2.2 - La importancia del observador

La descripción del movimiento de una partícula pasa por la especificación de su cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ (en un cierto instante) y la determinación de la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan ya que ésta define las modificación de $\boldsymbol{p}$ con el transcurso del tiempo. El hecho que la cantidad de movimiento esté definida a través de la velocidad y que ésta a su vez dependa del cambio en la posición (y no explícitamente de la posición) desdibuja el punto de vista de la observación. Esto quiere decir, en pocas palabras, que en la cantidad de movimiento no hay información directa relativa al observador. Esta situación no es extraordinariamente traumática: se sabe que dos observadores cualesquiera determinarán, en general, diferentes cantidades de movimiento de la misma partícula y así se insiste una vez más en la relatividad del movimiento. Pero... en la situación que los observadores estén en reposo, uno respecto al otro, y como consecuencia determinan la misma cantidad de movimiento de una partícula, ¿cómo se evidencian las diferentes observaciones? En principio, no es posible. Veamos ahora si a través de alguna magnitud nueva podemos introducir explícitamente el punto de vista. Tal punto de vista está contenido en el vector posición $\boldsymbol{r}$ que es particular de cada observador y en consecuencia todo lo que de él se derive. Una combinación adecuada de la posición de una partícula y su cantidad de movimiento poseerá la información buscada.

2.3 - Momento angular

Se define momento angular o momento cinético o momento de la cantidad de movimiento de una partícula, en el instante t, al vector $\boldsymbol{l}$ que resulta de la operación:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

El momento angular tiene dirección perpendicular al plano que determinan $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$, sentido determinado por la regla del tirabuzón (haciendo rotar $\boldsymbol{r}$ hacia $\boldsymbol{v}$) y módulo

$$l = |\boldsymbol{r}| \ \ |\boldsymbol{p}| \ \ \operatorname{sen} \alpha$$

siendo α en ángulo entre $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$. Las unidades de momento angular resultan de la combinación de unidades de longitud y de cantidad de movimiento [m^2 kg/s] y no tienen nombre en particular.

El momento angular de una partícula es una magnitud instantánea que resulta no nula en el caso que la posición y la velocidad de la partícula no tengan la misma dirección. En efecto,

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

resulta nulo si $\boldsymbol{r}$ es paralelo a $\boldsymbol{v}$.

El hecho que una partícula posea momento angular en un cierto instante indica que su vector posición y el cambio que ocurrirá en él (contenido en la velocidad) no son paralelos y así el vector posición en el instante siguiente tendrá, con certeza, dirección distinta del anterior. El cambio de dirección del vector posición es una manifestación directa de lo que llamamos rotación y resulta entonces que el momento angular evidencia el hecho que una partícula rote, o no, respecto de un dado observador. Si para un observador, durante un cierto intervalo de tiempo, el momento angular no es nulo (pudiendo eventualmente variar o no), se puede afirmar que la partícula rota respecto a dicho observador. Por el contrario, si en los sucesivos instantes del intervalo considerado el momento angular de una partícula relativo al observador se mantiene como el vector nulo, tal observador no detectará rotaciones de la

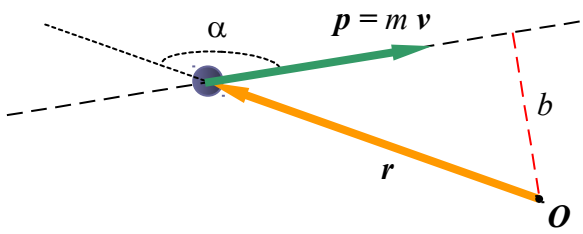
partícula y sólo podrá indicar que ésta se aleja de o se acerca hacia el origen de su sistema de coordenadas.

Resumiendo, si para un observador el movimiento de una partícula requiere que el vector posición vaya cambiando de dirección a medida que transcurre el tiempo, se dice que la partícula rota respecto a tal observador y en ese caso la partícula tendrá momento angular. Si el movimiento es tal que el vector posición no cambia de dirección, la partícula no está rotando (respecto al tal observador) y el momento angular es nulo. El momento angular es la magnitud física que manifiesta explícitamente el fenómeno de rotación de una partícula.

La cantidad de movimiento de una partícula pone de manifiesto su movimiento ya que la velocidad marca los cambios en el vector posición. El momento de la cantidad de movimiento (momento angular) evidencia, por su parte, si los cambios en la posición incluyen o no modificaciones en la dirección de vector posición.

Analicemos ahora algunas situaciones apuntando a determinar el momento angular de una partícula.

