Capítulo 4
Aplicaciones de la Leyes de Newton
Usos de los Teoremas de Conservación

Introducción

Veamos ahora de qué manera podemos aprovechar lo que se ha expuesto en relación a:

- el formalismo para describir movimientos que, proponiendo definiciones, establece las características de las magnitudes que representan el resultado de observaciones o experimentos,
- las Leyes o Postulados de la Mecánica que entablan relaciones entre las diferentes maneras de representar los hechos y circunstancias en que ocurren y
- los denominados Teoremas de Conservación que son las conclusiones inmediatas y muchas veces novedosas que se obtienen al admitir como verdaderas las relaciones establecidas en los postulados.

Vamos a enfocar la atención en un movimiento particular que es una buena base para elaborar modelos de sistemas complicados que van desde el comportamiento de las partes del motor de un automóvil hasta los procesos que ocurren entre átomos o moléculas que forman parte de un sólido. Además, vamos a analizar también un proceso simple pero fundamental: el choque entre objetos. El proceso de choque, como experimento controlado, permite extraer información sobre la constitución de los objetos que chocan, es decir permite estudiar cómo y con qué está armado un objeto. Tal información no sólo es útil desde el punto de vista tecnológico (piense el lector en relación a la seguridad en el transporte y cómo puede ser mejorada) sino también desde

el punto de vista básico puesto que permite elaborar modelos sobre cómo está armada una molécula o un átomo o constituyente de átomo, etc.

4.1 - Movimiento oscilatorio armónico simple

La segunda ley de Newton nos indica que, dependiendo de las fuerzas que actúan sobre una partícula, su movimiento exhibirá diferentes características. Claro que esto incluye la posibilidad de que las fuerzas actuantes se compensen (sumen al vector nulo) y así la partícula no presentará variaciones en su movimiento. De esta manera y recordando que las fuerzas surgen por acción a distancia y/o por contacto con otras partículas, en los diferentes lugares que una partícula puede ocupar en un espacio donde existen otras partículas (o conjuntos de éstas) se producirán diferentes efectos en el movimiento de la que estamos estudiando. En algunos puntos del espacio la resultante de las fuerzas será nula y en otros no. Es más, en un cierto punto la resultante puede ser nula y en los puntos vecinos, no serlo; eso también podría ocurrir por regiones o zonas del espacio y entonces, las diferentes variantes son muchas y el lector podrá imaginar una gran cantidad de situaciones.

Imaginemos, como ejemplo, una región de tal manera que al colocar una partícula en un cierto punto de la región, la resultante de fuerzas sobre ella es nula y que además en los puntos vecinos, no sea así. Se denomina posición de equilibrio al punto particular en el cual las fuerzas se cancelan. Las posibilidades de movimiento de la partícula en tal región del espacio no son muchas: si al apartarse del punto de equilibrio surgen fuerzas cuya resultante termina apuntando hacia el punto de equilibrio, la partícula se moverá en el entorno de tal punto y si surgen fuerzas cuya resultante apunta hacia afuera del punto de equilibrio, la partícula se alejará del mismo (y probablemente

de la región). En el primer caso se dice que la resultante es de tipo restitutiva y el movimiento se circunscribe a la región vecina al punto de equilibrio. En el segundo se dice que la resultante no es restitutiva y el movimiento no es localizado. La palabra restitutiva viene a indicar la posibilidad de recuperar la situación de equilibrio.

Tal vez el lector no advierta a dónde se apunta con esta introducción. Veamos si es posible justificarla en otros términos. Las Leyes de Newton nos proveen las herramientas necesarias para describir el movimiento de cualquier partícula en términos del conjunto de influencias a las que está sometida por el medio que la rodea (bah, la resultante de las fuerzas). Así, se pueden discutir diversas situaciones simples como el tiro oblicuo y el deslizamiento sobre varios tipos de superficies. La segunda Ley, en particular, nos indica claramente que si conocemos o hacemos una buena estimación de las fuerzas que actúan sobre una partícula, sabremos predecir su trayectoria y la sucesión de velocidades que la partícula adquiere durante el estudio. De la misma manera, determinando lo mejor posible la trayectoria de una partícula y la secuencia de velocidades podremos hacer buenas indicaciones del resultado de las fuerzas, es decir, de la manera con que el medio influye sobre la partícula. Todo esto parece obvio de la simple lectura de la Segunda Ley, pero nunca está de más refrescar los conceptos: un observador inercial puede establecer una relación simple entre las características del movimiento de una partícula y la influencia de los objetos que los rodean.

De esta manera es posible proponer formas de influencia o tipos de interacción entre partículas que permitan justificar el resultado de algún experimento en el que se estudió cómo se movía una cierta partícula. ¿El lector sabe o

entendió claramente la explicación de cómo se descubrieron algunos planetas, antes de ser observados directamente con un telescopio?

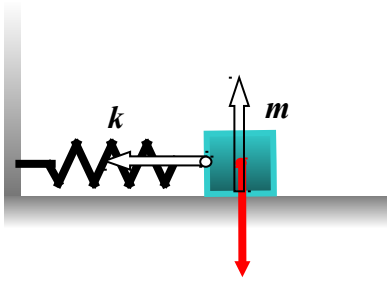
En el marco de la discusión que hemos comenzado parece interesante intentar disponer de amplios y sólidos conocimientos de la relación entre la resultante de fuerzas y las características de movimiento para imaginar modelos de interacción en base a observaciones de tenor cinemático.

Se pueden enumerar algunos ejemplos sencillos y cotidianos. Veamos: ¿Cómo se mueve una hamaca? ¿Qué ocurre con el plato de una balanza de carnicería cuando el carnicero arroja un bife sobre ella para pesarlo? ¿Cómo se mueve una bolita dentro de un cuenco semiesférico? (¿y del lado de afuera, si da vuelta el cuenco?) ¿Cómo es el movimiento de la rueda de un auto (respecto al guardabarros por ejemplo) cuando se transita una camino liso y se agarra un bache? ¿Puso la mano sobre la tela de un parlante y sintió como vibra? ¿Notó que las cortinas se movían cerca de la ventana abierta y que dejan de moverse al cerrarla? ¿Sabe qué es un tentempié? ¿Qué es lo que pasa cuando tiemblan los vidrios porque pasó un auto o camión haciendo mucho barullo? Y tantas otras cosas... La característica común que tienen todos los movimientos mencionados es que para todos ellos existe una posición de equilibrio del cuerpo en cuestión. Es decir un punto del espacio donde se podría colocar el cuerpo y que no pase nada con su movimiento. También es común a todos el hecho obvio de que son movimientos limitados a una cierta región del espacio. El lector se preguntará si esto es válido para la rueda del automóvil. (Piense si realmente la rueda se aparta poco, mucho o del todo del entorno del auto). Los objetos que exhiban movimientos confinados a regiones limitadas del espacio en las cuales haya uno o varios puntos de equilibrio nos indicarán que el resultado de las interacciones sobre el objeto es del

tipo restitutivo. Sin puntos de equilibrio no tiene sentido mencionar la palabra restitutivo, así que no cualquier movimiento confinado estará relacionado con esta discusión.

