Física General IV - Curso 2008

Práctica 4: Ondas y Partículas - Calor Específico de Sólidos *

15 de septiembre de 2008

Cronograma Tentativo de los Trabajos Prácticos:

- Semana del 13 de Octubre: Visita al Microscopio de Efecto Tunel (INIFTA).
- Miércoles 22 de Octubre: Parcial Primera Parte.
- *Aclaración: La siguiente práctica incluye contenidos que no fueron dados en las Clases Teóricas, pero que resultan importantes para la Materia. Por esta razón serán desarrollados y explicados en la clase práctica del día Miércoles 24 de Septiembre. Se recomienda asistir a dicha clase.*

Parte I: Ondas y Partículas

Problema 1. Considere un paquete de ondas en una dimensión, definido por

$$A(x,t) = \int \hat{\mathcal{A}}(k-k_0)\frac{e^{i(kx-\omega(k)t)}}{(2\pi)^{1/2}}dk \tag{1}$$

donde $\hat{\mathcal{A}}(k-k_0)$ es una función con un pico en $k=k_0$.
a) Muestre que el paquete de ondas puede ser escrito en la forma

$$A(x,t) = e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}\mathcal{A}(x-v_gt)+\cdots \tag{2}$$

donde

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$$

es la velocidad de grupo.
Sugerencia: considere la expansión de $\omega(k)$ alrededor de k_0.
b) Muestre que para que el paquete de ondas mantenga su forma (que estaba dada por $\mathcal{A}(x)$), es necesario que

$$v_{\text{grupo}} = v_{\text{fase}}$$

Aquí v_{fase} es la velocidad de fase (que en clase llamamos velocidad de onda, $v_{\text{fase}} = w \equiv \omega/k$).

*Las prácticas están disponibles en la página: www.fisica.unlp.edu.ar/∼wahlberg/FG4/

c) Como consecuencia de la condición anterior muestre que para una onda luminosa en el vacío vale $\omega = kc$ y muestre que la ecuación de ondas que satisface es,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

d) Suponga que en lugar de la relación del caso anterior anterior, se tiene

$$\omega(k) = bk^2 \ ,$$

con b cierta constante. ¿Coinciden las velocidades de grupo y de fase? Demuestre que no cumple con la ecuación de onda.

Problema 2. Considere un experimento de doble rendija y calcule la distancia entre dos máximos de interferencia consecutivos para el caso de enviar sobre las rendijas:
a) Electrones de impulso $p_e = 4 \times 10^{-24}$ kg m/s, con rendijas separadas por una distancia $a = 3 \times 10^{-6}$ m y la pantalla a $D = 0{,}5$ m.
b) Pelotas de 66 g y velocidad de 5 m/s, con una distancia entre “rendijas” de 0.6 m sobre una pared a 12 m.

Problema 3. Sea una partícula libre de masa m moviéndose en una dimensión con velocidad constante v_x. Ligando impulso con energía y velocidad con tiempo, deduzca a partir del principio de incerteza para el par (p_x, x) una desigualdad para el par (E, t) con E la energía y t el tiempo.
Discuta la relación de incerteza obtenida y su interpretación diferente que la de posición-impulso.

Parte II: Calores específicos de los sólidos

Problema 1. Considerando que los N_A (número de Avogrado) átomos de un mol de un dado cristal pueden ser representados por un conjunto de $3N_A$ osciladores independientes (el “3” proviene de las dimensiones espaciales), compare el valor de la energía (interna) E (que en termodinámica se suele anotar como U) y el calor específico que resultan de aplicar el principio de equipartición de la energí a con la que resulta de utilizar una fórmula análoga a la que obtuvo Planck cuando utilizó la distribución de Boltzmann para la radiación del cuerpo negro.

Grafique el resultado para el caso del cobre, en el que la temperatura introducida por Einstein $T_E = h\nu/k$ corresponde a un valor de $T_E = 267{,}77^o K$.

Problema 2. Un modelo que propuso Debye mejora los resultados de Einstein porque tiene en cuenta que los osciladores en cuestión representan a átomos que no vibran independientemente. Consideró entonces osciladores acoplados[1].

[1] P. Debye, “Sobre la teoría del calor específico” Annalen der Physik **39** (1912) 789.

Debye supuso al sólido como un cuerpo elástico cuyas vibraciones eran longitudinales −análogas a las sonoras en un medio material− y debían tener nodos en los extremos. Para el número de modos con frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$ utilizó una fórmula análoga a la del número de ondas estacionarias $N(\nu)d\nu$ en una cavidad en un intervalo de frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu \Longrightarrow N(\nu)d\nu = \frac{4\pi V}{v^3}\nu^2 d\nu \tag{3}$$

Se ha reemplazado la velocidad de la luz por la de las ondas elásticas y $8 \to 4$ porque se trata de ondas longitudinales que tienen la mitad de polarización que las transversas de la luz. V es el volumen del sólido.

En lugar de multiplicar $3N_A$ por la fórmula de Planck, como hizo Einstein, Debye pesó cada frecuencia por $N(\nu)$ e integró sobre las frecuencias hasta un valor máximo ν_D que fijó por la condición

$$\int_0^{\nu_D} N(\nu)d\nu = N_A \tag{4}$$

a) Muestre que

$$E = 3RT\frac{3}{x_D^3}\int_0^{x_D} dx\frac{x^3}{\exp(x)-1} = 9R\frac{T^4}{T_D^3}\int_0^{T_D/T} dx\frac{x^3}{\exp(x)-1} \tag{5}$$

con

$$x_D = \frac{h\nu_D}{kT}\ , \qquad T_D = \frac{h\nu_D}{k} \tag{6}$$

b) Muestre que

$$c_v^D = 9R\left(4\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\int_0^{T_D/T} dx\frac{x^3}{\exp(x)-1} - \frac{T_D}{T}\frac{1}{\exp(T_D/T)-1}\right) \tag{7}$$

c) Muestre que

$$\lim_{T\to 0} c_v^D = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{T_D^3}T^3 \tag{8}$$

d) Utilizando que para el cobre $T_D = 344{,}5^o K$ grafique y compare el resultado con el de Einstein a bajas temperaturas.

Problema 3. Deduzca la ley de Dulong y Petit ($C_v = 3R$) válida para altas temperaturas, a partir de la fórmula de Debye para la energía [eq. (5)].