Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 10 — Ecuaciones hiperbólicas

Ecuación de ondas

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Consideraciones generales.** Condiciones iniciales y superficies caracterísiticas. Ecuación de las características en el caso de más de dos variables. Unicidad de la solución. Dominio de dependencia. Función de Green: solución formal de la ecuación inhomogénea en términos de la función de Green y expresión formal de la función de Green como desarrollo en autofunciones del laplaciano.

b) **Ecuación de ondas en una dimensión espacial.** Solución de D'Alembert y función de Green para la recta. Función de Green en la semirrecta por método de las imágenes. Problemas en un segmento. Soporte de la función de Green y difusión de ondas.

c) **Ecuación de ondas en dos y tres dimensiones espaciales.** Función de Green para el espacio tridimensional: soluciones de Poisson y Lorentz. Función de Green en dos dimensiones mediante descenso dimensional. Soporte de la función de Green en distintas dimensiones y caractarísitca de la propagación.

d) **Relaciones de dispersión y ecuaciones relacionadas.** Función de Green, función respuesta y susceptibilidad. Función de Green en el espacio de Fourier-Laplace: relaciones de dispersión. Función de Green de ecuaciones relacionadas: propagación, velocidad de grupo, relaciones de dispersión imaginarias. Ecuación del telégrafo. Ecuación de ondas con disipación. Ecuación de la cuerda rígida.

Bibliografía: Duff y Naylor (1966, caps. 2, 10), Tikhonov y Samarskii (1963, caps. II, V).

***Problema 1. Función de Green.** Demuestre que si se define la función de Green como solución del problema

$$\begin{aligned}
\left(\partial_t^2 - c^2\nabla_{\boldsymbol{r}}^2\right) G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t-t') &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})\delta(t-t'),\\
G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},0^+) &= 0,\\
\partial_t G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},0^+) &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}),\\
G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t)\big|_{\boldsymbol{r}\in\mathcal{S}} &= 0
\end{aligned} \tag{10.1}$$

para una región espacial $\mathcal{R}$ de la cual $\mathcal{S}$ es la frontera, entonces la solución del problema inhomogéneo

$$\partial_t^2 u - c^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t') = f(\boldsymbol{r},t) \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r},t)\big|_{\boldsymbol{r}\in\mathcal{S}} &= g(\boldsymbol{r},t)\\
u(\boldsymbol{r},0) &= \phi(\boldsymbol{r}),\\
\partial_t u\big|_{t=0} &= \psi(\boldsymbol{r}),
\end{aligned} \tag{10.3}$$

en la misma región es

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r},t) = &\int_0^\infty dt' \int_{\mathcal{R}} d^3r' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t-t') f(\boldsymbol{r'},t') - c^2 \int_0^\infty dt' \oint_{\mathcal{S}} dS' \frac{\partial G}{\partial n'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t-t') g(\boldsymbol{r'},t') + \\
&\int_{\mathcal{R}} d^3r' \left[G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t)\psi(\boldsymbol{r'}) + \partial_t G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t)\right].
\end{aligned} \tag{10.4}$$

Problema 2. Ecuación de ondas en una dimensión.

a) Verifique que la función

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{\Delta(x,t)} dx'\,dt'\,f(x',t'), \tag{10.5}$$

donde $\Delta(x,t)$ es el cono del pasado del punto (x,t) (es decir $\Delta(x,t) = \{(x',t') : t' \leq t, |x'-x| \leq c(t-t')\}$) es solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2u_{xx} = f(x,t)$ en toda la recta, con condiciones iniciales homogéneas.

b) Concluya que la función de Green para este caso ha de ser

$$G(x,t) = \frac{1}{2c}\Theta(ct+x)\Theta(ct-x), \tag{10.6}$$

y muestre que de ella se obtiene la solución de D'Alembert para la ecuación de ondas homogénea con condiciones iniciales $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(x')\, dx'. \tag{10.7}$$