Supongamos que una partícula se mueve en un trayectoria rectilínea y evaluemos el momento angular respecto a un observador cuyo origen de coordenadas O se encuentra fuera de los puntos de la trayectoria. El



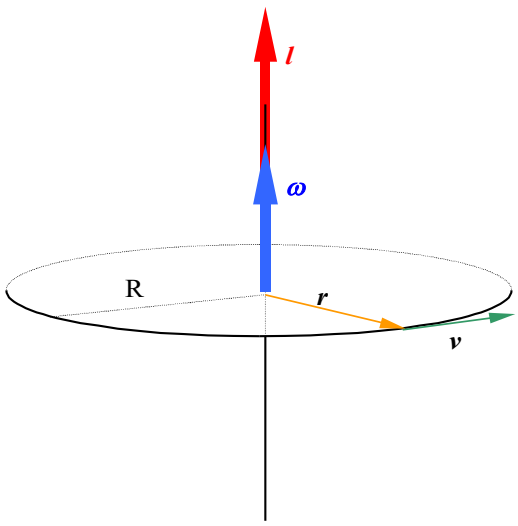
momento angular de la partícula en el instante que muestra la figura será, por

definición ($\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$) un vector perpendicular al plano de la hoja, con sentido entrante a la hoja y de módulo:

$$l = r\,p\,\mathrm{sen}\,\alpha = bmv$$

donde b es la distancia desde el origen a la recta que contiene a la trayectoria y es llamado parámetro de impacto. Una partícula en movimiento rectilíneo posee momento angular salvo para aquellos observadores cuyo origen de coordenadas esté sobre la recta que describe la partícula (b=0). Según el observador, la partícula puede describirse como rotando o no y para el caso analizado se puede afirmar que la partícula rota. En tanto la partícula continúe en su movimiento rectilíneo, el momento angular mantendrá su dirección y sentido. El módulo será variable o no según lo sea la velocidad de la partícula.

Si la trayectoria de la partícula no es rectilínea, la evaluación del momento angular es más complicada. De las trayectorias no rectilíneas, la circular es la más sencilla de considerar. En un movimiento circular, se pone de manifiesto de manera superlativa, lo que llamamos rotación. Supongamos que una partícula describe una circunferencia de radio R y en un cierto instante su velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$. En relación a un observador con origen en el centro de la circunferencia, el momento angular resulta:



$$\boldsymbol{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$$

es decir, directamente proporcional a la velocidad angular. El elemento de proporcionalidad ($m\,R^2$) se denomina Momento de Inercia I de la partícula relativo a un eje que pasa por el centro de la circunferencia. El momento de inercia posee información relativa al objeto que se está moviendo: cuánta masa y cuán separada del eje de rotación está.

Hagamos un paréntesis para obtener la expresión del momento angular.

A partir de la definición de momento angular se obtiene:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

donde se ha usado la relación $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ entre la velocidad de la partícula y la velocidad angular.

Elijamos un sistema de coordenadas de manera que el plano de rotación sea el plano xy y la rotación se efectúe de manera tal que la velocidad angular tenga la misma dirección y sentido que el eje z. Iniciemos el estudio en el instante en que la partícula pasa por el eje x. En un instante posterior cualquiera, el vector posición de la partícula estará inclinado un cierto ángulo ϕ respecto al eje x y será $\boldsymbol{r} = R\,cos\,\phi\,\breve{\boldsymbol{i}} + R\,\text{sen}\,\phi\,\breve{\boldsymbol{j}}$ y la velocidad angular

$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\breve{\boldsymbol{k}}$ (con $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$). Así, el producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ es:

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -R\,\omega\,\text{sen}\,\phi\,\breve{\boldsymbol{i}} + R\,\omega\,cos\,\phi\,\breve{\boldsymbol{j}}$$

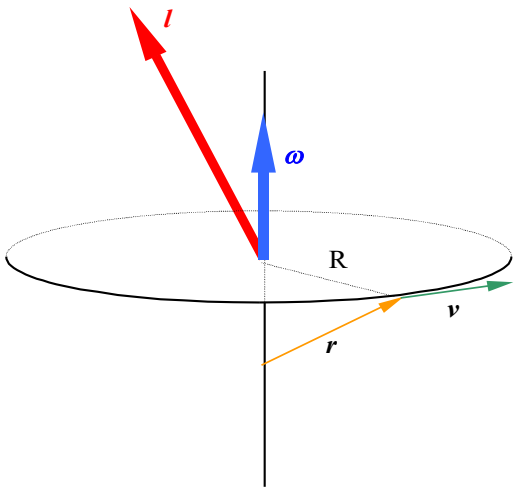
De esta manera, el vector que resulta del producto $\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ tiene sólo componente z:

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = R^2\omega\,\breve{\boldsymbol{k}}$$

El momento angular $\boldsymbol{l}$ resulta, como se había visto $\boldsymbol{l} = mR^2\boldsymbol{\omega}$.

Continuemos hora con la discusión. El caso que hemos analizado (que es una situación muy particular) da lugar a que se entable una relación entre momento angular y velocidad angular a través de una cantidad numérica (positiva): el momento de inercia. Siendo así, los vectores $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son, en términos domésticos, parientes directos. Claro que la información física que posee cada uno de ellos no es la misma. La velocidad angular manifiesta que hay un movimiento de rotación en torno a un eje, pero no se sabe qué se esta moviendo ni qué características tiene. El momento angular por su parte posee la misma información que la velocidad angular sumada a la del momento de inercia, es decir, informa sobre cómo rota una cierta distribución de masa en torno a un dado eje.

La relación $\boldsymbol{l} = I\boldsymbol{\omega}$ es de validez general aun en casos en que el momento angular y la velocidad angular no sean vectores paralelos. En tales casos resulta que el momento de inercia no es simplemente un número sino una entidad algo más complicada denominada tensor. Está fuera del alcance de estos apuntes llevar a ese grado la discusión del momento de inercia y realmente no se agrega contenido conceptual al significado del momento angular conocer rigurosamente la forma del momento de inercia.



