

El efecto Compton

Compton (1923)

Sea un haz de rayos X de longitud de onda λ_0 que es dispersado en un ángulo θ , al pasar a través de una lámina dispersora. Entonces la radiación dispersada contiene una componente de longitud de onda λ_1 , bien definida, que es mayor que la longitud de onda λ_0 de los rayos incidentes.

Importancia: Este fenómeno ha proporcionado pruebas convincentes de la existencia de los cuantos. Su explicación se basa en la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética.

Experimento de Compton

En la Fig. 1 se observa el experimento que realizó Compton. R es la lámina del material dispersor (en el caso de las experiencias de Compton se utilizó carbono (C) en el estado de grafito). Los rayos que salen de un tubo de RX con blanco de molibdeno (Mo) son dispersados en un ángulo θ por la lámina dispersora R, y luego de ser colimados (como un fino haz) se los analiza mediante un espectrómetro de Bragg, midiendo su intensidad con una cámara de ionización.

De esta manera para cada ángulo de dispersión (θ) en la muestra R se mide la intensidad de los RX en función de la longitud de onda λ (barrida por el espectrómetro de Bragg).

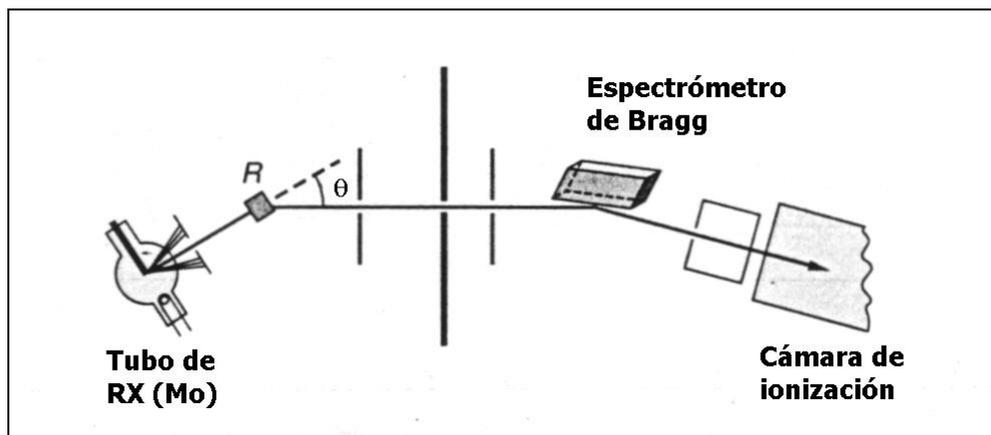


Fig. 1. Esquema del dispositivo utilizado por Compton

La longitud de onda de los RX incidentes sobre R era $\lambda_0 = 0.708 \times 10^{-10}$ m. Entonces se observaba que **la longitud λ_1 dependía del ángulo de dispersión θ , pero era independiente del material dispersor.**

En la Fig. 2 se observa el espectro de longitudes de onda de la radiación dispersa para ángulos de 0, 45, 90 y 135 grados. La abscisa es la longitud de onda y la ordenada es la intensidad por unidad de longitud de onda. Se observa que, para todos los ángulos, la radiación dispersada contiene una componente cuya longitud de onda es igual a la de la radiación incidente λ_0 y que para ángulos mayores que 0 grados aparece otra longitud de onda λ_1 . Se ve también que cuando el ángulo de dispersión aumenta, también lo hace la separación entre la componente cuya longitud de onda es λ_1 respecto de aquella con longitud de onda λ_0 .

¹ Respecto de la dirección de incidencia.

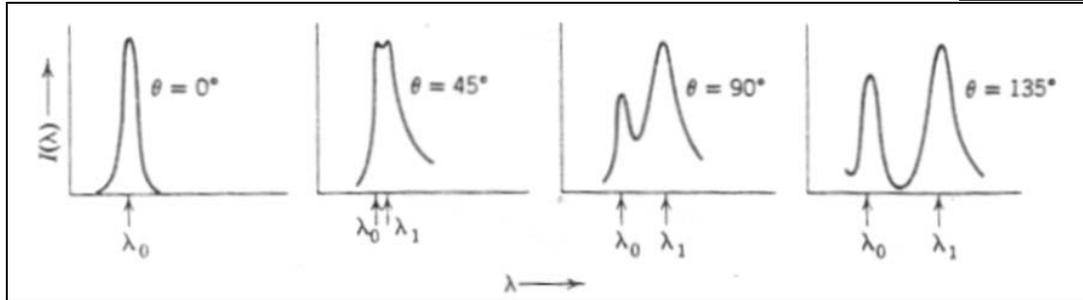


Fig.2. Espectro obtenido para distintos ángulos de dispersión para carbón (grafito)