Problema 3.

a) Mediante el método de las imágenes, muestre que la función de Green para la cuerda semiinfinta con condiciones de contorno de Dirichlet o Neumann es respectivamente

$$G_D(x,x',t) = G(x-x',t) - G(x+x',t), \qquad G_N(x,x',t) = G(x-x',t) + G(x+x',t). \tag{10.8}$$

b) Utilice el resultado anterior para dibujar el perfil de una cuerda homogénea semiinfinita ($x > 0$) para distintos tiempos en los casos:

I) $u(x,0) = h(-|x-2a|+a)$ para $a \le x \le 3a$ y $u(x,0) = 0$ en caso contrario, con $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$ (extremo fijo).

II) idem pero con $u_x(0,t) \equiv 0$ (extremo libre).

Problema 4.

a) Mostrar que la función de Green para la ecuación de ondas en $[0,L]$ y condiciones de contorno de Dirichlet es

$$G(x,x',t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\omega_n t}{\omega_n} \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} k_n x' \Theta(t), \qquad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad \omega_n = c k_n. \tag{10.9}$$

b) Utilizar ese resultado para estudiar el problema de la vibración de una cuerda finita bajo la influencia de la fuerza peso,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -\rho g. \tag{10.10}$$

Suponga que la cuerda se libera desde el equilibrio en reposo ($u(x,0) = u_t(x,0) = 0$) y considere las condiciones de contorno

I) $u(0,t) = u(L,t) = 0$,

II) $u(0,t) = \mu(t)$, y $u(L,t) = 0$.

***Problema 5. Función de Green en d dimensiones.** Transformando Fourier en el espacio y Laplace en el tiempo, muestre que la función de Green para $\mathbb{R}^d$ es

$$G^{(d)}(\boldsymbol{k},s) = \frac{1}{c^2k^2 + s^2}, \tag{10.11}$$

o bien

$$G^{(d)}(\boldsymbol{k},t) = \frac{\operatorname{sen} ckt}{ck}. \tag{10.12}$$

Esta expresión es válida en cualquier dimensión, pero al volver al espacio directo las expresiones dependen de la dimensionalidad. Consideremos los casos $d = 2, 3$.

a) En $d = 3$ es posible calcular la transformada de Fourier. Muestre que

$$G^{(3)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2\pi^2 cr}\int_0^{\infty} dk \operatorname{sen} ckt \operatorname{sen} kr \Theta(t), \tag{10.13}$$

y utilizando la identidad $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta]$ reescriba el integrando de modo de hacer aparecer dos exponenciales para obtener finalmente

$$G^{(3)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\Theta(t)}{4\pi c}\frac{\delta(ct-r)}{r} \tag{10.14}$$

b) Para $d = 2$ es conveniente considerar una ecuación en 3 dimensiones con una inhomogeneidad $\delta(x)\delta(y)\delta(t)$ (método de descenso dimensional). Observe que la solución con esta inhomogeneidad es precisamente la función de Green para $\mathbb{R}^2$ y obtenga sucesivamente

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x,y,t) &= \int d^2r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'},t-t')\delta(x')\delta(y')\delta(t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(t)}{4\pi c} \frac{\delta(ct-r)}{r}\, dz \\ &= \frac{\Theta(c^2t2-\rho^2)\Theta(t)}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-\rho 2}}, \qquad \rho^2 = x^2+y^2. \end{aligned} \tag{10.15}$$

***Problema 6. Fórmula de Poisson y solución de Lorentz.** Utilice la función de Green (10.14) para obtener los siguientes resultados, que constituyen la solución, en 3 dimensiones, para la ecuación de ondas con inhomogeneidades en las condiciones iniciales y en la ecuación respectivamente:

$$u(\boldsymbol{r},t) = t\left[M_{ct}\psi\right](\boldsymbol{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{t\left[M_{ct}\psi\right](\boldsymbol{r})\right\}, \qquad \text{(fórmula de Poisson)} \tag{10.16}$$

$$u(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\int_{|r'-r|\le ct} d^3r' \,\frac{1}{|r-r'|} f(\boldsymbol{r'},t-|r-r'|/c, \qquad \text{(solución de Lorentz)} \tag{10.17}$$

donde $[M_a\psi](\boldsymbol{r})$ significa la media de $\psi(\boldsymbol{r'})$ sobre una superficie esférica de radio a centrada en $\boldsymbol{r}$.