Tal vez sirva de ejemplo, para tener alguna idea de la complicación a la que nos podemos enfrentar, analizar el mismo caso anterior pero cambiando el origen de coordenadas. Supongamos que estudiamos el mismo movimiento circular de una partícula pero descripto desde un sistema de coordenadas con origen sobre el eje de rotación por debajo del centro de la circunferencia. Debemos calcular nuevamente la expresión

$$\boldsymbol{l} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

con el inconveniente que el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{r}$ no es recto.

Hagamos un nuevo paréntesis con el fin de obtener el resultado.

Para el caso en que el origen de coordenadas esté por debajo del centro de la circunferencia, el vector posición $\boldsymbol{r}$ tendrá componente en la dirección z de manera que:

$$\boldsymbol{r} = R\, cos\, \phi\, \breve{\boldsymbol{i}} + R\, \mathrm{sen}\, \phi\, \breve{\boldsymbol{j}} + r_z\, \breve{\boldsymbol{k}}$$

resultando para el producto $\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -r_z R\, \omega\, \cos\phi\, \breve{\boldsymbol{i}} - r_z R\, \omega\, \mathrm{sen}\, \phi\, \breve{\boldsymbol{j}} + R^2 \omega\, \breve{\boldsymbol{k}}$$

El momento angular se obtiene multiplicando la expresión anterior por m. Así,

$$\boldsymbol{l} = -m\, r_z\, R\, \omega \cos\phi\, \breve{\boldsymbol{i}} - m\, r_z\, R\, \omega\, \mathrm{sen}\, \phi\, \breve{\boldsymbol{j}} + m\, R^2 \omega\, \breve{\boldsymbol{k}}$$

Es evidente que la misma situación descripta desde dos sistemas de coordenadas diferentes manifiesta características diferentes. En el primer caso, por ejemplo, la constancia de la velocidad angular impone un momento angular constante y proporcional a la velocidad angular a través de un número (mR^2). En el segundo caso, no es así; no sólo el momento angular no es constante sino que la relación entre el momento angular y la velocidad angular no se establece a través de un número.

El momento angular de una partícula es la magnitud adecuada para poner en evidencia la componente de rotación que pueda tener un cierto movimiento. Si prestamos un poco de atención al hecho que el momento angular marca de qué manera rota una partícula o si se dirige hacia la izquierda o hacia la derecha según la dirección de observación, advertiremos que el momento angular encierra propiedades de simetría y tal vez sea el concepto de simetrías aquél al que se apunta con el momento angular. Se insiste en que depende totalmente del punto de vista (del observador) y que, por lo analizado antes, la descripción puede ser algo complicada. Sin embargo, y retomando el enfoque que hemos hecho hasta ahora, hay innumerables situaciones para las cuales, con una elección experta del sistema de coordenadas, es simple extraer información relativa al movimiento a partir del momento angular.
Tal vez, pensando un poco, el lector descubra que "el punto de vista del observador" tiene mucho que ver con las simetrías del espacio.

2.4 - Generalización de las Leyes de Newton
El movimiento de un sistema de partículas

Veamos ahora (si admitimos conocer la metodología para describir el movimiento de una partícula en términos de las Leyes de Newton) cómo encaramos la descripción del movimiento de un sistema de partículas. Es decir, si por algún motivo estamos interesados en un objeto que está constituido por más de una partícula, cómo describimos su movimiento. Empecemos por partes. Analicemos qué sabemos hacer para describir el movimiento de una partícula:

- elegimos un sistema de referencia inercial, es decir, un sistema para el cual una partícula libre es observada con cantidad de movimiento cons-

tante

- admitimos que respecto a tal sistema, la cantidad de movimiento de la partícula en un instante cualquiera t, es $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$
- evaluamos la influencia del medio componiendo las fuerzas (que ejercen los objetos del medio) sobre la partícula en cuestión: $\boldsymbol{F_R} = \sum_k \boldsymbol{F_k}$. ($\boldsymbol{F_R}$ será, en general, un vector dependiente de la posición y del tiempo y, eventualmente, de la velocidad)
- planteamos la Segunda Ley de Newton:

$$\boldsymbol{F_R}(\boldsymbol{r},t) = \frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

- planteamos, si es necesario el punto de vista del observador, el momento angular y analizamos la información que aporta y (tal vez con la ayuda de libros de matemática o por algún amigo matemático)
- resolvemos a partir de la cantidad de movimiento o del momento angular (o de ambos) las ecuaciones para obtener alguna de las funciones $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ o $\boldsymbol{a}(t)$ y, a través de las operaciones que las vinculan, determinamos cualquiera de las otras. No debe perderse de vista que la determinación de la posición de una partícula requiere de la especificación de dos constantes (posición y velocidad en un dado momento) y la determinación de la velocidad, de una constante (la velocidad en un cierto momento).

Discutamos un poco más el último punto. Se mencionan a la cantidad de movimiento y al momento angular como magnitudes alternativas en la caracterización del movimiento de una partícula. Tratándose ambas de magnitudes instantáneas, no permiten *per se* una predicción. Sus valores en un instante no contienen información de los valores que se tenían ni del que tendrán en

instantes anteriores o posteriores al considerado. La relación que determina la forma en que dichos valores evolucionan en el tiempo es la que contribuye a la predicción. Para la cantidad de movimiento, la Segunda Ley de Newton aporta la relación, pero para el momento angular no la hemos determinado aún.

