

Física General IV. Trabajo Práctico 3

Año 2012.

1 Radiación de Cuerpo Negro.

Problema 1. Ley de equipartición de la energía

Encuentre el valor (clásico) medio de la energía $\langle \varepsilon \rangle$ de un objeto que forma parte de un sistema cuya probabilidad $P(\varepsilon)d\varepsilon$ de encontrar uno de estos objetos, con energía ε , en el intervalo $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ está dada por la distribución (clásica) de Boltzman:

$$P(\varepsilon) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)}{kT}$$

Problema 2. Derive la expresión de Planck para el valor medio de la energía $\langle E \rangle$ del cuerpo negro.

Ayuda: discretice la integral que utilizó para calcular el valor medio de la energía del problema anterior, reemplazando $\int_0^\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty$ y $\varepsilon = E_n = n\Delta E$.

Problema 3. A partir de la ley de radiación de Planck, encuentre los límites (asintóticos) para frecuencias muy altas (*Ley de radiación de Wien*) y muy bajas (*Ley de radiación de Rayleigh-Jeans*).

a) demuestre que la ley de radiación de Rayleigh-Jeans no es consistente con la ley de desplazamiento de Wien.

b) Encuentre la ley de desplazamiento de Wien, a partir de la expresión de la densidad de energía del espectro del cuerpo negro.

Ayuda: use como variable $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ y muestre que la condición de máximo conduce a una ecuación trascendente $\exp(-x) + \frac{x}{5} = 1$, que puede ser resuelta por algún método aproximado (por ej., numéricamente con el Mathematica, o por iteraciones sucesivas), cuya solución es $x = 4,965$.

Problema 4. Ley de Stefan

Utilizando la relación $R_T(\nu)d\nu = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\rho_T(\nu)d\nu$ entre la radiancia espectral y la densidad de energía junto con la ley de radiación de Planck, encuentre la ley de Stefan.

Ayuda: $\int_0^\infty \frac{q^3 dq}{\exp(q)-1} = \frac{\pi^4}{15}$

Problema 5.

a) Suponga que la superficie de las estrellas se comporta como un cuerpo negro. Use la ley de Wien para calcular la temperatura del Sol y la de la estrella Polar (α de la constelación Ursa Minoris).

Dato: Las longitudes de onda máximas de la radiación medidas en cada caso son para el Sol $5100\text{\AA}$ y para la estrella Polar $2700\text{\AA}$.

- b) Calcule ahora las longitudes de onda máximas de la radiación de las estrellas Antares (α de la constelación de Escorpio) y Spica (α de la constelación de Virgo), sabiendo que las temperaturas correspondientes son $3400^\circ K$ y $23000^\circ K$.
- c) Se dice que Spica es una estrella azul, Antares roja y el Sol una estrella amarilla, puede decir por que? Que color será la estrella Polar?
- d) use la ley de Stefan para determinar la potencia irradiada (la radiancia R_T por cm^2 de superficie estelar), en los cuatro casos.

Problema 6. Suponiendo que la temperatura en la superficie del Sol es $5700^\circ K$,

- a) utilice la Ley de Stefan para determinar la masa en reposo que se pierde por segundo en la radiación del Sol.

Tome el diámetro del Sol como $1.4 \times 10^9 m$.

- b) Qué fracción de la masa en reposo del Sol, se pierde cada año en radiación electromagnética?

Suponga que la masa en reposo del Sol es $2.0 \times 10^{30} kg$.

- c) Repita los cálculos del inciso anterior para el caso de Spica ($m \sim 10m_{\text{Sol}}$) y Antares ($m \sim 17m_{\text{Sol}}$).

Problema 7. Usando la ley de Wien,

- a) determine el pico de longitud de onda radiado por el cuerpo humano, tomando su temperatura como $37^\circ C$. A qué zona del espectro electromagnético corresponde?
- b) Repetir el cálculo del inciso anterior, pero para el caso del fondo cósmico de microondas, que corresponde a una distribución de radiación de cuerpo negro a una temperatura $T = 2,725^\circ K$.

Problema 8. La radiancia R_T del cuerpo negro a $T = 1000^\circ K$ tiene un máximo para $\lambda = 2,885\mu m$. Llamemos E a la energía total que irradia por unidad de tiempo a esa temperatura.

- a) A qué temperatura T' irradiará el doble de energía por unidad de tiempo?
- b) Cuál es la longitud de onda máxima de su poder emisor a la temperatura constante T' ?
- c) Se llama **cuerpo gris** a aquel cuerpo real que no satisface exactamente la ley de Stefan-Boltzmann, aunque la relación entre radiancia y temperatura sigue siendo, en buena aproximación, de potencia cuarta,

$$R_T = \epsilon \cdot \sigma T^4.$$

*El parámetro ϵ se llama **emisividad** y coincide con el poder absorbente (de radiación) de los cuerpos reales.*

Cuánto vale ϵ si el cuerpo gris absorbe la cantidad E de energía por unidad de tiempo, pero a la temperatura T' ?