Vamos a analizar en lo que sigue el movimiento de una partícula frente a una resultante restitutiva. Lo vamos a hacer de manera simple y tal vez mencionando (al pasar) un caso representativo. La idea es imaginar una situación en la que una partícula se encuentre en un punto de equilibrio, admitir que al apartarse de dicho punto surge una resultante restitutiva y estudiar el movimiento que resulta. Es evidente que la resultante no puede ser una fuerza constante pues de ser así difícilmente apunte (sistemáticamente) hacia el punto de equilibrio. El ejemplo básico que citaremos será (ya que la fuerza no debe ser constante y encima debe ser de tipo restitutiva) el caso de una partícula sometida a la fuerza elástica de un resorte y eventualmente a otras fuerzas que se compensen de manera que la resultante sea la fuerza que aporta el resorte.

Sea una partícula de masa m, enganchada a un resorte de constante k, que puede ejecutar un movimiento rectilíneo sobre una superficie horizontal sin fricción. Imaginemos que la partícula está en un punto cualquiera (que no sea la posición de equilibrio del extremo del resorte). Las fuerzas actuantes sobre la partícula, en este caso, son tres: el peso de la partícula, la fuerza de contacto con la superficie horizontal y la fuerza de contacto con el extremo del resorte. Dado que el movimiento tiene dirección horizontal las contribuciones a la resultante en la dirección vertical deben compensarse (el peso y la de contacto - sin



roce) y la fuerza que hace el resorte sobre la partícula juega el papel de resultante. Así, si la resultante tiene la forma:

$$\boldsymbol{F} = -k\ x(t)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

donde: se ha elegido el eje x a lo largo de la dirección del movimiento, el origen en la posición de equilibrio de la partícula (cuando el resorte no está deformado) y $x(t)$ es la posición de la partícula en el instante t y así mismo mide cuánto se deforma el resorte, haciendo uso de la segunda ley de Newton la aceleración de tal partícula tendrá únicamente componente en la dirección del eje x y será:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{k}{m} x(t)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

Se advierte que la aceleración es diferente según el punto de la trayectoria donde se encuentre la partícula.

Explicitando la aceleración como $\boldsymbol{a} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\ \breve{\boldsymbol{i}}$

es posible establecer la igualdad $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\dfrac{k}{m} x(t)$ que conduce a la ecuación:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

Esta última ecuación es conocida con el nombre de ecuación del oscilador armónico simple y nos plantea el problema de encontrar una función solución $x(t)$ que represente las posiciones de la partícula.

Desde el punto de vista matemático, y en primer lugar, la función $x(t)$ debe ser por lo menos una función que al derivarla dos veces vuelva a surgir como tal; además, habrá dos constantes que se perdieron en las sucesivas deriva-

ciones de la función y si existen diversas funciones que satisfacen la igualdad, "la" solución es la suma de todas (que también satisface la igualdad). Estas características de la función $x(t)$, que satisface la ecuación, se pueden conseguir usando las funciones trigonométricas como seno y/o coseno que también son conocidas con el nombre de funciones armónicas.

Admitamos que mediante una función seno o coseno (que por dos derivaciones se vuelve a repetir) podemos representar la solución y adecuemos la función a que tenga tantas constates como las que se pierden en las derivaciones y hagamos una propuesta para ver si satisface la ecuación y/o bajo qué circunstancias lo hace.

Propuesta:

$$x(t) = A\cos(\omega\ t + \delta)$$

Probemos:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\ \omega\ \mathrm{sen}(\omega\ t + \delta)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\ \omega^2\ \cos(\omega\ t + \delta) = -\omega^2\ x(t)$$

Bien, la propuesta sólo es solución si y sólo si $A \neq 0$ y $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Las constantes A y δ deben ajustarse a las condiciones iniciales, es decir a la posición y velocidad que poseía la partícula al momento de disparar los relojes ($t = 0$). Si denominamos x_o y v_o a dichos valores, se obtiene

$$x_0 = A\cos\delta$$

$$v_0 = -A\ \omega\ \mathrm{sen}\,\delta$$

de las cuales, despejando seno y coseno, elevando al cuadrado y sumando se obtiene:

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

y si las dividimos resulta:

$$\text{tg}\ \ \delta = -\frac{v_0}{\omega\ \ x_0}$$

De manera concreta, si una partícula de masa m es enganchada a un resorte de constante k e inicia su movimiento (rectilíneo) desde la posición x_o con velocidad v_o, las diferentes coordenadas de la partícula a medida que el tiempo transcurre están determinadas por la función:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\ \ \cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\ \ t + \text{arctg}(-\sqrt{\frac{m}{k}}\ \frac{v_0}{x_0})\right]$$

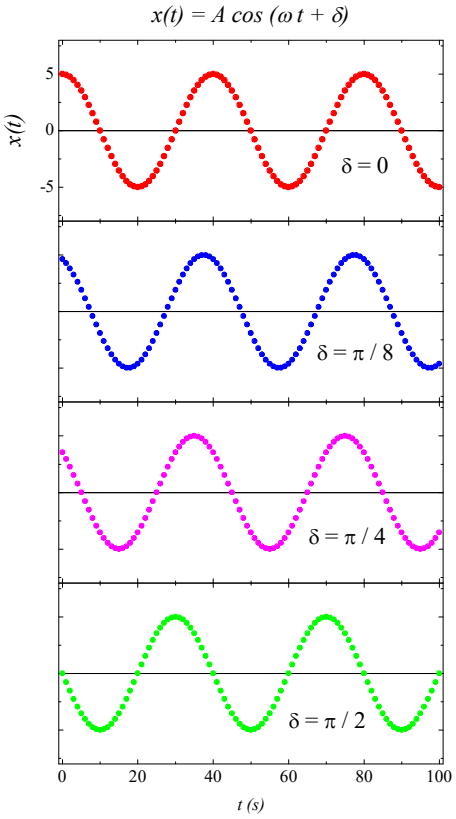
que de manera menos explícita se estila escribir tal como la propuesta de solución que hemos discutido, es decir:

$$x(t) = A\cos(\omega\ t + \delta)$$

acompañada de las correspondientes relaciones de A y δ con los valores de las condiciones iniciales x_o y v_o.