Veamos si podemos calcular los cambios en el tiempo del momento angular.

A partir de la definición $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ se puede evaluar $d\boldsymbol{l}/dt$ como:

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R$$

donde se ha usado la propiedad que $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p}$ son siempre paralelos y la segunda Ley de Newton para resumir $d\boldsymbol{p}/dt$ en la resultante $\boldsymbol{F_R}$ de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Así, hemos obtenido la relación:

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R$$

Este resultado debe discutirse en términos del concepto de momento de un vector (que ya fue introducido al analizar el momento angular). En efecto, los cambios del momento angular al transcurrir el tiempo, ocurren según el resultado de la operación $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R$ entre la posición de una partícula y la resultante de las fuerzas sobre ella. Tal operación es absolutamente análoga a la que define el momento angular (o momento de la cantidad de movimiento) y consecuentemente encierra conceptos matemáticos equivalentes.

El resultado del producto $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ es conocido como momento de la fuerza $\boldsymbol{F}$ y habitualmente designado con la letra $\boldsymbol{\tau}$ (tau):

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

El momento de una fuerza $\boldsymbol{F}$ resulta no nulo cuando la fuerza no es paralela al vector que indica la posición del punto donde está aplicada. El vector momento de una fuerza $\boldsymbol{\tau}$ tiene dirección perpendicular al plano determinado por $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{F}$, sentido según la regla del tirabuzón y módulo:

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{F}|\ \mathrm{sen}\,\alpha$$

siendo α el ángulo entre vectores. Agrupando $|\boldsymbol{r}|\,\mathrm{sen}\,\alpha$ se observa que el módulo del momento es directamente proporcional al módulo de la fuerza y a la distancia entre la dirección de la fuerza y el origen de coordenadas, distancia que se conoce como brazo de palanca de la fuerza respecto a un origen dado (el brazo de palanca es el análogo al parámetro de impacto introducido al discutir el momento angular).

Evaluar el momento de una fuerza sobre una partícula es evaluar la posibilidad que, por acción de la fuerza, cambie la dirección del vector posición de la partícula, es decir, evaluar si la fuerza puede inducir una rotación de la partícula.

Retomando la discusión relativa a los cambios del momento angular de una partícula, hemos encontrado que

$$\boldsymbol{\tau}_R = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_R = \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}$$

o sea que el momento de la resultante de las fuerzas sobre una partícula es responsable de los cambios del momento angular de la partícula. En otras palabras, si el momento angular indica si una partícula rota o no respecto a un dado observador, el momento de la resultante de las fuerzas modifica esta situación: si no rota en un instante, lo hará en el instante siguiente o, si está rotando de una cierta manera en un instante, cambiará la manera de rotar en el instante siguiente.

Si el resumen fue bueno, tiene que haber quedado claro que independientemente del enfoque, para determinar por ejemplo la posición de un conjunto de ocho partículas, debemos plantear y resolver ocho ecuaciones y conocer diez y seis constantes y para un conjunto de un gran número de partículas la tarea se complica bastante por el número de ecuaciones a resolver y constantes a determinar.

La descripción de un conjunto cualquiera de partículas se puede hacer de una manera "compacta" si se generalizan los conceptos definidos para una partícula. Por "compacto" queremos indicar a través de un número reducido de ecuaciones –menor, en lo posible, que el número necesario para resolver el problema partícula por partícula.

Diremos para comenzar que cualquier propuesta que hagamos al generalizar magnitudes que ayuden a describir un sistema de N partículas, debe coincidir con lo determinado por las Leyes de Newton al particularizar el caso N=1. A su vez, usaremos la palabra *sistema* para referirnos al conjunto de partículas que estamos estudiando sin confundirla con la que indica al sistema de referencia (que lo llamaremos *observador*). Bien, comencemos…

Si un sistema está constituido por N partículas, cada una de masa m_i, definimos masa M del sistema a la suma de las masas de las partículas que lo componen:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

y, recordando que la cantidad de movimiento representa la idea de que hay materia desplazándose en el espacio, definiremos a la cantidad de movimiento $\boldsymbol{P}$ del sistema a la suma de las cantidades de movimiento de cada partícula que compone el sistema. Así, si en un cierto momento t las velocidades de

las partículas son los vectores $\boldsymbol{v}_i$, se tiene:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i$$

Por su parte, si la resultante de las fuerzas sobre cada partícula representa la influencia del medio en el cual se mueve cada partícula y determina los cambios en la cantidad de movimiento de cada partícula (perdón por la repetición de "cada partícula" pero no quisiera que se pierda la idea de que las leyes fueron enunciadas para UNA partícula), la composición de todas las resultantes sobre todas las partículas del sistema debería determinar el cambio de la cantidad de movimiento del sistema. Efectivamente,

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^R = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$$

Pues bien, las generalizaciones que hemos hecho parecen intuitivas y adecuadas en tanto lo que de ellas se obtiene al considerar un sistema constituido por una sola partícula (N=1) es justamente lo que indican las Leyes de Newton. Sin embargo, tengamos un poco de cuidado. Veamos…