Modelo de Compton para explicar la aparición de rayos X de longitud de onda mayor

Por lo que hemos visto los rayos X dispersados tienen dos componentes, una de igual longitud de onda que los rayos incidentes y otra de longitud de onda ligeramente mayor (correspondiente a una energía menor).

- La primera componente (la parte correspondiente a la λ_0) estaba explicada por argumentos del electromagnetismo clásico y no fue un problema para los científicos que la estudiaban.
- La segunda (correspondiente a la λ_1) no tenía explicación hasta que Compton desarrolló una teoría simple pero efectiva para estudiarla.

Compton consideró que la radiación incidente estaba formada por fotones que actúan como proyectiles, y propuso explicar la radiación saliente analizando la colisión entre: los cuantos incidentes de RX y los electrones del material dispersor (Ver Fig. 3). En el modelo un cuanto colisiona con un electrón.

Entonces se calculará la longitud de onda λ_1 de los rayos X dispersados, aplicando (al problema del choque del cuanto y el electrón²) la conservación de:

- i) el impulso lineal total p
- ii) la energía total relativista E .

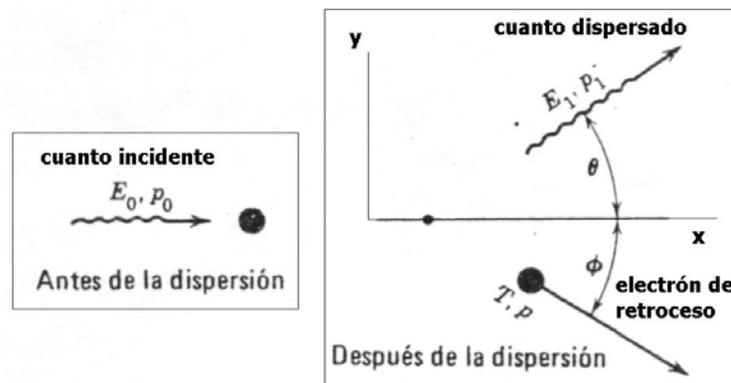


Fig. 3. Modelo propuesto por Compton para el choque de un cuanto de RX con un electrón del material.

Inicialmente el cuanto con energía E_0 (o longitud de onda λ_0) e impulso p_0 se propaga con velocidad c y choca contra un electrón de masa en reposo m_0 (que puede considerarse inicialmente quieto para el análisis del choque).

En el choque el cuanto le entrega suficiente energía (cinética) al electrón como para que sea necesario analizarlo de manera relativista.

Luego del choque el cuanto dispersado en un ángulo θ saldrá con una energía E_1 (o longitud de onda λ_1) e impulso p_1 , y el electrón dispersado (llamado también “de retroceso”) sale con un ángulo ϕ y con energía cinética T e impulso p .

² En este caso se utiliza la dualidad onda partícula de la radiación electromagnética, buscando la longitud de la onda de los RX a partir de su comportamiento como partículas.

Repaso: Veamos como son la energía total relativista y el impulso (relativista) para los cuantos y para los electrones.

Cuantos de RX: no tienen masa en reposo y se mueven con velocidad c

La energía total relativista será $E = hf$ (Ec.1)

Suponemos que su energía será totalmente cinética (no hay masa en reposo).

El impulso puede calcularse a partir de la energía con la ecuación que relaciona E y p :

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (Ec.2)$$

Como m_0 es cero entonces para el cuanto será:

$$E = pc \quad (Ec.3)$$

El impulso del cuanto será: $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda}$ (Ec.4)

donde λ es la longitud de onda asociada al cuanto.

El electrón: tiene masa en reposo m_0 y energía cinética T .