Las constantes que participan de esta última expresión llevan nombre especiales: A es denominada amplitud y representa todo lo que la partícula se puede alejar de la posición de equilibrio; δ es conocida como fase inicial ya que de la fase (o argumento) de la función coseno es lo que queda en $t = 0$. La fase inicial no es más que lo que permite iniciar la función coseno para que se acomode al movimiento que estamos describiendo. Es fácil imaginar valores de la fase inicial según cómo se haya iniciado el movimiento: si comenzó en la posición de equilibrio (habrá que suministrar una velocidad ini-

cial) debe tomarse como $\pi/2$ para que la función coseno arranque de cero; si se inicia en un extremo de la trayectoria deberá se 0 (para que su coseno valga 1) y si ocurre cualquier otra cosa habrá que hacer la cuenta (de resultado menos evidente) con la expresión encontrada antes y que naturalmente proporciona como casos especiales los valores que hemos ejemplificado. Optar por diferentes condiciones iniciales es iniciar un experimento de diferentes maneras y corresponde adecuar las posibles trayectorias determinando la fase inicial correspondiente.

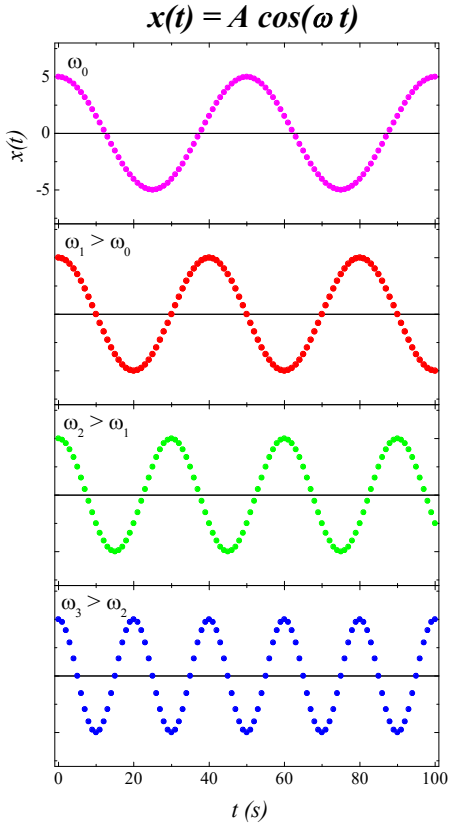


En el gráfico se representan trayectorias que difieren en la fase inicial (para unos pocos casos). El lector debería prestarle atención a la manera con que se inician las curvas (que describen posiciones en función del tiempo) y eventualmente pensar si lo distintivo de cada una se manifestará también en otras curvas como la de la velocidad o la de la aceleración.

Finalmente el símbolo ω fue usado para designar una constante que no depende de las condiciones iniciales del movimiento sino más bien de los elementos que

definen el sistema que estamos estudiando: la constante del resorte y la masa de la partícula. El nombre habitual de tal constante (ya que una vez elegido el resorte y la partícula no cambia más) es el de frecuencia angular. Ni el nombre ni la letra que lo simboliza son de mi simpatía ya que lo primero induce a imaginar algo con características de ángulo o de manera de barrer ángulos y lo segundo es lo típico para indicar una velocidad angular que también induce a ir para el lado de las rotaciones y podría decir el lector qué cosa está rotando en el sistema partícula-resorte: nada. De todas maneras no vamos a cambiarlos y simplemente, al mencionarlos, seremos cuidadosos para evitar confusiones. Sigamos…

La denominación de ω como frecuencia está directamente relacionada con el papel que juega en la función coseno. La fase de la función coseno es una función directa del transcurso del tiempo (una función lineal del tiempo diría un riguroso) y como tal es una función creciente. La función coseno es una función periódica y así, sus valores deberán repetirse para ciertos instantes particulares contenidos en un dado intervalo. El hecho de que ω figure como elemento multiplicativo del tiempo le permite alterar el número de repeticiones en un dado intervalo. Al número de veces por segundo que se repite un evento se le llama frecuencia del evento, entonces, ω es una frecuencia y contiene información sobre la periodicidad del evento. En el caso que estamos describiendo entendemos por repetición del evento a que la partícula esté nuevamente en el mismo lugar y con la misma velocidad. En la figura se puede ver el resultado de aumentar la frecuencia de un movimiento oscilatorio armónico simple y tal vez ayude a pensar este asunto de las repeticiones.



Sea T (denominado período) el intervalo entre dichos instantes de manera que si en el momento t la partícula estaba en un cierto lugar, en t+T repetirá en valor. Para que eso ocurra, la fases de la función coseno en esos instantes debe haber crecido en 2π, es decir:

$$\omega\,(t+T)+\delta = 2\pi + \omega\, t + \delta$$

de donde se deduce $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ o $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (como al lector más le guste).

Siendo las funciones coseno y seno funciones periódicas del mismo período se entiende que la velocidad de la partícula también se repetirá al cabo de T segundos. La frecuencia de repetición f del movimiento de la partícula es

(por definición) la inversa del período y como se mostró, ω es 2π veces la frecuencia, de ahí el nombre de frecuencia angular.

El lector debería recordar que conocer completamente las funciones del tiempo que describen las secuencias de coordenadas de una partícula permite determinar (por derivaciones sucesivas) la velocidad y la aceleración de tal partícula. Así que para el caso que estamos analizando la descripción es completa al determinar la función *x(t)*.

