Física General IV - Curso 2008

Práctica 5: Ecuación de Schrödinger *

22 de septiembre de 2008

Problema 1. Verificar que la ecuación de Schrödinger es lineal en la función de onda $\Psi(x,t)$, es decir que si $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación para un dado potencial $V(x,t)$, también lo será una combinación lineal de ambas funciones de la forma $\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t)$, con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Problema 2. Sea una partícula de masa m que puede moverse libremente en una caja unidimensional a lo largo del eje x, pero cuyo movimiento está acotado al intervalo $[-a/2, a/2]$. Se supone que las paredes son completamente impenetrables. Demostrar que la función de onda que describe el movimiento de esta partícula está dada por:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\, cos(\frac{n\pi x}{a})\; e^{-iE_n t/\hbar} & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & x \leq -a/2 \;\; o \;\; x \geq a/2 \end{cases} \tag{1}$$

con $n = 1, 3, 5, ..$, donde A es una constante arbitraria y E_n es la energía total de la partícula.

Hallar el valor de A a partir de la normalización adecuada de la Densidad de Probabilidad. Determinar el valor de E_n.

Problema 3. A partir de la función de onda para una partícula en una caja unidimensional, dada en el problema anterior, **a)** evaluar los valores de expectación de x, p, x^2 y p^2 para la partícula asociada con la función de onda.
b) Teniendo en cuenta que la incerteza para una magnitud g es $\Delta g = \sqrt{\langle (g - \langle g \rangle)^2 \rangle}$, verificar que se cumple la relación de incertidumbre de Heisenberg: $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

Recordar que el valor de expectación para cualquier función $f(x,t)$ está dado por:

$$\langle f(x,t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,t)^* f(x,t) \Psi(x,t) dx \tag{2}$$

Problema 4. Considere una partícula en un estado tal que una medida de su energía total pudiera conducir a dos posibles resultados (E_1 o E_2), por ejemplo

*Las prácticas están disponibles en la página: www.fisica.unlp.edu.ar/~wahlberg/FG4/

un electrón que está a punto de realizar una transición desde un estado excitado al estado fundamental. La función de onda que describe a dicha partícula está dada por:

$$\Psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + c_2\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar} \tag{3}$$

Demostrar que la función densidad de probabilidad es una función oscilatoria en el tiempo y calcular la frecuencia de las oscilaciones.

Problema 5. Considere una partícula de masa m que incide desde la izquierda ($x < 0$) sobre un **potencial del tipo escalón** de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

donde V_0 es constante.
a) Encuentre la función de onda ($\psi(x)$), solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso donde la energía de la partícula es $E < V_0$.
b) Teniendo en cuenta que la función de onda es $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$, halle la densidad de probabilidad $\Psi(x,t)^*\Psi(x,t)$ para la región $x > 0$. Interprete el resultado obtenido.
c) Estimar la distancia de penetración de una partícula de polvo pequeña de masa $m = 4 \times 10^{-14}kg$ que se mueve con velocidad $v = 10^{-2}m/s$ desde la izquierda y hacia un potencial escalón como el de la ecuación (4). Suponga que en el momento del "impacto" la energía cinética de la partícula es igual a la mitad de la altura V_0 del escalón.

Problema 6. a) Resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el caso de una partícula que se mueve desde $x < 0$ e incide sobre un potencial escalón como el del problema anterior pero donde la energía de la partícula es $E > V_0$.
b) Hallar los coeficientes de transmisión y reflexión en este caso.

Problema 7. Una partícula de masa m se mueve en el interior de un pozo de potencial de ancho $2L$, de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{-\hbar^2 x^2}{mL^2(L^2-x^2)} & -L < x < L \\ \infty & x < -L \;\; o \;\; x > L \end{cases} \tag{5}$$

La partícula se encuentra en un estado estacionario descripto por la función de onda $\psi(x) = A(1 - x^2/L^2)$ cuando $x\epsilon(-L, L)$ y $\psi(x) = 0$ para el resto de los valores de x.
a) A partir de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, calcule la energía de la partícula en términos de $\hbar, m$ y L.
b) Demuestre que $A^2 = 15/16L$.

c) Calcule la probabilidad de encontrar a la partícula entre $x = -L/3$ y $x = L/3$.

Problema 8. Estudiemos ahora el problema de la **barrera de potencial**. Consideremos una partícula de masa m y energía E que incide desde la izquierda (en el sentido de crecimiento de x) sobre una barrera de potencial de la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x < 0 \;\; o \;\; x > a \end{cases} \tag{6}$$

donde V_0 es constante.

A partir de los resultados obtenidos para la función de onda en el potencial escalón, **a)** resuelva la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $E < V_0$.

b) En este caso, el coeficiente de Transmisión T está dado por:

$$T = \left(1 + \frac{(e^{k_2 a} - e^{-k_2 a})^2}{16\frac{E}{V_0}(1 - \frac{E}{V_0})}\right)^{-1}, \tag{7}$$

donde

$$k_2 a = \left(\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}(1 - \frac{E}{V_0})\right)^{1/2} \tag{8}$$

Demuestre que cuando la barrera es muy ancha y muy alta, es decir, en el límite $k_2 a >> 1$, el coeficiente de transimisión T se reduce a:

$$T \simeq 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2k_2 a} \tag{9}$$

El hecho de que $T \neq 0$ para $E < V_0$, da cuenta de que existe una cierta probabilidad, dada por el coeficiente de transmisión, de que la partícula incidente pueda penetrar la barrera y emerger del otro lado de la misma. Este fenómeno, prohibido desde el punto de vista clásico, se conoce como **Efecto Túnel**.

Problema 9. Un electrón de energía $E = 5eV$ incide sobre una barrera de potencial de altura $V_0 = 10eV$ y espesor $a = 0{,}2nm$. Calcular la probabilidad de que el electrón **a)** atraviese la barrera y **b)** sea reflejado (en este último caso tenga en cuenta que la relación entre los coeficientes de transmisión y reflexión es: $T + R = 1$).

Problema 10. Sea una partícula de masa m ligada en un potencial $V(x) = 1/2m\omega^2 x^2$ correspondiente a un oscilador armónico simple. Encuentre los valores permitidos cuanticamente para la energía en función de la frecuencia. Discuta la relación entre el mínimo de energía y el principio de incerteza.

Ayuda: Partir de la ecuación de Schrödinger independiente en el tiempo, haga la sustición $u = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ *y proponga como solución una función de la forma* $\psi = exp(-u^2/2)\xi(u)$.

Problema 11. La función de onda, solución general, para el oscilador armónico cuántico está determinada por los polinomios de Hermite $H_n(u)$, y puede escribirse de la forma:

$$\psi_n(x) = A_n e^{-u^2/2} H_n(u) \tag{10}$$

donde $u = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ y A_n es una constante de normalización.

Sabiendo que para los primeros valores de n, los polinomios de Hermite valen:

$$H_0(u) = 1, \quad H_1(u) = 2u \;\; y \;\; H_2(u) = -2 + 4u^2 \tag{11}$$

escriba las funciones de onda para el oscilador en los estados correspondientes a $n = 0, 1, 2$ y la densidad de probabilidad para dichos estados. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula en $x = 0$ en cada uno de los casos $(n = 0, 1, 2)$?.