Capítulo 1

Descripción del movimiento. El formalismo

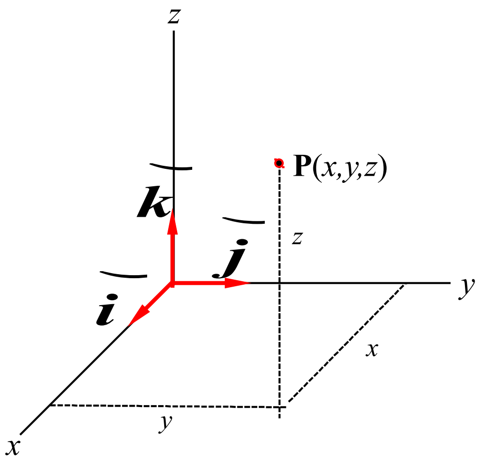
Introducción

El movimiento de los objetos, unos respecto de otros, presenta una diversidad tan extraordinaria que es prácticamente imposible iniciar una descripción sin antes establecer algún tipo de límites a la tarea que pretendemos enfrentar. En primer lugar, debe resultar lo más claro y explícito posible indicar que lo que entendemos por movimiento de un objeto, es un concepto total y absolutamente relativo a otro u otros objetos. Carece de sentido hablar de movimiento de un objeto independientemente de la existencia de otros. En pocas palabras y apelando a una situación irreal, sería incomprensible caracterizar el movimiento de un objeto si éste fuera el único que existiese. Con relación a las limitaciones dentro de las cuales vamos a iniciar la descripción del movimiento de un objeto indicaremos, como primera aproximación, que no tendremos en cuenta la forma particular del objeto en cuestión. Es decir, no analizaremos aquellas características que estén vinculadas al hecho que el objeto ocupa un cierto volumen en el espacio. Iniciaremos nuestra descripción admitiendo que es suficiente representar a cualquier objeto con un punto del espacio (sin formas, ni caras, lados o facetas) y que las sucesivas posiciones de ese punto del espacio representan satisfactoriamente la trayectoria del objeto estudiado. Tal vez el lector crea que nos estamos limitando mucho al declarar que representaremos con un punto a cualquier objeto. Sin embargo, existen muchas observaciones para las cuales es perfectamente válida la asociación entre un objeto y un punto. Ejemplos: si se estudia el movimiento de una estrella o planeta en el firmamento ¿le parece que es indispensable saber en qué lugar está la gran mancha roja de Júpiter para describir su movimiento en el cielo noche a noche? ¿Es relevante la información de para dónde apunta el Aconcagua al intentar determinar los diferentes lugares donde está nuestro planeta en su viaje alrededor del sol? ¿Hace falta indicar cuántas ruedas o puertas tiene un auto o si el motor es trasero o delantero, si pretendemos narrar su movimiento entre Buenos Aires y La Plata? Tal vez las especificaciones que hemos mencionado sean importantes en otras circunstancias (cuántas vueltas sobre sí mismo efectúa Júpiter o la Tierra en un cierto intervalo de tiempo o qué esta pasando con las ruedas pues el auto vibra al alcanzar 80 km/h). Bien, en tanto admitamos que las sucesivas posiciones de un punto representan bien lo que queremos describir del movimiento de un objeto, diremos que el objeto se comporta como una partícula. Una partícula será representada por un punto del espacio. Si, en cambio, necesitamos incluir nociones sobre la orientación del objeto porque no es suficiente la información obtenida a partir de lo que se representa con un punto, entonces diremos que el objeto se comporta como un cuerpo (realmente, se dice que no se comporta como partícula).

1.1 - El observador y lo observado

Indicar que vamos a utilizar ciertos elementos abstractos (puntos, curvas, relaciones, etc.) para representar hechos de la realidad (movimientos de objetos) es elaborar un modelo. Veremos en lo que sigue cómo es posible describir el movimiento de un objeto usando el modelo de una partícula o punto que representa materia.

Por sistema de referencia se entiende al conjunto de objetos y mecanismos que nos permiten especificar las coordenadas de un punto del espacio. A tal conjunto de cuerpos se lo simboliza como un sistema de coordenadas. Es más, comúnmente se simboliza todo en un dibujo de tres rectas que se cortan formando 90° entre sí. Al resultado de las medidas de coordenadas, junto con las indicaciones de los momentos en que fueron determinadas (indicados por un reloj), lo llamaremos observación. Es común utilizar el término "observador" para referirse al sistema de referencia. Si bien no es común mencionarlo, se admite que el resultado de una observación no es afectado ni por el observador ni por los métodos de medida que usa.



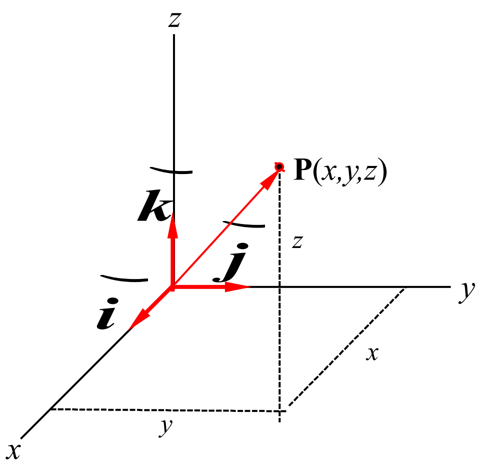
El resultado de observar el movimiento de una partícula podría ser el conjunto de coordenadas de los puntos por los que la partícula pasa acompañado de las respectivas indicaciones del reloj:

Indicación del reloj (s)	Coordenadas (m)		
t_1	x_1	y_1	z_1
t_2	x_2	y_2	z_2
t_3	x_3	y_3	z_3
...	...	...	...
t_n	x_n	y_n	z_n

Las cantidades t_i, x_i, y_i y z_i (con i = 1, 2, 3,..., n) son números y entre paréntesis se han marcado las unidades segundos (s) y metros (m).