Si una partícula sujeta a un resorte describe la trayectoria especificada en la función:

$$x(t) = A\cos(\omega\ t + \delta)$$

su velocidad será la función:

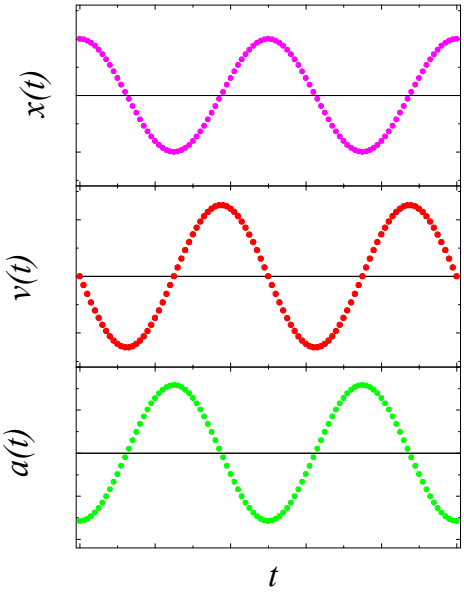
$$v(t) = -A\ \omega\ \mathrm{sen}(\omega\ t + \delta)$$

y su aceleración, la función:

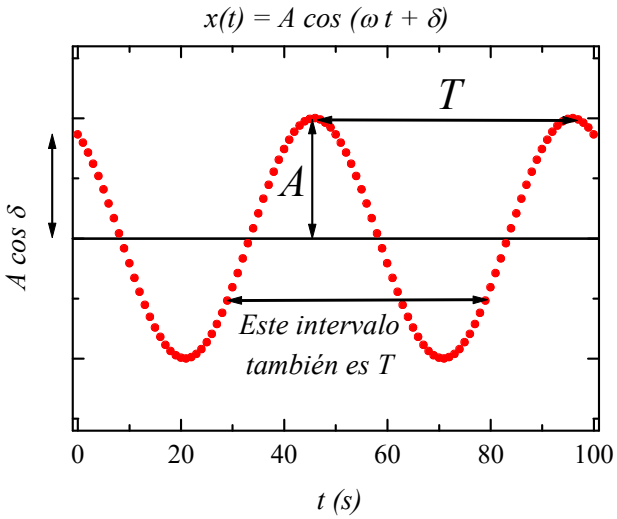
$$a(t) = -A\ \omega^2\ \cos(\omega\ t + \delta)$$

Es medio tonto resaltar que la posición y/o la velocidad son función del tiempo, pero no lo es destacarlo particularmente para la aceleración. Esta última es diferente en diferentes instantes y tal vez sea éste un caso clásico de un movimiento con aceleración no constante. De las diferentes aceleraciones que la partícula experimenta, la de mayor intensidad de todas vale $A\ \omega^2$ (al llegar al mayor apartamiento de la posición de equilibrio, deteniéndose). La mayor rapidez de la partícula es $A\ \omega$ (al pasar por la posición de equilibrio).

En la figura se muestran las tres funciones posición, velocidad y aceleración, para que el lector haga un análisis comparativo del comportamiento en cuanto a máximos, mínimos, aumentos, disminuciones, etc. Las escalas verticales son arbitrarias



En el gráfico que sigue se muestran elementos típicos del movimiento oscilatorio que ayudan a la identificación gráfica de la relación entre la fase inicial y la manera con que se inicia el movimiento, el intervalo que representa un período y la amplitud. En el gráfico se usó la posición del oscilador.



Siendo el movimiento oscilatorio armónico simple un movimiento con aceleración variable, la resultante de las

fuerzas sobre la partícula es una fuerza variable. Es común proponer un enfoque energético en los estudios donde se advierten fuerzas no constantes ya que las funciones energéticas no tienen en consideración tal comportamiento. Analicemos la energía mecánica de un oscilador armónico simple. Las contribuciones cinética y potencial son de la forma:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega\, t + \delta)$$

$$U_{el.} = \tfrac{1}{2} k x^2 = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2 \cos^2(\omega\, t + \delta)$$

(note el lector que cada contribución toma diferentes valores para distintos instantes)

Así resulta para la energía mecánica:

$$E_M = E_c + U_{el.} = \tfrac{1}{2}\, k\, A^2$$

(se usó la relación $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$).

La energía mecánica del oscilador armónico simple es constante y directamente proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Este resultado era esperable ya que no se han incluido en el estudio que hemos hecho ninguna fuerza no conservativa que haga trabajo.

Toda partícula para la cual la Segunda Ley de Newton nos conduce a una ecuación de la forma:

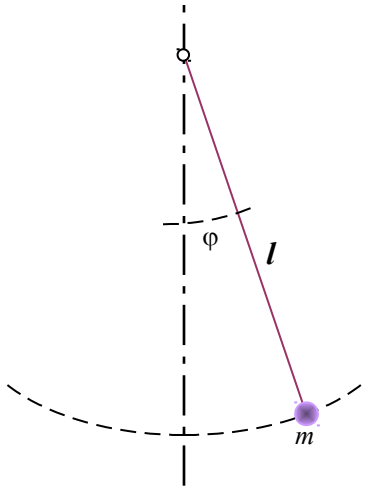
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Cte\; x(t) = 0$$

con *Cte* una constante cualquiera positiva, efectúa un movimiento oscilatorio armónico simple, mantiene constante la energía (proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento) y se la denomina oscilador armónico simple. La

constante *Cte* contiene información sobre las características del sistema que está oscilando y determina el período de repetición del movimiento.

Veamos ahora otros ejemplos de osciladores armónicos simples como el péndulo simple o una partícula colgada de un resorte.

Un péndulo simple es un sistema consistente en una partícula de cierta masa m, suspendida de una cuerda (con masa despreciable) de longitud l. Tal sistema admite una posición de equilibrio (que será tomada como el origen del sistema de coordenadas para hacer la descripción) y pequeños apartamientos de la posición de equilibrio (grandes también, pero no los vamos a estudiar) inducen un movimiento periódico en torno a la posición de equilibrio. La posición de equilibrio se consigue cuando la dirección de la cuerda es la de la vertical del lugar. Tomemos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en la posición de equilibrio, eje x horizontal apuntando hacia la derecha y eje y vertical apuntando hacia arriba. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son dos: la que hace la cuerda por contacto y el peso de la partícula. Llamemos φ al ángulo que forma la cuerda con la vertical cuando la partícula está en una posición cualquiera de coordenadas x e y (fuera de la posición de equilibrio). La segunda Ley de Newton se puede expresar entonces como:



$$\sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} = -T \operatorname{sen} \varphi \, \breve{\boldsymbol{i}} + (T \cos \varphi - m\, g) \breve{\boldsymbol{j}} = m\, \boldsymbol{a}$$

De esta manera, la aceleración tiene dos componentes:

$$a_x = -\frac{T}{m}\,\text{sen}\,\varphi = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

y

$$a_y = \frac{T}{m}\cos\varphi - g = \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

donde las coordenadas de la partícula satisfacen la ecuación $x^2 + (y-l)^2 = l^2$ (circunferencia de radio *l* con centro en el punto de coordenadas (*0*,*l*)).

