Física General IV. Trabajo Práctico 6

Año 2012.

1 Ecuación de Schrödinger.

1.1 Propiedades.

Problema 1. Compruebe que, al ser la ecuación de Schrödinger una ecuación lineal, sus soluciones satisfacen el principio de superposición, es decir si $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación, entonces $\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$, también lo es, con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Problema 2. Considere una partícula de masa m sujeta a un potencial unidimensional $V(x)$ real, pruebe que:

a)

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

b)

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{dV}{dx} \right\rangle$$

donde $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ son los valores medios de la posición y cantidad de movimiento de la partícula respectivamente, y $\langle -\frac{dV}{dx}\rangle$ es el valor medio de la fuerza que actúa sobre la partícula. Este resultado, que puede generalizarse a otro tipo de operadores, se llama *Teorema de Ehrenfest*.
Ayuda: recuerde que el valor de expectación para cualquier función $f(x,t)$ está dado por:

$$\langle f(x,t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,t)^* f(x,t) \Psi(x,t) dx$$

Problema 3. Considere una partícula descripta por una función de onda $\Psi(\mathbf{r},t)$.

a) Calcule la derivada temporal $\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}$, donde $\rho(\mathbf{r},t)$ es la densidad de probabilidad.

b) Muestre que se cumple la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = 0,$$

donde $\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{m}\Re\left[\Psi(\mathbf{r},t)^*\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\Psi(\mathbf{r},t)\right)\right]$ es la corriente de probabilidad.

1.2 Pozos de potencial (independientes del tiempo).

Problema 4. Considere una partícula de masa m bajo la acción de un potencial unidimensional $V(x)$ real. Suponga que en una región A, $V(x) = V$ es constante. En esta región, halle los estados estacionarios de la partícula cuando,

a) $E > V$,

b) $E < V$,

c) $E = V$,
donde E es la energía de la partícula.

Problema 5. Considere una partícula de masa m confinada en un pozo de potencial unidimensional infinito de ancho a:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \\ \infty & x < -a/2 \;\; o \;\; x > a/2 \end{cases}$$

Encuentre los autoestados del Hamiltoniano (es decir, los estados estacionarios) y las correspondientes autoenergías.

Problema 6. La misma partícula del problema anterior, a tiempo $t = 0$, está en un estado descripto por una combinación lineal de los dos estados estacionarios más bajos:

$$\Psi(x,0) = \alpha\Psi_1(x,0) + \beta\Psi_2(x,0) \qquad (|\, \alpha \,|^2 + |\, \beta \,|^2 = 1)$$

a) Calcule la función de onda $\Psi(x,t)$ y los valores medios de los operadores x y p_x como función del tiempo.

b) Verificar el teorema de Ehrenfest $m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \langle p_x\rangle$.

1.3 Potencial escalón.

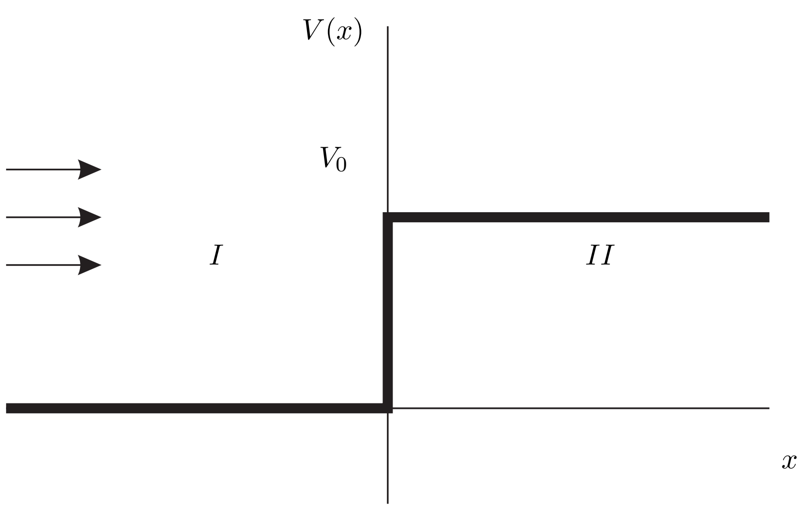

Figure 1: Potencial Escalón.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad \text{Región I} \\ V_0 & x > 0 \quad \text{Región II} \end{cases}$$

donde V_0 es constante.

Problema 7. Considere un haz de partículas de masa m con energía $E > V_0$ que se mueven desde $x = -\infty$ a la derecha.

a) Encuentre las soluciones estacionarias para cada una de las regiones.

b) Exprese el hecho de que no hay corriente de partículas que vuelva de $x = \infty$ a la izquierda.

c) Use las condiciones de contorno entre las regiones para expresar las amplitudes reflejadas y transmitidas en términos de la amplitud incidente. Note que, como el potencial está acotado, se puede ver que la derivada de la función de onda es continua para todo x.

Problema 8. Para el caso del problema anterior:

a) Calcule la corriente de probabilidad en las regiones I y II e interprete cada término.

b) Encuentre los coeficientes de reflexión y transmisión.

1.4 Barrera de potencial.

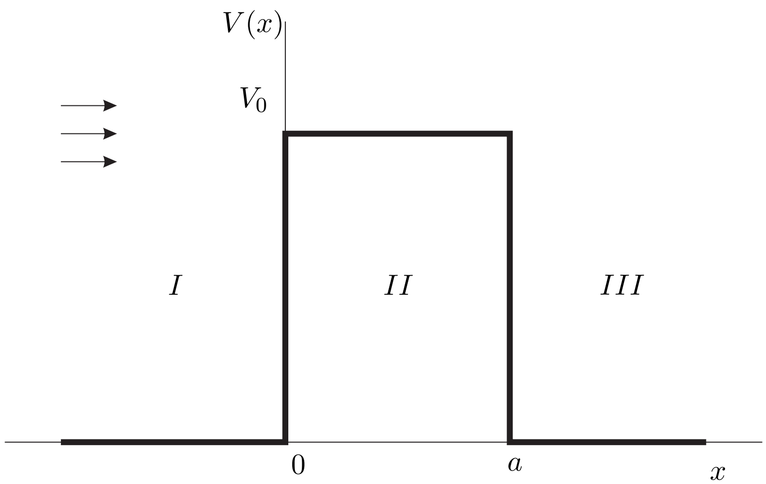

Figure 2: Barrera de Potencial.

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x < 0 \;\; o \;\; x > a \end{cases}$$

donde V_0 es constante.

Problema 9. Considere una barrera de potencial cuadrada.

a) Asuma que las partículas incidentes con $E > V_0$ vienen desde $x = -\infty$. Encuentre los estados estacionarios. Aplique las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = a$.

b) Encuentre los coeficientes de reflexión y transmisión. Grafique cualitativamente el coeficiente de transmisión como función del ancho de la barrera a y discuta los resultados.

Problema 10. (Efecto Túnel). Considere nuevamente una barrera de potencial cuadrada.

a) Encuente los estados estacionarios que describen partículas incidentes con $E < V_0$.

b) Calcule el coeficiente de transmisión y discuta los resultados.