Matemáticas Especiales II

Año 2014

Prof: T. S. Grigera — JTP: V. Fernández — AD: S. Franchino

Práctica 1 — Ecuaciones diferenciales ordinarias I

Técnicas básicas para obtener soluciones generales

Esta práctica abarca los siguientes temas:

a) **Introducción a las ecuaciones diferenciales.** Qué son y por qué estudiarlas. Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Qué significa resolver una E.D. Solución general y solución particular: condiciones adicionales (iniciales o de contorno).

b) **Ecuaciones diferenciales ordinarias: generalidades y casos particulares importantes.** Forma general. Ecuaciones lineales y principio de superposición. Casos especiales: coeficientes constantes, variables separables, diferencial exacto y factor integrante, ecuaciones autónomas, ecuaciones equidimensionales, ecuaciones invariantes de escala, reducción a ecuaciones lineales (ec. de Bernoulli), reducción de orden (ecuaciones autónomas, ecuaciones lineales, ecuación de Riccati).

Bibliografía: Bender y Orszag (1978, cap. I)

Problema 1. Ecuaciones lineales homogéneas con coeficients constantes. Considere la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1.1}$$

(a, b y c constantes). Muestre que proponiendo soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$ el problema se reduce a hallar las raíces r_1 y r_2 de la ecuación cuadrática $ar^2 + br + c = 0$. Escriba la solución general en los tres casos posibles i) $r_1 \neq r_2$, con r_1 y r_2 reales, ii) $r_1 = r_2$, iii) $r_1 = r_2^*$.

Utilice lo anterior para obtener la solución general de la ecuación del oscilador armónico amortiguado,

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + kx = 0. \tag{1.2}$$

Diga en qué condiciones se obtienen soluciones oscilatorias y en qué condiciones el sistema vuelve más rápidamente al estado de equilibrio.

Problema 2. Variables separables, diferencial exacto y factor integrante. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones, y la solución particular indicada:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{1.3}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N^2, \qquad N(t_0) = N_0 \tag{1.4}$$

Diga si la solución de la ec.(1.4) existe $\forall t > t_0$ en los casos $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$.

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^2 + u(t+1) + t(t+2)}{2u + t} \tag{1.5}$$

$$y' = \frac{y-1}{x+3}, \qquad y(-1) = 1 \tag{1.6}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\tan x \tag{1.7}$$

$$\left(ye^{xy} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(xe^{xy} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0, \qquad y(1) = 1 \tag{1.8}$$

Por último considere la ecuación para la velocidad de una partícula en un medio viscoso,

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v + f(t), \qquad v(t_0) = v_0. \tag{1.9}$$

Analice primero el caso $L[v] = f(t) = 0$ y explique como se manifiesta analíticamente la invarianza frente a traslaciones temporales. Agregue luego la inhomogeneidad. ¿Es la ecuación invariante ahora? ¿Cómo se manifiesta, en la solución de la inhomogénea, el carácter invariante del operador diferencial L?

Problema 3. Ecuaciones autónomas. Muestre que cuando no aparece explícitamente la variable independiente, la transformación $u(y) = y'(x)$ transforma la ecuación en otra no autónoma pero de un orden inferior. Encuentre las soluciones generales de las siguientes ecuaciones:

$$y'' + y' + y = 0, \tag{1.10}$$

$$y'' + yy' = 0, \tag{1.11}$$

$$yy'' + (y')^2 = 0, \tag{1.12}$$

$$-\Lambda^2 y^4 - 4y'^4 + 8\Lambda y^3 y'' + 16yy'^2 y'' - 4y^2\left(\Lambda y'^2 + 4y''^2\right) = 0. \tag{1.13}$$

Problema 4. Ecuaciones equidimiensionales. Resuelva la ecuación

$$u''(t) = \frac{u(t)u'(t)}{t} \tag{1.14}$$

reduciéndola a una ecuación autónoma. Muestre que la solución general es

$$u(t) = A\tan(2A\log t + B) - 1, \tag{1.15}$$

pero que existen también las soluciones particulares

$$u(t) = C \tag{1.16}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2\log t + C} - 1, \tag{1.17}$$

y explique cómo surgen del proceso de solución.