En las cercanías de la posición de equilibrio la fuerza *T* que aplica la cuerda es prácticamente del mismo valor que el peso *P*, cos φ es muy próximo a 1 y sen φ está bien aproximado por *x/l*. De esta manera la ecuaciones toman las formas:

$$a_x = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{T}{m}\,\text{sen}\,\varphi \approx -\frac{mg}{m}\frac{x}{l}$$

$$a_y = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{T}{m}\cos\varphi - g \approx \frac{mg}{m}1 - g \approx 0$$

por lo que sólo es significativa la ecuación:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$$

Resumiendo, si el péndulo es levemente apartado de su posición de equilibrio, la partícula describe un movimiento (bien aproximado por una sola coordenada) que satisface la relación:

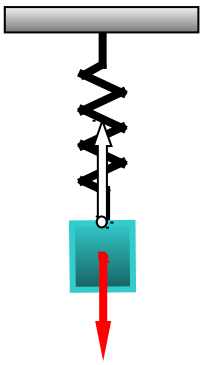
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

Entonces, el péndulo efectúa un movimiento oscilatorio armónico simple de frecuencia $\omega^2 = \frac{g}{l}$ y en consecuencia su período es únicamente dependiente de la longitud de la cuerda:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si el péndulo es apartado bastante de la posición de equilibrio, lo que hemos analizado ya no tiene validez. y la situación es algo más complicada.

Veamos ahora el caso de una masa *m* colgada de un resorte de constante *k*. Este sistema tiene una posición de equilibrio determinada cuando la fuerza que aplica el resorte iguala al peso de la masa *m*. Tomando un sistema de coordenadas con el eje *y* vertical hacia abajo, la coordenada de equilibrio y_e es tal que $k\,(y_e - y_0) = m\,g$ donde y_o es la coordenada del extremo del resorte si no tiene nada colgado. Apartando la masa hasta la coordenada *y*, las fuerzas aplicada sobre ella serán (recordando que el eje apunta hacia abajo):



$$-k(y - y_0) + m\,g = m\,a = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Si ponemos en evidencia cuánto se aparta la masa de la posición de equilibrio restando y sumando y_e, obtenemos:

$$-k(y - y_e + y_e - y_0) + m\,g = m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Usando la igualdad que define la coordenada de equilibrio se llega a:

$$-k(y-y_e)-k(y_e-y_0)+m\,g=-k(y-y_e)=m\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

Esta relación nos indica que la aceleración está determinada por lo que se apartó la partícula de la posición de equilibrio ($y-y_e$). Llamando, por ejemplo, u a dicho apartamiento y notando que $\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$ el movimiento se describe por la ecuación:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{k}{m}\,u=0$$

por lo que es un movimiento oscilatorio armónico simple de la misma frecuencia (y período) que el encontrado para cuando el movimiento se efectúa sobre un plano horizontal sin roce.

4.2 - El proceso de choque

De los posibles sistemas de partículas que se pueden estudiar, el de dos partículas es el más sencillo desde el punto de vista de la cantidad de constituyentes. Tal sistema posee una cantidad de movimiento de dos términos, un momento angular de dos términos y una energía con dos términos cinéticos y, eventualmente, términos de energías potenciales según la cantidad de fuerzas conservativas (internas y/o externas) que estén aplicadas sobre las dos partículas que lo constituyen. Si especificamos un poco más la situación en la que se puede encontrar el sistema de dos partículas, es posible plantear el estudio del sistema más sencillo posible en la situación más simple. Admitamos que el sistema de dos partículas que vamos a estudiar no está influido por el medio externo de manera que todo lo esperable que ocurra se deba a eventuales procesos entre las dos partículas que lo constituyen sin mediación alguna de

cualquier otra cosa. ¿Simple no? Y bien… y ahora qué. ¿Qué puede ocurrir en un sistema así? Bueno, sea lo que fuere que ocurre entre las partículas, el hecho de haber considerado al sistema libre de toda influencia externa hace que la cantidad de movimiento del sistema permanezca constante ya que sólo fuerzas externas pueden alterar tal magnitud. Así, el proceso que ocurra con las dos partículas del sistema deberá ser tal que la variación de la cantidad de movimiento de una de ellas deberá ser compensada por un cambio de la cantidad de movimiento de la otra. En pocas palabras las partículas intercambiarán cantidades de movimiento entre ellas manteniendo el total. El lector no puede perder de vista que la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial y el intercambio incluye dirección y sentido. **Llamaremos *choque o dispersión* al proceso mediante el cual dos partículas se transfieren cantidad de movimiento de manera que la cantidad de movimiento total se conserva.** Si el tal proceso de choque involucra además alguna transferencia energética, entonces, habrá que examinar las contribuciones a la energía mecánica del sistema para poder extraer alguna conclusión al respecto. Las consideraciones energéticas más simplificadoras imaginables (recordando que pretendemos estudiar un sistema de dos partículas en la situación más simple posible) son aquéllas donde no hay fuerzas no conservativas (para evitar el cálculo de trabajos teniendo en cuenta trayectorias). Así, la energía mecánica permanece constante. Los términos de la energía mecánica de un sistema de dos partículas son: dos términos cinéticos, dos términos potenciales (cada partícula influirá sobre la otra mediante una fuerza conservativa) y dos términos de energía interna (si lo que estamos llamando partículas no lo son en el sentido elemental, es decir, si admiten una constitución interna). Que me disculpe el lector pero le prometo que la próxima es la última sim-

