sigma^2 = \lambda \tag{11.14}$$

Un caso importante donde aparece la distribución de Poisson es cuando se tiene un proceso binario continuo (como en el decaimiento radiactivo: decaer o no decar, saltar o no saltar, etc.). Dado un intervalo de tiempo T, dividámoslo en N intervalos de longitud T/N. En cada uno de ellos sucede algo (digamos el decaimiento) con probabilidad $P(T/N)$. Cuando $N \to \infty$ necesitamos $NP(T/N) \to \lambda T$ (constante) para que la probabilidad sea finita (elegimos escribir la constante de esa manera para que el intervalo total T aparezca como parámetro en la distribución, notar que λ tiene unidades de $1/T$). La probabilidad de observar k eventos en el intevalo T entonces es

$$P_{\lambda,T}(k) = \frac{(T\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda T}. \tag{11.15}$$

Luego la probabilidad de que *no* haya ocurrido el decaimiento en un tiempo T es $P(k=0) = e^{-\lambda T}$, de modo que $1/\lambda$ puede interpretarse como tiempo de vida media, o tiempo de relajación.

El siguiente es otro caso físicamente relevante donde aparece una distribución de Poisson:

c) Considere una partícula puntual ubicada al azar en un volumen V. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula dentro de un volumen $v \subset V$? ¿Cuál es la densidad de probabilidad?

d) Tomemos ahora N partículas distribuídas al azar en el volumen V (un gas ideal). ¿Cúal es la probabilidad de encontrar *exactamente* n partículas en un volumen V?

e) Muestre que el resultado anterior tiende a una distribución de Poisson cuando $N, V \to \infty$ a densidad $\rho = N/V$ fija.

f) ¿Cuál es la probabilidad (en el caso $N \to \infty$) de encontrar *al menos* una partícula en v? Muestre que esa probabilidad tiende a uno exponencialmente al aumentar v.

g) ¿Cuál es el número medio de partículas en v?

Problema 9. La distribución Gaussiana. Está dada por la densidad de probabilidad

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11.16}$$

Muestre que la media y siguientes tres momentos centrados son

$$\text{Media} \qquad \mu_1 = \langle x \rangle = \mu, \tag{11.17}$$

$$\text{Varianza} \qquad \mu_2 = \langle (x-\mu_1)^2 \rangle = \sigma^2, \tag{11.18}$$

$$\text{Tercer momento} \qquad \mu_3 = 0, \tag{11.19}$$

$$\text{Cuarto momento} \qquad \mu_4 = 3\sigma^4. \tag{11.20}$$

Problema 10. La distribución Gamma. Consideremos nuevamente un experimento de Bernoulli pero en lugar de fijar el tiempo y calcular las probabilidades de un cierto número de eventos, preguntémonos por la probabilidad de que transcurra un tiempo t hasta que se den k eventos.

a) Muestre que esa probabilidad es

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{/\lambda t)^l}{l!} e^{\lambda t}. \tag{11.21}$$

b) Calcule ahora la correspondiente densidad de probabilidad (que corresponde a la probabilidad de que el evento k-ésimo ocurra entre t y $t + dt$) y muestre que se obtiene

$$P(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}. \tag{11.22}$$

Poniendo $k = \alpha$ (no necesariamente entero) y $\theta = 1/\lambda$, definiremos la *distribucion Gamma* por

$$P(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-t/\theta}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha}. \tag{11.23}$$

Problema 11. Distribución χ^2. Definamos una variable aleatoria χ^2 como la suma de los cuadrados de N variables normales standard, es decir

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} z_i^2, \tag{11.24}$$

con $P(z_i) = e^{-z_i^2/2}/\sqrt{2\pi}$. La distribución de χ^2 es

$$P(\chi^2 = x) = \int dz_1 \dots dz_N \, P(z_1) \dots P(z_N) \delta\left(\sum_i^N z_i^2 - x\right). \tag{11.25}$$

Calcule la integral para mostrar que la *distribución* χ^2 está dada por

$$P(\chi^2 = x) = \frac{x^{N/2-1} e^{-x/2}}{2^{N/2}\Gamma(N/2)}. \tag{11.26}$$

Función generatriz. Dada una serie $\sum_n a_n$, se le puede asociar una *función generatriz*

$$F(s) = \sum_{s=0}^{\infty} a_n s^n, \tag{11.27}$$

(convergente para s lo suficientemente pequeño si a_n crece menos rápido que una exponencial en n), tal que sus derivadas están directamente relacionadas con los coeficientes: $F^{(n)}(0) = n! a_n$. Si los a_n están acotados, está definida $F(s = e^{i\theta})$ (que resulta una transformada de Fourier de una función de variable discreta). En este caso los coeficientes pueden obtenerse también mediante

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{ds}{s} s^{-n} F(s), \tag{11.28}$$

donde la integral es sobre un circuito cerrado antihorario que incluya al origen y a ningún polo de $F(s)$ (mostrarlo utilizando la fórmula de los residuos).