Problema 7. Escriba la solución para la ecuación de ondas homogéna en $\mathbb{R}^3$ con condición inicial $u(\boldsymbol{r},0) = f(\check{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r})$ y $u_t(\boldsymbol{r},0) = 0$. Utilizando la función de Green (10.14) muestre que la solución es

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int d\Omega\, \left[f(\check{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r} - ct\cos\theta) + ctf'(\check{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r} - ct\cos\theta)\right]. \tag{10.18}$$

¿Por qué no obtiene ondas planas? ¿Qué sucede si reemplaza la condición inicial en la derivada por $u_t(\boldsymbol{r},0) = -cf'(\check{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{r})$?

Problema 8. Ondas con frecuencia de corte inferior. Imagine una cuerda elástica sujeta en cada punto a una pared mediante resortes de idéntica constante elástica (es decir, donde cada elemento de la cuerda está sometido a un campo externo que genera un potencial cuadrático en el desplazamiento u). La ecuación de la cuerda con este campo es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u = 0. \tag{10.19}$$

Esta ecuación surge también en teoría de campos, donde se la conoce como *ecuación de Klein-Gordon.* Encuentre la función de Green y la relación de dispersión. ¿Qué frecuencia corresponde a una longitud de onda infinita? ¿Por qué no es nula como en la ecuación de la onda elástica? ¿Cuál son las frecuencias mínima y máxima permitidas?

Problema 9. Ecuación de ondas disipativa. Ondas evanescentes. Si se introduce un término de fricción a la ecuación de la cuerda elástica se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\gamma\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{10.20}$$

Esta ecuación también se obtiene en el caso de difusión del calor con la ley de Fourier modificada $\tau\boldsymbol{j}_t + \boldsymbol{j} = -\kappa\nabla T$.

a) Calcule la función de Green y observe que se trata de una ecuación que describe propagación de ondas con velocidad finita.

b) Muestre que la relación de dispersión es

$$\omega(k) = i\gamma\left[1-\sqrt{1-k^2/k_c^2}\right], \qquad k_c = \gamma/c, \tag{10.21}$$

y calcule la velocidad de grupo.

c) Muestre que para $k < k_c$ no hay propagación (la frecuencia es imaginaria pura, este caso se llama a veces de *ondas evanescentes*), y que para $k \gg k_c$ se obtienen ondas no dispersivas ($v_f = v_g$) con velocidad de fase renormalizada $v_f = c/2\gamma$.

Problema 10. Ecuación de ondas dispersiva. Si en lugar de una cuerda perfectamente flexible se considera una cuerda rígida (es decir que recupera su forma luego de doblarla y soltarla, como una cuerda de piano), aparece un nuevo término en la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{10.22}$$

a) Calcule la función de Green en el espacio de Fourier-Laplace y muestre que la relación de dispersión es

$$\omega(k) = ck\sqrt{1 + \alpha k^2}. \tag{10.23}$$

Calcule las velocidades de fase y de grupo.

b) Considere ahora el caso de una cuerda de longitud L, fija en los extremos. Observe que las soluciones estacionarias (obtenidas por ejemplo mediante separación de variables) tendrán la misma relación de dispersión pero admitirán valores discretos de k. ¿Cuáles son esos valores? En el caso de la cuerda perfectamente flexible, sabemos que la frecuencia del primer armónico es el doble de la frecuencia fundamental. ¿Cómo se modifica esta relación en este caso?