Problema 5. Ecuaciones invariantes de escala. Si la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ es tal que $f(x,y)$ puede expresarse como una función que depende sólo del cociente $\frac{y}{x}$, muestre que la sustitución $u = \frac{y}{x}$ transforma a la ecuación en una ecuación de variables separables. Resuelva $y^2dx + x(x-y)dy = 0$. Muestre que la ecuación de Thomas-Fermi, $u''(t) = u^{3/2}/\sqrt{t}$ puede llevarse a $dy/dw = (w^{3/2} - 12w + 7y)/y$.

Problema 6. Ecuación de Bernoulli. Una ecuación de primer orden que puede escribirse en la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^r$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en un intervalo (a,b) y r es un número real, es una ecuación de Bernoulli. ¿A qué se reduce la ecuación de arriba en los casos particulares $r = 0$ y $r = 1$? Demostrar que, para cualquier otro valor de r, la sustitución $u = y^{1-r}$ transforma la ecuación de Bernoulli en una lineal. Hallar la solución general de $xy' + 2y = 2x^3\sqrt{y}$.

Problema 7. Reducción de orden. Pruebe que si $y_1(x)$ es una solución de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, la sustitución $y = y_1(x)v(x)$ permite transformar a la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ en una ecuación diferencial de primer orden. Encuentre la solución general de $x^2y'' + 3\,x\,y' - 3\,y = 0$, sabiendo que $y = x$ es solución de la ecuación diferencial.

Utilice una sustitución para reducir el orden y resolver las ecuaciones

$$xy'' - y' = x^2, \tag{1.18}$$

$$x^2 + (y')^2 x + x^2 y' y'' = 0. \tag{1.19}$$

Problema 8. Encuentre la familia de curvas ortogonales a cada una de las familias de curvas dadas

$$y^2 = cx^3, \tag{1.20}$$

$$2x^2 + y^2 = k. \tag{1.21}$$

Problema 9. El campo eléctrico de un dipolo es simétrico con respecto a una rotación en torno al eje del mismo. Por lo tanto, podemos estudiarlo restringiéndonos a un plano que contiene al eje del dipolo, con el origen en el centro del mismo. Para un punto localizado a una distancia r mucho mayor que la longitud del dipolo, mostrar que las líneas de campo satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2}. \tag{1.22}$$

Encontrar las curvas equipotenciales.

Problema 10. Ecuación de Riccati. Las ecuaciones de primer orden cuadáticas en la función $y(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x), \tag{1.23}$$

reciben el nombre de *ecuaciones de Riccati.* Los casos particulares $a(x) = 0$ y $c(x) = 0$ constituyen respectivamente ecuaciones lineales y ecuaciones de Bernoulli. No existe un método general para resolver la ecuación de Riccati, pero si se conoce una solución particular, entonces es posible encontrar la solución general reduciéndola a una ecuación de Bernoulli.

a) Muestre que si se conoce la solución particular $y_1(x)$, el reemplazo $y(x) = y_1(x) + u(x)$ arroja para $u(x)$ la ecuación de Bernoulli

$$u'(x) = [2a(x)y_1(x) + b(x)]u(x) + a(x)u^2(x). \tag{1.24}$$

b) Utilice lo anterior y la solución particular $y_1(x) = x$ para encontrar la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - xy + 1. \tag{1.25}$$

Problema 11. Las ecuaciones equidimensionales lineales reciben el nombre de *ecuaciones de Cauchy-Euler* o simplemente de Euler. En el caso de segundo orden tienen la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0. \tag{1.26}$$

a) Muestre que una tal ecuación puede resolverse en forma cerrada: o bien con la sustitución $x = e^t$ (que en el caso lineal transforma la equidimensional en una ecuación de coeficientes constantes) o bien proponiendo la solución de prueba $y = x^m$.

b) Encuentre la solución general de

$$3x^2y'' + 11xy' - 3y = 25. \tag{1.27}$$