Problema 12. Función característica. Definimos la primer y segunda característica de una distribución $p(x)$ por

$$\phi(\omega) = \langle e^{i\omega x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, p(x) e^{i\omega x} \tag{11.29}$$

$$\psi(\omega) = \ln \phi(\omega). \tag{11.30}$$

($\phi(\omega)$ es una transformada de Fourier de la distribución).

a) Muestre que $\phi(0) = 1$ y $|\phi(\omega)| \leq 1$.

b) Muestre que la función caracterísitica de la distribución de Poisson es

$$\phi(\omega) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i\omega}}. \tag{11.31}$$

c) Desarrollando la exponencial, muestre que la función característica es la función generatriz de los momentos (no centrados):

$$\left.\frac{d^n \phi}{d\omega^n}\right|_{\omega=0} = i^2 \langle x^n \rangle. \tag{11.32}$$

d) La segunda característica define los *cumulantes* K_n al ser utilizada como función generatriz:

$$\psi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{(i\omega)^n}{n!}. \tag{11.33}$$

Muestre que los primeros cuatro cumulantes son

$$K_1 = \mu_1, \qquad K_3 = \mu_3, \tag{11.34}$$

$$K_2 = \mu_2, \qquad K_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2. \tag{11.35}$$

donde los μ_i son los momentos centrados (μ_2 es la varianza).

e) Encuentre la función característica de la variable aleatoria X con función de densidad $f(x) = e^{-x} H(x)$, y determine los primeros cuatro momentos alrededor del origen.

f) Utilice la característica y segunda característica para calcular los primeros momentos de la distribución Gamma (11.23) y mostrar que

$$\text{media:} \qquad \mu = \alpha\theta, \tag{11.36}$$

$$\text{varianza:} \qquad \sigma^2 = \alpha\theta^2, \tag{11.37}$$

$$\text{skewness:} \qquad \gamma_1 \equiv \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \tag{11.38}$$

$$\text{Kurtosis:} \qquad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{6}{\alpha}. \tag{11.39}$$

Problema 13. Función de una variable aleatoria. Consideremos una relación funcional $y = g(x)$. Si x es una variable aleatoria con densidad de probabilidad $p(x)$, y es también una variable aleatoria, con una distribución inducida por la distribución de x. Nos preguntamo aquí por la distribución de probabilidad de y, $p(y)$.

a) Considere primero una $g(x)$ creciente en todo el rango de valores permitidos de x. Se ve entonces que las distribuciones cumulativas se relacionan por

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^{y} P_y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} P_x(x)\, dx = F_x(g^{-1}(y)). \tag{11.40}$$

Muestre entonces que las densidades se relacionan por

$$P_y(y) = P_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \right|. \tag{11.41}$$

Muestre que esta úlitma fórmula vale también para el caso decreciente.

b) En el caso general en que $g(x)$ no es invertible, utilice la fórmula de la composición de la delta de Dirac para obtener la fórmula general

$$P_y(y) = \sum_i \frac{P_x(x_i)}{|g'(x_i)|}, \tag{11.42}$$

donde x_i son las raíces de la ecuación $g(x) - y = 0$.

c) Aplique lo anterior para el caso de una variable X con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2]$. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable $Y = X^2$ y calcule la esperanza y la varianza de X e Y.

Problema 14. Dos variables aleatorias. Consideremos dos variables aleatorias X y Y, cada una descripta por su distribución acumulada, $F_X(x)$, $F_Y(y)$. Si consideramos ahora el evento producto

$$\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\} = \{X \leq x \wedge Y \leq y\}, \tag{11.43}$$

define la *distribución acumulada conjunta* $F_{X,Y}(x,y)$. Conociendo la distribución conjunta pueden obtenerse la distribuciones individuales, llamadas en este contexto *distribuciones marginales*,

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty), \qquad F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y), \tag{11.44}$$

aunque no es posible obtener la conjunta de las marginales a menos que se realicen suposiciones adicionales.

a) Dada la definición lógica de la densidad conjunta, $f_{X,Y}(x,y) = \partial^2 F_{X,Y}(x,y)/\partial x \partial y$, muestre que la densidad marginal se puede obtener como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy. \tag{11.45}$$

b) Las distribuciones condicionales se definen por

$$F_Y(y|M) = P(Y \leq y|M) = \frac{P(Y \leq y|M}{P(M)}, \tag{11.46}$$

de modo que en particular

$$F_Y(y|X \leq x) = \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_X(x)}. \tag{11.47}$$

Muestre que la densidad condicional es

$$f_Y(y|X \leq x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(x',y)\, dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{x} dx\, f_{X,Y}(x',y)}. \tag{11.48}$$

Problema 15. Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ con X_i variables aleatorias.

a) Muestre que

$$\mathrm{Var}[Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \,\mathrm{Cov}[X_i, X_j]. \tag{11.49}$$

b) Demuestre que si las X_i son independientes ($f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i f_i(x_i)$), entonces

$$\mathrm{Var}[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,\mathrm{Var}[X_i]. \tag{11.50}$$

c) Si además $a_i = a$y las x_i tienen idéntica distribución, concluya que

$$\mathrm{Var}[Y] = n\,\mathrm{Var}[X]. \tag{11.51}$$