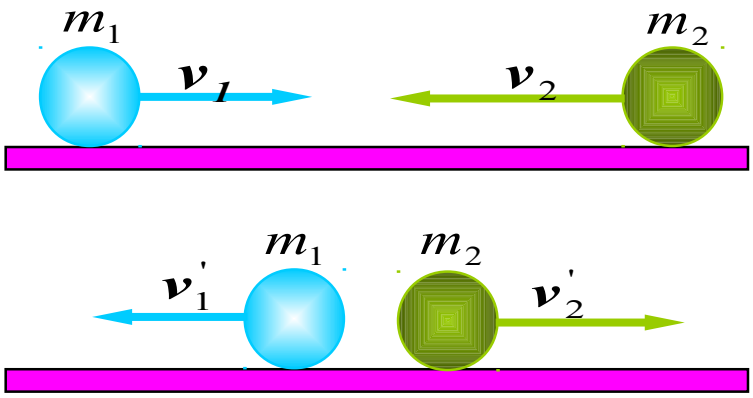
plificación. Si el proceso de choque ocurre en un dado punto del espacio no variarán las energía potenciales ya que éstas dependen sólo de las coordenadas y, como se dijo, todo se desarrolla en un mismo punto. Mientras dura el proceso (en ese tal punto del espacio) las coordenadas no cambian, son las del punto de choque. De esta manera lo que se puede inferir desde el punto de vista energético es que variará la energías cinéticas (durante el choque) a costas de las energías internas de las partículas o viceversa. Si finalizado el proceso, las partículas son exactamente las mismas que las que iniciaron el proceso, sus energías internas no se modificaron, la energía cinética del sistema no cambió durante el choque. Si, por el contrario, durante el choque hubo una modificación de las energías internas (las partículas se alteraron), habrá cambiado la energía cinética del sistema. En el primer caso se dice que el choque es elástico y en el segundo que es inelástico en algún grado según varíe mucho o poco la energía cinética (respecto a la disponible antes del choque). Piense el lector, ¿podría ocurrir un choque inelástico entre dos partículas elementales?

Resumiendo: se denomina choque al proceso más simple que puede suceder en un sistema aislado de dos partículas. En tal proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema y la disminución, conservación o aumento de la energía cinética del sistema determina el resultado del choque. Si la energía cinética del sistema permanece constante el choque es denominado elástico y las partículas no se transforman como consecuencia de este tipo de choque. Es común llamar colisiones, dispersiones o desintegraciones a diferentes clases de choques en los cuales se mantinene o baja la energía cinética del sistema (la colisión y la dispersión, según haya o no contacto entre las partículas) o aumenta la energía cinética (la desintegración). Los experimen-

tos de choque son una importantísima herramienta al momento de discutir si algo que se admite como partícula posee o no estructura interna. El desarrollo de grandes aceleradores de partículas cargadas apunta, entre otras cosas, a ese tipo de investigación.

4.3 - Choque elástico

Analicemos el caso de un choque frontal completamente elástico. Es decir, un golpe entre partículas, -que se puede analizar en una sola dimensión- en el cual las partículas intercambian cantidad de movimiento sin que se use energía para modificar a las partículas en sí mismas. Supongamos que $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son las velocidades de las partículas (de masas respectivas m_1 y m_2) justa-



mente antes de iniciarse el choque. Inmediatamente después del choque, las partículas tiene velocidades $\boldsymbol{v}'_1$ y $\boldsymbol{v}'_2$. La figura esquematiza la situación.

Admitiendo que las fuerzas relevantes durante el choque son las que las partículas se ejercen mutuamente (porque las fuerzas externas son pequeñas frente a éstas o se cancelan o no existen) podemos plantear la conservación de la cantidad de movimiento del sistema para el instante inmediatamente anterior y el inmediatamente posterior al choque. Así:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}'_1 + m_2\boldsymbol{v}'_2$$

Si elegimos un sistema de coordenadas con un eje paralelo y del mismo sentido que $\boldsymbol{v}_1$, podemos representar la ecuación anterior mediante los módulos de las velocidades (que anotamos con v):

$$m_1 \mathrm{v}_1 - m_2 \mathrm{v}_2 = -m_1 \mathrm{v}'_1 + m_2 \mathrm{v}'_2$$

(Piense bien el lector el significado de los signos y recuerde que las v representan módulos, es decir, son números positivos).

La elasticidad del choque nos indica que la energía cinética del sistema, antes y después del choque, va a ser la misma. Así, disponemos de otra igualdad como:

$$\frac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathrm{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\mathrm{v}_2'^2$$

que inmediatamente se resume en:

$$m_1\mathrm{v}_1^2 + m_2\mathrm{v}_2^2 = m_1\mathrm{v}_1'^2 + m_2\mathrm{v}_2'^2$$

Las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y energía cinética nos permiten determinar los valores de las velocidades al cabo del choque, en función de las velocidades con que las partículas chocan (a veces se las denomina velocidades de salida y de estrada, respectivamente). Veamos...

Tomemos ambas ecuaciones y agrupemos según la masa de la partícula:

$$m_1\left(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}'_1\right) = m_2\left(\mathrm{v}'_2 + \mathrm{v}_2\right)$$

$$m_1\left(v_1 - v_1'\right)\left(v_1 + v_1'\right) = m_2\left(v_2' - v_2\right)\left(v_2' + v_2\right)$$

La segunda ecuación se factorea como diferencia de cuadrados:

$$m_1\left(v_1 - v_1'\right)\left(v_1 + v_1'\right) = m_2\left(v_2' - v_2\right)\left(v_2' + v_2\right)$$

y la dividimos, miembro a miembro, por la primera. Entonces,

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2$$

o lo que es lo mismo:

$$v_2' = v_1 - v_1' + v_2$$

Reemplazando en la ecuación de cantidad de movimiento se puede obtener v_1' en función de v_1 y v_2. El resultado es:

$$v_1' = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

y usando este resultado resolvemos para v_2':

$$v_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2$$

De esta manera es posible determinar las velocidades de las partículas como resultado del choque frontal elástico, siempre que se conozcan o midan las velocidades y las masas de las partículas que van a chocar, claro.

El análisis de las soluciones v_1' y v_2' en diferentes situaciones para las que se admite que ha ocurrido una colisión elástica, es sumamente instructivo.

Veamos un caso sencillo: supongamos un choque de una pelotita contra una pared. ¿Cómo se adecuan las soluciones para adaptarlas a este caso? Evidentemente la masa de una pared es enorme, comparada con la de la pelotita y si analizamos la situación desde un sistema de referencia en el piso, la pared está en reposo antes del choque. Así que asignándole a la pared el subíndice 2, (v_2=0) podemos reescribir las soluciones como:

$$v_1' = \left(\frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) v_1$$

$$v_2' = \left(\frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) v_1$$

De esta forma, despreciando la relación m_1/m_2 frente a 1 (por la gran cantidad de ceros que el resultado tendrá luego de la coma decimal y lo poco que modificará el 1) las relaciones nos llevan a que:

$$v_1' \approx v_1$$

$$v_2' \approx 0$$

Que es muy razonable. La pelotita rebota tal cual venía al choque y la pared ni se inmuta ¿El lector podría demostrar que si se le asigna a la pared lo subindicado con 1, las conclusiones son las mismas?