Es claro, para una partícula, que su velocidad puede obtenerse dividiendo su cantidad de movimiento por su masa. Pues también lo es para un sistema de partículas. Así, lo que se entiende por velocidad de un sistema $\boldsymbol{V}_{\text{Sist.}}$ es:

$$\boldsymbol{V}_{Sist.} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i}{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \boldsymbol{v}_i$$

Evidentemente, no es la suma de las velocidades de cada partícula que constituye el sistema. Según se puede interpretar de la expresión anterior, las partículas de un sistema contribuyen a la velocidad del conjunto de acuerdo con una cierta jerarquía. La jerarquía se establece dependiendo de cuán represen-

tativa sea la masa de la partícula en relación a la masa del conjunto, es decir, según lo indique el cociente m_i/M. El rango de valores del cociente m_i/M (para un sistema cualquiera) es:

$$0 < \frac{m_i}{M} \leq 1$$

La cota superior de 1 se alcanza para el caso particular de un sistema de una sola partícula. El cociente marca con qué peso la velocidad de una cierta partícula aporta a la velocidad del todo. Las partículas más masivas (respecto al total) son las determinantes de la velocidad del sistema.

De forma equivalente se analiza lo que se entiende por posición de un sistema de partículas. Si retomamos la definición de velocidad, se puede admitir que la velocidad de un sistema es el cambio respecto al tiempo de la "posición del sistema". Así,

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{Sist.}} = \frac{d\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{Sist}}}{dt}$$

de lo cual se deduce que el punto del espacio marcado por el vector $\boldsymbol{R}_{\text{Sist.}}$ es lo que se denomina "posición del sistema" y se lo define como:

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{Sist.}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r_i}}{M} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \boldsymbol{r_i}$$

de interpretación análoga a la hecha para la velocidad del sistema.

De manera especial debemos detenernos en el análisis de la resultante de las fuerzas sobre un sistema. Efectivamente, la resultante de las fuerzas sobre un sistema es la suma de las fuerzas resultantes sobre cada partícula que lo constituye. Estas últimas resultantes manifiestan la influencia sobre cada partícula de aquéllas otras que también son parte del sistema y de las que no

lo son. La fuerza que una partícula del sistema ejerce sobre otra, también del sistema, se llama fuerza interna y la ejercida por una partícula que no pertenece al sistema, se llama fuerza externa. De manera que la resultante de las fuerzas sobre un sistema resume la influencia del medio sobre el sistema y la influencia que las partículas del sistema se hacen entre sí. El Principio de Acción y Reacción permite asegurar que a la resultante de las fuerzas sobre un sistema sólo contribuirán las fuerzas externas ya que las internas se anulan de a pares en tanto son pares de vectores iguales y opuestos. De esta forma la resultante de las fuerzas sobre un sistema será:

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\boldsymbol{R}} = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{Ext.}$$

siendo k el índice contador de fuerzas externas.

Es habitual sintetizar todas las definiciones introducidas en la descripción de un conjunto de partículas en la relación:

$$\sum_k \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{Ext.}} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} m_i\, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}} = \frac{d}{dt} M\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{Sist.}}$$

Esta relación es absolutamente análoga a la que se tiene para una partícula y da lugar a interpretar un sistema de partículas como una única partícula de masa M, situada en el punto del espacio indicado por $\boldsymbol{R}_{\text{Sist.}}$ y con velocidad $\boldsymbol{V}_{\text{Sist.}}$, influida por el medio que la rodea. Lo que se ha llamado posición del sistema $\boldsymbol{R}_{\text{Sist}}$ se denomina de manera más adecuada centro de masa del sistema y la velocidad del sistema, velocidad del centro de masa.

Pues bien, según parece hasta ahora, la descripción de un sistema no es buena en tanto es idéntica a la de una partícula. No está claro en las generalizaciones que hemos hecho y que parecen muy intuitivas, cómo se distribuyen las partículas que constituyen el sistema y de qué manera se transporta la

materia que ellas representan. Mejoremos un poco la descripción introduciendo el momento angular del sistema y repasando un poco las ideas que encierra. Recordemos que el momento angular es una magnitud que relaciona ambas informaciones: posición y cantidad de movimiento. Se definió momento angular $\boldsymbol{l}$ de una partícula en el instante t, como:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

siendo $\boldsymbol{r}$ la posición de la partícula en ese mismo instante y $\boldsymbol{p}$=m$\boldsymbol{v}$ su cantidad de movimiento. Así, para un sistema de partículas, llamaremos $\boldsymbol{L}$ al momento angular que resulta de sumar todos los momentos angulares de las partículas que componen el sistema:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{N} \boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

El momento angular de una partícula manifiesta por definición la eventualidad de que la posición y la cantidad de movimiento sean o no colineales. Si en un instante resultaran colineales ($\boldsymbol{l}=\boldsymbol{0}$), en el instante siguiente la partícula se habrá acercado (o alejado) sin cambiar su dirección (relativa al origen del observador). Por el contrario, si en un dado momento la dirección de $\boldsymbol{r}$ no es paralela a la dirección de $\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{l}\neq\boldsymbol{0}$), un instante después la posición de la partícula tendrá necesariamente una dirección diferente de la que tenía. Cuando el seguimiento de una partícula, por un dado observador, requiere del cambio de dirección del vector posición de la partícula, se dice que la partícula está rotando relativa al tal observador. El fenómeno depende explícitamente del observador (analice la definición) y debe entenderse al momento angular como un pariente directo de una rotación. Poseer momento angular es asegurar que el vector posición está cambiando su dirección. Claro ¿el vector posición de qué? Para el caso de una partícula, es evidente; pero… ¿para una sis-

tema de partículas?

