

Física General IV.

Problemas complementarios de Relatividad.

Año 2012.

El parcialito correspondiente a Relatividad será el lunes 10 de septiembre de 9:30 a 11:30, en el Aula Chica. Aquí encontrarán más ejercicios para practicar.

Problema 1. Una onda luminosa plana de frecuencia ν y paralela al plano yOz se propaga en la dirección del eje Ox , la amplitud de dicha onda es:

$$s(x, t) = S \sin \left(2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c} \right) \right).$$

Un observador en el sistema Σ' , que se mueve paralelo al eje Ox a una velocidad v , le atribuye a la onda la amplitud:

$$s(x', t') = S \sin \left(2\pi\nu' \left(t' - \frac{x'}{c} \right) \right).$$

- Calcule la frecuencia ν' para dicho observador.
- Deduzca la expresión de la variación relativa de la longitud de onda de la luz (monocromática), emitida por una estrella cuya velocidad radial respecto a la Tierra es v .

Problema 2. Se aceleran electrones con un potencial $V = 5,12 \times 10^5$ volts.

- Cuál será su velocidad, según la Mecánica Clásica (no relativista)?
- Cuál será su velocidad, según la Mecánica Relativista?
- Cuál es la masa de los electrones en movimiento?

Problema 3. Electrones con velocidad v son sometidos a la acción de un campo magnético B normal a v y describen un círculo de radio:

$$R = \frac{mv}{eB}$$

Calcule v cuando el campo magnético es $B = 2,865 \times 10^{-2}$ tesla y $R = 13,5$ cm. (Recuerde que la masa en reposo del electrón es $m_e = 9 \times 10^{-31}$ kg y su carga $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C).

Problema 4. Sean dos sistemas inerciales Σ y Σ' con velocidad relativa v , paralela al eje Ox (y $O'x'$), cuyos orígenes O y O' coinciden para $t = t' = 0$. Suponga que en

el instante $t = t' = 0$ se produce un destello en el origen (común a ambos sistemas). Un observador en Σ , ve un frente de onda esférico que se expande desde O a una velocidad c . Muestre que, si bien Σ' se mueve con una velocidad v con respecto a Σ , un observador en este sistema nota un frente de onda igual, expandiéndose desde O' .

Problema 5. Se mide un haz de partículas radiactivas en movimiento, en Laboratorio. Se encuentra que, en promedio, las partículas “viven” un tiempo de 20 ns; luego de ese tiempo las partículas cambian a una nueva forma. Cuando las mismas partículas están en reposo en el laboratorio, “viven” en promedio 75 ns. Cuán rápido es el haz?

Problema 6. Según un observador en Σ , un evento 1 tiene lugar en $x_1 = -\frac{L}{2}$ a un tiempo $t_1 = \frac{L}{2c}$. Otro evento 2 tiene lugar en $x_2 = \frac{L}{2}$ a un tiempo $t_2 = \frac{L}{2c}$, de manera que ambos eventos son simultáneos para dicho observador. Muestre que para otro observador en Σ' , que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad V con respecto al primer sistema, los dos eventos no son simultáneos.

- Ecuentre el $\Delta t'$.
- Determine la separación espacial entre ambos eventos $\Delta x'$.
- Representa $\Delta x'$ la longitud del objeto? Explique.

Problema 7. Un aro circular de radio a' está en reposo en el plano $x'y'$ de un sistema Σ' que se mueve a una velocidad V respecto a otro sistema Σ .

- Muestre que según las medidas hechas en Σ el aro tiene una forma elíptica, con su semieje mayor paralelo al eje y y de longitud $a = a'$, y su semieje menor de longitud $b = a'\sqrt{1 - (V^2/c^2)}$.
- La *excentricidad* e de una elipse está definida por $e = \sqrt{1 - (b^2/a^2)}$. Derive una expresión simple para la excentricidad de la elipse del inciso anterior.

Problema 8. Sean tres sistemas de referencia Σ , Σ' y Σ'' . Σ' se mueve con velocidad V respecto de Σ y Σ'' con velocidad V' respecto de Σ' . Ambas velocidades tienen la misma dirección y sentido. Escriba las ecuaciones de transformación que relacionan (x'', y'', z'', t'') con (x, y, z, t) .

Problema 9. Se observa un objeto acelerado desde dos sistemas Σ y Σ' . Los ejes x y x' son colineales con la trayectoria del objeto y Σ' tiene una velocidad V relativa a Σ paralela al eje x . Muestre que las aceleraciones medidas en ambos sistemas se relacionan por:

$$a' = a \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)^3}.$$

Con v la velocidad instantánea del objeto, según Σ .

Problema 10. Una dada transición en Potasio produce una luz de frecuencia $8,0 \times 10^{14}$ Hz. Cuando esta transición se produce en una galaxia distante, la frecuencia medida de la luz que llega a la Tierra es $5,0 \times 10^{14}$ Hz (un “corrimiento al rojo”). Determine el movimiento radial de la galaxia con respecto a la Tierra.