La energía relativista del electrón será: $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T + m_0 c^2$ (Ec.5)

$$E^2 = (T + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (Ec.6)$$

El impulso relativista del electrón será: $p = \sqrt{\frac{T^2}{c^2} + 2Tm_0}$ (Ec.7)

i) Analizando la conservación del impulso lineal p:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad (Ec.8)$$

En \hat{x} : $p_0 = p_1 \cos\theta + p \cos\phi$ (Ec.9)

En \hat{y} : $0 = p_1 \sin\theta - p \sin\phi$ (Ec.10)

Reordeno las ecuaciones y las elevo al cuadrado

De (Ec.9) $(p_0 - p_1 \cos\theta)^2 = (p \cos\phi)^2$ (Ec.11)

De (Ec.10) $(p_1 \sin\theta)^2 = (p \sin\phi)^2$ (Ec.12)

Sumando las ecuaciones (Ec.11) y (Ec.12)

$$p_0^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta + p_1^2 \cos^2\theta + p_1^2 \sin^2\theta = p^2 \cos^2\phi + p^2 \sin^2\phi \quad (Ec.13)$$

Entonces $p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos\theta = p^2$ (Ec.14)

ii) Analizando la conservación de la Energía total relativista (E)

$$E_i = E_f \quad (Ec.15)$$

$$E_0 + m_0 c^2 = E_1 + T + m_0 c^2 \quad (Ec.16)$$

$$E_0 - E_1 = T \quad (Ec.17)$$

$$cp_0 - cp_1 = c(p_0 - p_1) = T \quad (Ec.18)$$

Para el electrón:

$$E^2 = (T + m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (Ec.19)$$

$$T^2 + 2Tm_0 c^2 + (m_0 c^2)^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 \quad (Ec.20)$$

$$\frac{T^2 + 2Tm_0c^2}{c^2} = \frac{T^2}{c^2} + 2Tm_0 = p^2 \quad (Ec.21)$$

$$\frac{T^2}{c^2} + 2Tm_0 = p^2 \quad (Ec.22)$$

$$\boxed{\frac{c^2(p_0 - p_1)^2}{c^2} + 2c(p_0 - p_1)m_0 = p^2} \quad (Ec.23)$$

Iguando los p^2 calculados en i) y ii) (Ec.14 y Ec.23)

$$(p_0 - p_1)^2 + 2m_0c(p_0 - p_1) = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos \theta = p^2 \quad (Ec.24)$$

$$2m_0c(p_0 - p_1) = 2p_0p_1 - 2p_0p_1 \cos \theta \quad (Ec.25)$$

$$m_0c(p_0 - p_1) = p_0p_1(1 - \cos \theta) \quad (Ec.26)$$

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) = \frac{1}{m_0c}(1 - \cos \theta) \quad (Ec.27)$$

Multiplicamos a ambos lados por la constante de Planck (h)

$$\left(\frac{h}{p_1} - \frac{h}{p_0} \right) = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \theta) \quad (Ec.28)$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos \theta) \quad (Ec.29)$$

Entonces $\boxed{\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_C(1 - \cos \theta)}$ **Ecuación de Compton** (Ec.30)

Donde $\lambda_C \equiv \frac{h}{m_0c} = 0,02426 \times 10^{-10} m$ es la **longitud de onda de Compton** (Ec.31)

La ecuación de Compton predice el aumento de la longitud de onda de la radiación electromagnética dispersada, dependiendo solamente de una constante universal y del ángulo de dispersión. Este aumento no depende de la longitud de onda de la radiación incidente inicial.

En 1923 Bothe y Wilson observaron experimentalmente los electrones de retroceso.

En 1925 Bothe y Geiger mostraron que en la dispersión de un cuanto por un electrón el cuanto dispersado y el electrón retrodispersado aparecían simultáneamente.

En 1927 Bless midió la energía de los electrones de retroceso y verificó que concordaba con la teoría.

Absorción de RX

Supongamos una fuente de RX que emite radiación monocromática³. Si se intercepta el haz por medio de una lámina de un material absorbente se observará que la intensidad⁴ de los RX será menor.

Sea I la intensidad de los RX incidentes, esta disminuye en una cantidad $-dI$ al atravesar un material de espesor dx . La variación relativa de la intensidad de los RX atravesando la lámina será: $-dI/I$. Experimentalmente se pudo inferir⁵ que:

$$\frac{-dI}{I} = \mu dx \quad (\text{Ec. 32})$$

Donde μ es una constante llamada coeficiente lineal de absorción.