Analicemos el momento angular de un sistema de partículas. Por definición es:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

Ahora bien, si en lugar de considerar de manera directa la posición de cada partícula relativa al observador, la reemplazamos por la posición relativa al centro de masa más la posición del centro de masa,

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_{CM} + \boldsymbol{r}_i^{CM}$$

es posible acomodar la expresión del momento angular como:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i^{CM} \times m_i \boldsymbol{v}_i^{CM}$$

Note el lector que se ha usado una propiedad característica de las posiciones y velocidades relativas al centro de masa:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i^{CM} = \boldsymbol{0}$$

y

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^{CM} = \boldsymbol{0}$$

(el lector advertirá que si se dividen las sumas por la masa del sistema, las mismas representan la posición y la velocidad del centro de masa respecto al centro de masa; ambos nulos).

El momento angular de un sistema de partículas expresado en términos relativos al centro de masa nos permite modelar el movimiento del sistema como si se efectuaran dos tipos de movimientos simultáneamente. Uno de ellos co-

rresponde al momento angular del sistema como un todo con cantidad de movimiento ***P***, cuya forma es idéntica a la del momento angular de una partícula, conocido con el nombre de momento angular orbital. El otro es el asociado al momento angular de las partículas relativo al centro de masa y es denominado momento angular intrínseco o momento angular de *spin* (palabra inglesa usada para *giro*). Es común hablar de translación de un sistema cuando su momento angular intrínseco es nulo o despreciable frente al momento angular orbital y por otra parte, cuando el momento angular orbital es nulo o despreciable frente al momento angular intrínseco, se habla de rotación del sistema. A su vez, la comparación entre el momento angular de spin y el orbital es lo que permite encuadrar el estudio de un sistema dentro del modelo de partícula: una partícula sólo posee momento angular orbital y por ende, un sistema con momento angular intrínseco nulo se comporta como una partícula.

La magnitud cuyo efecto es modificar en el tiempo al momento angular puede ser encontrada por simple derivación. En efecto, a partir de la definición de ***L*** tenemos:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\times\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i\times\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\tau}^R$$

donde se ha considerado la Segunda Ley de Newton y que la velocidad $\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$ es paralela a la cantidad de movimiento $\boldsymbol{p}_i$. La magnitud $\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{R}}$ es la resultante de los momentos de las fuerzas. De manera que el comportamiento temporal del momento angular de un sistema está determinado por la resultante de los momentos de las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema.

Si un sistema de partículas posee, en un instante cualquiera t, una cantidad de movimiento $\boldsymbol{P}$ y un momento angular $\boldsymbol{L}$, en un instante posterior $t+dt$, dichas magnitudes se habrán modificado en las cantidades $d\boldsymbol{P}$ y $d\boldsymbol{L}$ como consecuencia de la acción de la resultante de las fuerza y la resultante de los momentos de las fuerzas de acuerdo con las relaciones:

$$d\boldsymbol{P} = \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \right) dt$$

$$d\boldsymbol{L} = \left(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \right) dt$$

Resumiendo, si se conocen $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{L}$ de un sistema en un instante dado, la resultante de las fuerzas y la de los momentos de las fuerzas permiten conocer la evolución de dichas magnitudes y en consecuencia la del sistema. Las relaciones que establecen la evolución son conocidas con el nombre de *ecuaciones de movimiento* del sistema y su forma más ortodoxa es:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \qquad \text{y} \qquad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

La validez del Principio de Acción y Reacción simplifica las relaciones pues permite demostrar que tanto la resultante de las fuerzas sobre un sistema como la resultante de los momentos de dichas fuerzas están determinadas exclusivamente por las fuerzas que el medio ejerce sobre el sistema (las fuerzas que las partículas del sistema se ejercen entre ellas se anulan de a pares de la misma manera que los momentos de las mismas). Veamos qué ocurre con los

momentos de las fuerzas.

Analicemos el resultado de un par de fuerzas internas en relación al momento que producen. Supongamos que de un sistema de partículas seleccionamos la partícula *i* y la partícula *j*. Admitamos también que sobre la partícula *i* actúa, entre otras, una fuerza $\boldsymbol{F}_{ij}$ producida por la partícula *j*. Entonces, por el Principio de Acción y Reacción, sobre la partícula *j*, actuará una fuerza $\boldsymbol{F}_{ji}$ producida por la partícula *i*, de igual magnitud, sentido contrario (ambas fuerzas en la dirección de la recta que une las partículas -tenga esto muy presente). Se trata, por definición, de un par de fuerzas internas. Si la partícula *i* está ubicada en la posición $\boldsymbol{r}_i$, el momento de la fuerza $\boldsymbol{F}_{ij}$ será:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

Análogamente, para la partícula *j*, el momento de la fuerza $\boldsymbol{F}_{ji}$ será:

$$\boldsymbol{\tau}_{ji} = \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}$$

de manera que la suma de ambos momentos es:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ji} = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las fuerzas $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ la última relación se puede reescribir como:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ji} = (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij}$$

dando como resultado el vector nulo en virtud del paralelismo entre $(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ y $\boldsymbol{F}_{ij}$.

