Física General IV. Trabajo Práctico 5

Año 2010.

1 Postulados y Modelo de Bohr.

Problema 1. En la clase teórica, al calcular la constante de Rydberg, se utilizaron fórmulas válidas para un electrón en el potencial coulombiano que ejerce un protón fijo en el origen de coordenadas ($m_p \gg m_e$) analizándose el problema como el de una partícula en un campo central.
Para tener en cuenta clásicamente la dinámica del protón, hay que separar el movimiento del centro de masa del sistema del movimiento relativo. La única modificación de hacer lo anterior es la de reemplazar la masa del electrón por la masa reducida $\mu = m_e m_p/(m_e+m_p)$ y tomar a r en las fórmulas utilizadas en clase como $r = |\vec{r}_p - \vec{r}_e|$.

a) Modifique el postulado de Bohr para la cuantificación del momento angular de manera consistente con lo anterior y recalcule la constante de Rydberg.

b) Compare el cambio de la constante de Rydberg para el Hidrógeno (1 protón + 1 electrón) con la del Deuterio (1 protón + 1 neutrón + 1 electrón).

Problema 2. Determine la constante de Rydberg para el positronio, un sistema cuasi-estable formado por un electrón y su antipartícula, el positrón que se mueven alrededor de su centro de masas, el cual se encuentra equidistante a ambos.

a) si este sistema fuera un átomo normal, cómo sería su espectro de emisión comparado con el átomo de Hidrogéno?

b) cuál sería el radio de la órbita para el estado base del positronio?

Problema 3. Si la vida media de un electrón en el primer estado excitado del Hidrógeno es de $\tau = 10^{-8}$ s, cuántas revoluciones ejecuta de acuerdo al modelo de Bohr antes de pasar al estado fundamental?

2 El Modelo de Sommerfeld.

Problema 4. Considere un "pozo de potencial infinito" unidimensional, es decir un campo de fuerzas tal que la energía potencial es

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, \;\; x > a \\ 0 & 0 < x < a \end{cases}$$

Una partícula de masa m sólo puede moverse dentro de este pozo, donde la fuerza que actúa sobre ella es nula. Aplique la regla de Wilson-Sommerfeld para calcular la estructura de niveles de energía del sistema.

Problema 5. A partir del resultado obtenido en el problema anterior, calcule la mínima energía cinética de un neutrón en el núcleo de diámetro $d = 10^{-14}m$.
Ayuda: Piense al neutrón como una partícula "atrapada" en un pozo de potencial (el del núcleo) de longitud $a = d$.

3 Ondas de De Broglie.

Problema 6.

a) Determine el potencial necesario para acelerar un electrón de modo de que tenga una longitud de onda de de Broglie de $1\mathring{A}$. éste es el espaciado interatómico de los átomos en un cristal.

b) calcule la longitud de onda de de Broglie para un neutrón ("térmico") con $0.05eV$.

Problema 7. Si se quiere observar un objeto cuyo tamaño es de $2.5\mathring{A}$, cuál debe ser la energía mínima de los fotones utilizados para la observación?.

Problema 8. En uno de sus experimentos, Davisson y Germer usaron electrones incidiendo normalmente sobre la superficie de un cristal de Níquel, paralela a uno de los planos principales de Bragg (ver Figura 1). Ellos observaron la existencia de interferencia constructiva para un ángulo de $50°$ normal a la superficie cuando la energía cinética de los electrones es de $54eV$.

a) Suponiendo que la difracción ocurre a primer orden, encuentre la longitud de onda asociada con el haz electrónico a partir de la diferencia de camino entre haces dispersados (reflexión de Bragg).

b) Repita el cálculo de λ utilizando la expresión de de Broglie. Compare los resultados.

4 Átomo de Bohr, espectro de energía.

Problema 9. Un átomo de Hidrógeno es excitado desde un estado con $n = 1$ a un estado con $n = 4$.

a) Calcular la energía que debe ser absorbida por el átomo.

b) Calcular y mostrar en un diagrama de niveles de energía, las diferentes energías de fotón que pueden ser emitidos si el átomo vuelve a su estado $n = 1$.

c) Calcular la velocidad de retroceso del átomo de Hidrógeno, que se supone inicialmente en reposo, si se ocurre una transición del estado con $n = 4$ al estado con $n = 1$ en un único salto cuántico.