Un hecho curioso ocurre si las masas de las partículas son iguales (m_1= m_2=m). Manteniendo el caso en que una de las partículas está en reposo antes del choque (la indicada por 2, por ejemplo), las soluciones se simplifican a:

$$v_1' = \left(\frac{m-m}{m+m}\right)v_1 = 0$$

$$v_2' = \left(\frac{2m}{m+m}\right)v_1 = v_1$$

La interpretación del proceso es sencilla: la partícula que se movía antes del choque se frena totalmente (se queda "seca") y la que estaba en reposo sale disparada con la velocidad de la anterior.

Naturalmente, suponer que una de las partículas está en reposo antes del choque no es sólo que una hipótesis simplificadora sino que puede ser un caso real frecuente. Es claro que muchos choques ocurren entre partículas en movimiento (respecto al piso o carretera o calle...). En estas situaciones una comparación entre las masas de las partículas conduce a los siguientes resultados[1]:

para $m_1 << m_2$

$$v_1' \to v_1 + 2v_2$$

$$v_2' \to -v_2$$

cuando $m_1 = m_2$

$$v_1' \to v_2$$

$$v_2' \to v_1$$

y finalmente si $m_1 >> m_2$

$$v_1' \to -v_1$$

$$v_2' \to 2v_1 + v_2$$

[1] Se usarán flechas para indicar que los resultados son límites o tendencias.

4.4 - Choque no elástico

Si bien existen muchos procesos físicos que se pueden analizar como choques elásticos (sobre todo a nivel de física atómica y de partículas) la realidad cotidiana no muestra justamente estos procesos con frecuencia. Pensemos un poco... Un choque elástico es aquél en el cual no hay cambio del estado interno de los cuerpos que chocan. No lo hay, al comparar el estado interno de los cuerpos antes y después del choque. Durante el choque se admite que los cuerpos puedan sufrir modificaciones pero una vez finalizado el choque "todo es como al comienzo". Esto último se refiere estrictamente a las características de los cuerpos y no a la manera de moverse. En pocas palabras, los cuerpos que van al choque (elástico) son exactamente los mismos que los que salen del choque (idénticos a sí mismos: ni un pelo más ni uno menos; ni un átomo más ni uno menos; ni un grado de temperatura más ni uno menos). Por eso, los choques elásticos son procesos esperables entre partículas elementales o sus equivalentes. Porque sepa el lector que lo de *elemental* viene a que no hay constituyentes y por lo tanto no se puede hablar de cambio del estado interno y *equivalente* apunta a conjuntos de partículas tan sólidamente armados que resulta prácticamente imposible alterarlos. ¿Usted cree que si lo chocan estando parado en un semáforo, su auto y el del otro (seguramente un idiota) son los mismos que antes? ¿Usted imagina un sopapo en el cual no haya ni si quiera un mínimo intercambio de células o gotitas de humedad o moléculas entre mejilla y palma? ¿Pondría la mano en el fuego por una pelota de tenis sosteniendo que no ha cambiado absolutamente nada antes y después de un raquetazo?

Al analizar un choque entre objetos de la realidad, se supone que la interacción entre los cuerpos antes de que se toquen las superficies es nula y así, si

existe la convicción de que los cuerpos no se alteraron en absoluto, la energía cinética del sistema deberá ser constante. No se puede perder de vista que durante un choque se restringe el análisis al intervalo entre un instante inmediatamente anterior al choque y un instante inmediatamente posterior al choque. Si por el contrario se puede afirmar que los cuerpos no son los mismos luego del choque, la energía cinética del sistema no permanece constante. En términos de los que se estuvo analizando, la ecuación de conservación de la energía cinética no es más válida. Difícilmente podamos llegar a una solución genérica, es decir al conocimiento de las velocidades resultantes del choque, como lo hemos hecho con el choque elástico. Sin embargo, existe la posibilidad de hacer un análisis particularizado de la situación. El conocimiento de alguna característica del sistema puede contribuir a encontrar una solución. Por ejemplo, supongamos que el sistema constituido por los dos cuerpos que van al choque es aislado o se comporta como tal. Es decir, no interactúa con cuerpos fuera del sistema o de hacerlo, las fuerzas asociadas a las posibles interacciones se cancelan entre sí. El movimiento del centro de masas de tal sistema es a velocidad constante (respecto de un sistema inercial cualquiera) y a su vez, el mismo centro de masas puede ser el origen del sistema inercial de análisis (u otro punto en reposo respecto de él). Conocer la velocidad del centro de masas en cierto instante es conocerla en cualquier otro instante y así podemos usar la relación:

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}$$

para las velocidades antes del choque o

$$\boldsymbol{V}_{CM} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}'_1 + m_2 \boldsymbol{v}'_2}{m_1 + m_2}$$

para las velocidades luego del choque.

Teniendo la posibilidad (que no siempre se da) de elegir al centro de masas como origen del sistema inercial para hacer el análisis, no podemos despreciar la oportunidad ya que tal elección es en sí una medida de la velocidad del centro de masas: la velocidad del centro de masas respecto al centro de masas en 0. Así, el problema visto desde el centro de masa se plantea con las relaciones:

$$m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$$

$$m_1\boldsymbol{u}'_1 + m_2\boldsymbol{u}'_2 = \boldsymbol{0}$$

donde con $\boldsymbol{u}$ se han indicado las velocidades de las partículas relativas al centro de masas y $\mathbf{0}$ es el vector nulo. Es inmediato obtener:

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{u}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{u}'_1$$

Las partículas se acercan al centro de masas (origen de coordenadas) con velocidades $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$, chocan y se alejan del centro de masas con velocidades $\boldsymbol{u}'_1$ y $\boldsymbol{u}'_2$ (manteniéndose siempre como vectores opuestos). Si el lector imagina que $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ tienen la misma dirección, está acertado; si imagina que $\boldsymbol{u}'_1$ y $\boldsymbol{u}'_2$ tienen la misma dirección, también está acertado y si ahora imagina que la dirección de $\boldsymbol{u}_1$ o $\boldsymbol{u}_2$ es la misma que la de $\boldsymbol{u}'_1$ o $\boldsymbol{u}'_2$, entonces se equivoca de lado a lado. Esto último no se deduce de ninguna de las ecuaciones usadas. La relación entre las direcciones está determinada por lo que ocurra durante el choque y no sé si se habrá dado cuenta que estamos comparando magnitudes evaluadas un instante antes y un instante después del choque y no lo que pasa entre esos instantes.