Problema 11. Las masas en reposo del protón, neutrón y deuterón son:

$$m_p = 1,67261 \times 10^{-27} \text{kg} \quad m_n = 1,67492 \times 10^{-27} \text{kg} \quad m_d = 3,34357 \times 10^{-27} \text{kg}.$$

El deuterón consiste en un protón y un neutrón. Cuánta energía deberá ser liberada en la formación de un deuterón a partir de un protón libre y un neutrón libre, inicialmente en reposo en el “infinito”?

Problema 12. El electrón y el protón tienen masas en reposo $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$ y $m_p = 1,67261 \times 10^{-27} \text{kg}$, respectivamente.

- Determine la masa y velocidad de un electrón con 100 KeV de energía cinética.
- Encuentre la velocidad de un protón cuya masa es dos veces su masa en reposo. Que energía se le deberá suministrar al protón para que alcance dicha velocidad?
- Un protón en el Laboratorio es sometido a una diferencia de potencial ΔV , la velocidad del protón a la salida es de $u = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$. Encuentre ΔV . Cuál es la energía total del protón?
- Cuánta energía se le deberá entregar a un electrón para acelerarlo a $0,95c$?

Problema 13. Un tanque rectangular está fijo en Σ' , cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas.

- Si el tanque se llena con un líquido de densidad ρ' , cuál será la densidad medida en Σ ?
- Muestre que los observadores en Σ y Σ' miden la misma variación relativa de la masa debido a evaporación.

Problema 14. En la relatividad especial se cumple que si un sistema es cerrado, se conserva el momento lineal (o cantidad de movimiento). De hecho, este principio es el que nos lleva a que la masa ya no sea constante.

- Derive la relación entre el momento y la energía total.
- Calcule el momento de un electrón de 1 MeV.

Problema 15. En mecánica newtoniana se cumple que $dE/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$, donde E es la energía total de una partícula que se mueve con velocidad \vec{v} y sobre la que actúa una fuerza neta \vec{F} . Muestre que esta relación también es válida en mecánica relativista.

Problema 16. Muestre que las componentes de la velocidad de una partícula de energía E y momento \vec{p} están dadas por:

$$v_x = \frac{\partial E}{\partial p_x} \quad v_y = \frac{\partial E}{\partial p_y} \quad v_z = \frac{\partial E}{\partial p_z}.$$

Estas relaciones son válidas tanto en la mecánica newtoniana como la relativista.

Problema 17. Un haz de protones pasa por un dado punto con una velocidad de $5,00 \times 10^7 \text{ m/s}$ y lleva una carga por unidad de longitud de $2,00 \times 10^{-12} \text{ C/m}$, según un observador en el Laboratorio. Un protón aislado se mueve con la misma velocidad, paralelo al haz a una distancia de 10 nm del mismo.

- a) Calcule las fuerzas eléctrica y magnética en el protón según un observador en el Laboratorio.
- b) Calcule las fuerzas eléctrica y magnética en el protón según un observador en reposo con el protón.
- c) Calcule las fuerzas eléctrica y magnética en el protón según un observador que se mueve con una velocidad de $1,00 \times 10^8$ m/s en la dirección del haz.

Problema 18. Se diseña un gran ciclotrón para acelerar deuterones a una energía cinética de 450 MeV. Esto significa que su velocidad será una fracción significativa de c . Además, su masa será mucho mayor que su masa en reposo. Si el campo magnético es constante en todos lados, se requiere que la frecuencia de la diferencia de potencial oscilatorio aplicado entre las “Des” debe decrecer durante la aceleración de un grupo de deuterones. Cuál es la relación entre la frecuencia final e inicial?

Problema 19. Se crea en la atmósfera terrestre, un mesón π^+ , cuya energía en reposo es de 140 MeV, a 100 km sobre el nivel del mar. El mesón π^+ tiene una energía total de $1,5 \times 10^5$ MeV y se mueve verticalmente hacia abajo. Si se desintegra $2,0 \times 10^{-8}$ s luego de su creación, según su propio sistema de referencia, a qué altura sobre el nivel del mar ocurre la desintegración?

Problema 20. Un mesón K^0 decae en reposo a dos mesones π^0 . Si la energía en reposo del K^0 es de 498 MeV y la del π^0 es de 135 MeV, cuál es la energía cinética de cada π^0 ?

Problema 21. Un núcleo de ^{235}U , cuando se fisiona, libera 200 MeV de energía. Qué porcentaje de la energía total es liberada en este proceso?

Problema 22. Calcule la masa efectiva de un fotón de longitud de onda de 5000 Å.

Problema 23. Un mesón K^0 decae, en reposo, a un mesón π^+ y un mesón π^- , cada uno con una velocidad de $0,827c$. Cuando un mesón K^0 que se mueve a una velocidad de $0,6c$ decae, cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar uno de los mesones π ?