Como la resultante de los momentos de las fuerzas internas es una suma sobre todos los pares de fuerzas $\boldsymbol{F}_{ij}$ existentes, tal suma es siempre nula.

En virtud de las ecuaciones de movimiento podemos afirmar que ninguna acción interna puede cambiar el movimiento de un sistema. Un conductor de automóvil no consigue nada tirando del volante ni nos podemos elevar tirán-

donos de la cabellera; las fuerzas son efectivamente ejercidas (el volante se puede marcar o torcer y el cuero cabelludo duele) pero únicamente un mecanismo que induzca la aplicación de una fuerza ejercida por el sistema sobre el medio externo producirá la debida reacción que, desde afuera, altere el movimiento del sistema (frenos o paracaídas de cola o flexión de las piernas haciendo fuerza contra el piso o guinche).

Las ecuaciones que representan a la cantidad de movimiento y el momento angular de un sistema de partículas no presentan diferencias funcionales significativas en relación a las de una partícula, salvo en la expresión del momento angular, que en el caso de un sistema tiene término intrínseco.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema de N partículas que hemos encontrado permiten determinar la evolución de la cantidad de movimiento del sistema y de su momento angular. Ambas magnitudes son vectores que caracterizan el sistema de manera aditiva (por suma de las magnitudes correspondientes) y en el resultado no se obtienen detalles del movimiento de los constituyentes del sistema. En pocas palabras, la descripción es global. Para algunos casos particulares de sistemas cuyos constituyentes están obligados a mantener alguna relación específica, la descripción puede ser más detallada. La existencia de relaciones entre las partículas que forman un sistema agrega ecuaciones que permiten completar la información que se obtiene con las ecuaciones de movimiento. Toda ecuación adicional (a las de movimiento) se denomina ecuación de vínculo y contribuye a profundizar la descripción. Veamos... los denominados sistemas rígidos o cuerpos rígidos o sólidos perfectos son conjuntos de partículas cuyas distancias relativas son constantes. Tal constancia suministra una gran cantidad de relaciones que involucran a todas las partículas de manera que, conociendo el movimiento de una de

ellas, se puede inferir el movimiento de cualquier otra. El hecho de que una partícula arrastre a otra mediante una cuerda inextensible establece una relación (la constancia de la distancia entre partículas) que permite asegurar que, en todo instante, los valores de las velocidades de las partículas son iguales. Si se advierte que una partícula rota alrededor de un eje, todas las demás efectuarán la misma rotación (salvo las que están eventualmente sobre el eje, claro). Las ecuaciones de vínculo deben establecerse para cada caso en particular y siempre representan relaciones entre los constituyentes de un sistema. Intentaremos en lo que sigue discutir algunas consecuencias de las ecuaciones de movimiento. Probablemente repetiremos algunos conceptos. No está mal ya que la idea es que se comprendan. Las magnitudes ya definidas requieren de algún tipo de encuadre según la temática en que se las va a usar y tal encuadre es una especie de reiteración de la idea. Con seguridad, al presentar algunos ejemplos, el lector notará que siempre se describe lo que le pasa a un cubo, esfera o cilindro y en consecuencia muchos lectores creen que la Física es eso que estudia cuerpos y cosas que no se ven, ni de casualidad, en la vida cotidiana. Pues lamento desilusionar a esos lectores. En primer lugar el movimiento de un cuerpo real cualquiera (aún de formas sencillas) es sumamente complicado de simbolizar y por otra parte, la simbolización de cuerpos mediante objetos simples (los tales cubos, esferas o cilindros) es muy pero muy útil para destacar los fenómenos fundamentales (y no los accesorios que no hacen a la esencia). También es claro que a veces lo accesorio es lo que interesa, pero sólo podrá entrar en detalles aquél que conozca perfectamente el significado de las Leyes y sus consecuencias.

2.5 - Cuerpos rígidos

El sistema mecánico más sencillo de estudiar es denominado cuerpo rígido. Un sistema de partículas es un cuerpo rígido si las distancias entre partículas es constante bajo cualquier circunstancia. Si bien los objetos sólidos no son realmente cuerpos rígidos, en la mayoría de los estudios se los puede suponer como tales. Analizaremos en lo que sigue la descripción mecánica de un cuerpo rígido.

Las ecuaciones que describen el movimiento de un sistema cualquiera de partículas son:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{Ext.}$$

donde $\boldsymbol{F}_j^{Ext.}$ es una de la n fuerzas externas aplicadas sobre el sistema en el punto indicado por $\boldsymbol{r}_j$,

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{V}_{CM}$$

es la cantidad de movimiento del sistema y

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i^{CM} \times m_i \boldsymbol{v}_i^{CM} = \boldsymbol{L}_{Orbital} + \boldsymbol{L}_{Interínseco}$$

es el momento angular del sistema.