Problema 10. Cúal es la energía, momento y longitud de onda de un fotón emitido por un átomo de Litio dos veces ionizado al producirse una transición directa desde

un estado excitado con $n = 10$ a su estado base?
Encontrar la velocidad de retroceso del átomo de Litio en este proceso.

Problema 11. Se bombardea con electrones de energía $12.2eV$ átomos de Hidrógeno contenidos en un tubo de gas. Determine las longitudes de onda de las líneas permitidas emitidas por el Hidrógeno

5 Principio de Incerteza de Heisenberg.

Problema 12. A partir de la relación $\Delta p \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$, muestre que para el caso de una partícula moviéndose en un círculo, esta relación puede reescribirse como $\Delta L \Delta \theta \geq \frac{h}{4\pi}$, donde ΔL es la incerteza en el momento angular y $\Delta \theta$ es la incerteza enelángulo.

Problema 13. A partir de las propiedades generales de cualquier proceso ondulatorio $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{4\pi}$ y $\Delta \nu \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$ obtener las relaciones de incerteza de Heisenberg.

Problema 14. Los estados excitados de los átomos poseen vidas medias típicas de $10^{-8}s$. Es decir, durante ese tiempo emiten un fotón y sales de su estado de excitación.

a) Cuál es la incertidumbre en la frecuencia del fotón?

b) Si la mayoría de los fotones corresponden a la línea espectral visible $\lambda = 5890\mathring{A}$, cuánto vale el cociente $\frac{\Delta \nu}{\nu}$?

c) Calcular la incertidumbre en la energía del estado excitado del átomo.

6 Dualidad ondas y partículas.

Problema 15. Considere un paquete de ondas en una dimensión, definido por

$$A(x,t) = \int \hat{\mathcal{A}}(k - k_0) \frac{e^{i(kx - \omega(k)t)}}{(2\pi)^{1/2}} dk,$$

donde $\hat{\mathcal{A}}(k - k_0)$ es una función con un pico en $k = k_0$.

a) Muestre que el paquete de ondas puede ser escrito en la forma

$$A(x,t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \mathcal{A}(x - v_g t) + \cdots,$$

donde

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

es la velocidad de grupo.
Sugerencia: considere la expansión de $\omega(k)$ alrededor de k_0.

b) Muestre que para que el paquete de ondas mantenga su forma (que estaba dada por $\mathcal{A}(x)$), es necesario que

$$v_{\text{grupo}} = v_{\text{fase}}$$

Aquí v_{fase} es la velocidad de fase (que en clase llamamos velocidad de onda, $v_{\text{fase}} = w \equiv \omega/k$).

c) Como consecuencia de la condición anterior muestre que para una onda luminosa en el vacío vale $\omega = kc$ y muestre que la ecuación de ondas que satisface es,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

d) Suponga que en lugar de la relación del caso anterior anterior, se tiene

$$\omega(k) = bk^2 \ ,$$

con b cierta constante. Coinciden las velocidades de grupo y de fase? Demuestre que no cumple con la ecuación de onda.

Problema 16. Considere un experimento de doble rendija y calcule la distancia entre dos máximos de interferencia consecutivos para el caso de enviar sobre las rendijas:

a) Electrones de impulso $p_e = 4 \times 10^{-24}$ kg m/s, con rendijas separadas por una distancia $a = 3 \times 10^{-6}$ m y la pantalla a $D = 0.5$ m.

b) Pelotas de 66 g y velocidad de 5 m/s, con una distancia entre “rendijas” de 0.6 m sobre una pared a 12 m.

Problema 17. Sea una partícula libre de masa m moviéndose en una dimensión con velocidad constante v_x. Ligando impulso con energía y velocidad con tiempo, deduzca a partir del principio de incerteza para el par (p_x, x) una desigualdad para el par (E, t) con E la energía y t el tiempo.
Discuta la relación de incerteza obtenida y su interpretación diferente que la de posición-impulso.

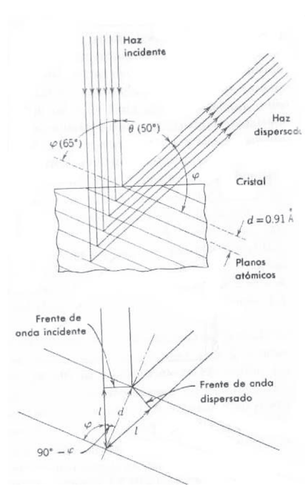

Figura 1: Problema 8.