Las últimas ecuaciones nos permiten asegurar que las relaciones entre los módulos de las velocidades son iguales. Efectivamente, tomando el módulo de las velocidades y dividiendo se obtiene

$$\frac{u_1'}{u_1} = \frac{u_2'}{u_2}$$

Llamemos *e* a esta relación entre los módulos de las velocidades. Evidentemente *e* es un número positivo (es una división entre números positivos). Para acotar los posibles valores de *e* analicemos qué ocurre con la energía del sistema.

Como el sistema fue declarado aislado, la energía no puede aumentar. Si esto ocurriera, se violaría la aislación del sistema ya que algún cuerpo externo al sistema estaría haciendo trabajo sobre él. Así que la energía se mantendrá o disminuirá. Como se explicó al analizar el choque elástico el cambio energético del sistema estará determinado por los términos de energía interna y cinéticos. Si las partículas son las mismas antes y después del choque, los términos de energía interna se mantienen y así deberán mantenerse los términos cinéticos: choque elástico. Si las partículas se modifican, variarán los términos de energía interna y entonces lo harán los de energía cinética.

La energía cinética del sistema antes del choque es:

$$E_c^{Antes} = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2$$

y usando la relación $m_1 \boldsymbol{u_1} + m_2 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0}$ se obtiene:

$$E_c^{Antes} = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

En forma análoga podemos evaluar la energía cinética después del choque:

$$E_c^{Desp.} = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

La relación de la energía cinética después del choque a la que se tenía antes del choque es

$$\frac{E_c^{Desp.}}{E_c^{Antes}} = \frac{u_1'^2}{u_1^2} = e^2$$

Los choques no elásticos, en contraposición a los elásticos, se caracterizan por la variación de la energía cinética del sistema. Es más, basta con soltar una pelota y hacerla chocar contra el piso para darse cuenta que la energía mecánica ha disminuido pues la pelotita no vuelve al nivel de donde fue soltada (claro que la pelota que sube no es la misma que la que bajó). La energía cinética disponible al cabo del choque es menor que la que se tenía inmediatamente antes del choque. En un choque no elástico de objetos, la energía cinética del sistema disminuye. Así, reanalizando la última ecuación podemos concluir que la cantidad positiva *e*, conocida con el nombre de coeficiente de restitución, debe ser menor o igual que la unidad (ya que $E_c^{Desp.} \leq E_c^{Antes} \Rightarrow e^2 \leq 1$). El coeficiente de restitución describe el grado de elasticidad (o no elasticidad, como más le guste al lector) de un choque entre cuerpos. Los valores extremos del coeficiente de restitución definen los llamados choque totalmente inelástico o choque plástico (*e*=0) donde se pierde toda la energía cinética del sistema y los cuerpos quedan en reposo relativo

uno respecto del otro, y el choque elástico (e=1) donde no se pierde energía cinética y que ya hemos analizado. Valores intermedios del coeficiente de restitución marcan grados de elasticidad (o inelasticidad) del choque. Es fácil demostrar que la relación entre la variación de energía cinética y la energía cinética disponible (antes del choque) es

$$\frac{E_c^{Desp.} - E_c^{Antes}}{E_c^{Antes}} = e^2 - 1$$

Como se mencionó al principio, existen otros procesos que se pueden analizar como un choque como por ejemplo una desintegración (o explosión). Si un objeto en reposo se desintegra o explota, resulta claro que de algún lado surgió la energía necesaria para que los fragmentos tengan energía cinética (de la energía interna del sistema, claro). Esta clase de procesos se pueden imaginar como choques totalmente inelásticos analizados al revés: la situación inicial del choque es la final y la final, la inicial.

Síntesis conceptual

Si bien los sistemas mecánicos reales y su evolución son complicados de describir, es común iniciar su descripción a través de un modelo simple cuyas predicciones aproximen razonablemente los resultados obtenidos para el sistema real. Se admite que con algunas correcciones o agregados ad-hoc a una primera aproximación se pueden mejorar las predicciones y obtener un modelo más adecuado de la realidad. La trayectoria predicha para un tiro oblicuo admitiendo a la fuerza de atracción gravitatoria como constante y única responsable del fenómeno es un buen ejemplo. Si al modelo se le agrega la influencia del aire sobre el objeto, incluyéndola en la resultante como fuerza con las característica que se crean apropiadas, el resultado mejora y si

se admite que el objeto puede desplazarse y rotar sobre sí mismo, la descripción puede mejorar aún más. La idea subyacente en lo que se ha mencionado es la destacar un método muy usado para describir la realidad y que se basa en ir complicando gradualmente lo sencillo. Para eso hay que conocer muy bien lo que se propone como sencillo o básico.

En este capítulo se ha hecho uso tanto de los Principios de la Mecánica como de los Teoremas de conservación para describir, por un lado, una clase particular de movimiento que surge como consecuencias de una resultante de fuerzas no constante y por el otro, un proceso fundamental que se caracteriza por la transferencia de cantidad de movimiento.

El oscilador armónico, que tal es el nombre de una partícula que efectúa un movimiento oscilatorio armónico simple, es el modelo más sencillo de todo aquello que está casi en una situación de equilibrio. Al imaginar que los cuerpos de la realidad están constituidos por partículas se admite (en base a evidencias experimentales) que las partículas no están en reposo sino más bien moviéndose alrededor de posiciones de equilibrio. Como primera aproximación se usa el modelo del oscilador armónico. De igual manera se haría una primera descripción de sistemas que vibran como cuerdas o membranas.

El proceso genérico denominado choque da cuenta de lo que ocurre en el sistema más simple de estudiar: el sistema aislado de dos partículas. Las circunstancias en las que ocurre el proceso permiten usar los teoremas de conservación y de ahí caracterizar el estado de cada partícula en diferentes instantes. Las consideraciones energéticas contribuyen a elaborar modelos en relación a los objetos que han participado del choque.