Tratándose de un cuerpo rígido (recordar que las partículas mantienen distancias constantes entre ellas) la masa del cuerpo es constante y la única posibilidad de movimiento de las partículas respecto al centro de masa es la de rotar (no es posible alejarse o acercarse al centro de masa). Más todavía, si

una de las partículas rota respecto a un eje que pasa por el centro de masa, con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, todas las demás también lo hacen con la misma velocidad angular. Cada partícula que constituye el cuerpo describe un circunferencia alrededor del eje de rotación. Así,

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$$

Entonces, la ecuación correspondiente a la cantidad de movimiento se puede llevar a la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{j}^{Ext.} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}}$$

y en el momento angular del sistema, la parte intrínseca (o de spin) tiene un elemento común a todas las partículas: la velocidad angular.

$$\boldsymbol{L}_{Interínseco} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}} \times m_i \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}} \right)$$

Evaluar esta última expresión es un poco laborioso. Las etapas a seguir son: elegir un sistema de coordenadas de manera que el eje z, por ejemplo, tenga la dirección de la velocidad angular ($\boldsymbol{\omega} = \omega\ \breve{\boldsymbol{k}}$), admitir que el vector $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$ tiene componentes $x_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}, y_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}, z_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{CM}}$ y hacer las operaciones. El resultado es

$$\boldsymbol{L}_{Int.} = \left(-\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^{CM} z_i^{CM} \right) \omega\ \breve{\boldsymbol{i}} + \left(-\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^{CM} z_i^{CM} \right) \omega\ \breve{\boldsymbol{j}} +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_i^{2^{CM}} + y_i^{2^{CM}} \right] \right) \omega\ \breve{\boldsymbol{k}}$$

La forma del momento angular intrínseco es aún algo complicada pero con nuevas consideraciones sobre el cuerpo que se estudia se puede simplificar un poco más.

Si la forma del objeto estudiado presenta ciertas simetrías respecto al eje de rotación, algunas sumas de la última expresión se pueden anular. Veamos, presentar simetrías quiere decir cumplir con algunas condiciones geométricas. Estudiaremos cuerpos en los cuales para toda masa m_i en las coordenadas x_i^{CM}, y_i^{CM}, z_i^{CM} existe siempre otra masa igual en las coordenadas $-x_i^{CM}$, $-y_i^{CM}$, z_i^{CM}. De tales cuerpos se dice que poseen simetría cilíndrica y son anillos, cilindros huecos o macizos, discos, etc. Cuerpos como esferas o cubos (huecos o macizos) satisfacen la condición más amplia que para toda masa m_i en las coordenadas x_i^{CM}, y_i^{CM}, z_i^{CM} existe siempre otra masa igual en las coordenadas $-x_i^{CM}$, $-y_i^{CM}$, $-z_i^{CM}$.

Así, el momento angular intrínseco de cuerpos simétricos que rotan alrededor de un eje cuya dirección no cambia en el espacio (y que fue elegida como el eje z) se puede reducir a la forma

$$\boldsymbol{L}_{Interínseco} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left[x_i^{2^{CM}} + y_i^{2^{CM}} \right] \right) \omega \breve{\boldsymbol{k}}$$

siendo $x_i^{2^{CM}} + y_i^{2^{CM}}$ el cuadrado de la distancia de cada masa m_i al eje de rotación.

El contenido del paréntesis de la última expresión se conoce como momento de inercia I_{CM} del cuerpo, respecto a un eje de simetría que pasa por el centro de masa del sistema. Y entonces se obtiene

$$\boldsymbol{L}_{Interínseco} = I_{CM}\ \omega \breve{\boldsymbol{k}} = I_{CM}\ \boldsymbol{\omega}$$

Al cabo de todas estas consideraciones para el momento angular, las ecuaciones que describen el movimiento de un cuerpo rígido simétrico que rota alrededor de un eje cuya dirección se mantiene en el espacio son

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \frac{d(M\boldsymbol{V}_{CM})}{dt} = M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{R}_{CM} \times \boldsymbol{P} + I_{CM}\boldsymbol{\omega}\right) = \boldsymbol{R}_{CM} \times M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}} + I_{CM}\boldsymbol{\alpha}$$

siendo $\boldsymbol{\alpha}$ la aceleración angular del cuerpo.

La forma más simple de las ecuaciones se obtiene para cuerpos con simetría cilíndrica o esférica que se desplazan en línea recta. En estas circunstancias se puede elegir el origen de coordenadas tal que el vector posición del centro de masa sea paralelo a la aceleración del centro de masa. El origen debe ser un punto cualquiera sobre la trayectoria descripta por el centro de masa (una recta). En ese caso las ecuaciones son

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = M\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{CM}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j^{Ext.} = I_{CM}\boldsymbol{\alpha}$$

El uso de estas ecuaciones, junto con algunas otras que representen circunstancias particulares (ecuaciones de vínculo) en las que ocurre el movimiento del cuerpo estudiado, permite proponer buenos modelos para un gran número de situaciones en las que hace falta describir y predecir eventos en base al movimiento de los cuerpos.

Una conclusión importante en lo desarrollado hasta ahora es que resulta trascendental establecer, al momento de encarar algún estudio relacionado con el

movimiento de un cuerpo, las fuerzas y sus puntos de aplicación para poder explicitar las ecuaciones.

Cómo representar las fuerzas y dónde están aplicadas, de eso trata los que sigue. El enfoque se hace a través de algunos ejemplos.