Integrando la Ec.32 obtenemos la ecuación de la intensidad en función del espesor de la lámina atenuadora:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (\text{Ec. 33})$$

$$\frac{I(x)}{I_0} = e^{-\mu x} \quad (\text{Ec. 34})$$

Si RX de intensidad I_0 inciden sobre una lámina que tiene un espesor x la intensidad saliente de la lámina $I(x)$ será función de I_0 que dependerá del coeficiente lineal de absorción μ . (Ver Fig. 4)

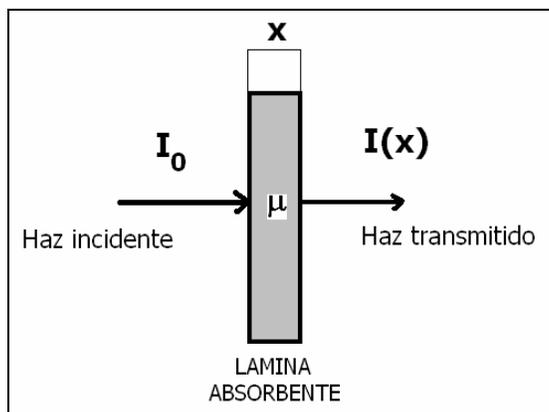


Fig. 4. RX de intensidad I_0 que inciden sobre una lámina de espesor x .

El coeficiente de absorción lineal μ depende de la naturaleza del absorbente. Los valores de μ están determinados experimentalmente para cada absorbente en particular. El μ depende también de la longitud de onda de la radiación incidente. La Ec. 32 vale solo para rayos X monocromáticos. Para un haz de distintas longitudes de onda la expresión sería una suma de exponenciales con distintos coeficientes de absorción.

Coefficiente de absorción específico (μ_e)

Se define como el cociente entre el coeficiente de absorción lineal μ y la densidad del material absorbente ρ :

$$\mu_e = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{Ec. 35})$$

³ En general las fuentes de RX generan radiación policromática, pero podemos obtener una fuente así por ejemplo utilizando un espectrómetro de Bragg para seleccionar una longitud de onda específica (diafragmando el resto).

⁴ Medida por ejemplo a partir de la corriente producida en la cámara de ionización.

⁵ También puede inferirse a partir de los modelos que representan la absorción que incluyen distintos factores causados por diferentes mecanismos.

Coefficiente atómico de absorción (μ_A)

Se define como el producto entre el coeficiente de absorción específico (μ_e) y el peso atómico (PA) dividido el número de Avogadro (N):

$$\mu_A = \frac{\mu_e PA}{N} \quad (\text{Ec. 36})$$

Ejemplo 1:

La intensidad de un haz de rayos X de dureza moderada se reduce a un 80% de su valor inicial al atravesar una lámina de un elemento de bajo peso atómico (Litio: PA=7) y de 0.40 cm de espesor. Densidad del litio 0,51 g/cm³.

- Calcular el coeficiente de absorción.
- ¿Cuál es el coeficiente de absorción específico?
- ¿Cuál es el coeficiente atómico de absorción?

a) Si la intensidad del haz se reduce a un 80% de su valor inicial, el cociente entre la radiación incidente y la transmitida será:

$$\frac{I(x)}{I_0} = 0,8$$

Por la Ec.34:

$$\frac{I(x)}{I_0} = 0,8 = e^{-\mu x}$$

$$0,8 = e^{-\mu x}$$

Aplicando logaritmo de ambos lados quedará:

$$\ln 0,8 = -\mu x$$

$$\mu = -\frac{\ln 0,8}{x}$$

Si el espesor de la lámina es $x = 0,40\text{cm}$ entonces el coeficiente de absorción lineal será:

$$\mu = -\frac{\ln 0,8}{0,4\text{cm}} = 0,557\text{cm}^{-1}$$

b) Calculamos el coeficiente de absorción específico si la densidad del litio 0,51 g/cm³

$$\mu_e = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,557\text{cm}^{-1}}{0,51\text{g/cm}^3} = 1,092 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$$

c) El coeficiente atómico de absorción será:

$$\mu_A = \frac{\mu_e \times PA}{N} = \frac{1,092\text{cm}^2/\text{g} \times 7}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ atomos}} = 1,28 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^2 / \text{atomos}$$