1.2 - Las magnitudes fundamentales para describir el movimiento: posición, velocidad y aceleración

Supongamos que en el instante t una partícula está en el punto de coordenadas x, y, z respecto de un cierto sistema de referencia (no debe perderse de vista la relatividad de una ubicación o posición). Se denomina posición $\boldsymbol{r}$ de una partícula al vector, con unidades de longitud (m), cuyas componentes son justamente las coordenadas del punto en el que está la partícula:

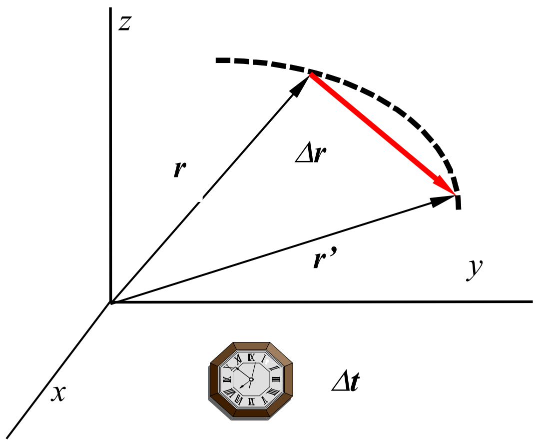


$$\boldsymbol{r} = x\,\bar{\boldsymbol{i}} + y\,\bar{\boldsymbol{j}} + z\,\bar{\boldsymbol{k}}$$

La idea subyacente en el concepto de movimiento es la de cambiar de posición o desplazarse a medida que el tiempo transcurre. Así que nos bastaría determinar que las coordenadas de la partícula observada son otras, en un instante posterior a t, para asegurar que la partícula se ha movido o que posee movimiento (siempre relativo al sistema de referencia en cuestión). Sea Δt el intervalo de tiempo transcurrido a partir de t, para el cual determinamos otras coordenadas para la partícula y llamemos a las nuevas coordenadas $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, donde los valores Δx, Δy y Δz representan los cambios respecto de las coordenadas originales. El nuevo vector posición ***r'*** estará determinado por las nuevas coordenadas como:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= (x+\Delta x)\,\breve{\boldsymbol{i}} + (y+\Delta y)\,\breve{\boldsymbol{j}} + (z+\Delta z)\,\breve{\boldsymbol{k}} = \\ &= x\,\breve{\boldsymbol{i}} + y\,\breve{\boldsymbol{j}} + z\,\breve{\boldsymbol{k}} + \Delta x\,\breve{\boldsymbol{i}} + \Delta y\,\breve{\boldsymbol{j}} + \Delta z\,\breve{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

Evidentemente, el nuevo vector posición está definido a partir del anterior y de una modificación designada por $\Delta\boldsymbol{r}$ (note que $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ es una diferencia entre dos posiciones). Tal modificación en la posición se denomina vector



desplazamiento o simplemente desplazamiento de la partícula. Sus componentes son los cambios en las coordenadas debidos a una modificación de la ubicación de la partícula. El vector desplazamiento comienza en el punto donde está la partícula en el instante t y termina en el punto donde está la partícula en el instante $t+\Delta t$.

La magnitud que mide la relación entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo en el que se ha producido, se denomina velocidad media de la partícula y se define como:

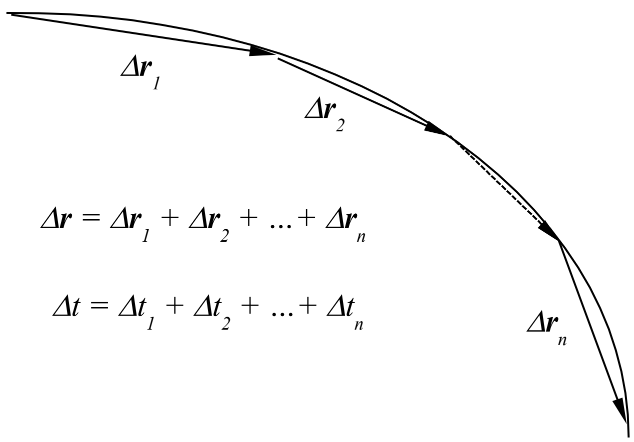
$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

De la definición surge que la velocidad media es un vector con la misma dirección y sentido que el desplazamiento (nótese que Δt es una cantidad escalar positiva, es decir, un número positivo) que se mide en unidades de longitud sobre unidades de tiempo (*m/s*). Las componentes de la velocidad media resultan:

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\breve{\boldsymbol{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\breve{\boldsymbol{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\breve{\boldsymbol{k}} = \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}\breve{\boldsymbol{i}} + \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{y}}\breve{\boldsymbol{j}} + \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{z}}\breve{\boldsymbol{k}}$$

(las barras por encima de las componentes de la velocidad sólo se usan para indicar que son componentes de la velocidad media y no deben confundirse con la notación habitual para vectores).

Si llamamos trayectoria de la partícula a la sucesión de puntos por los cuales la partícula pasa al transcurrir el tiempo, está claro que la velocidad media,



en un dado intervalo de tiempo, establece únicamente una relación entre dos de los puntos de la trayectoria y no posee ninguna información relativa a los puntos entre ellos. En otras palabras, la velocidad media permite una descripción "segmentada" de la trayectoria de una partícula. En términos geométricos, si la trayectoria se representa por una cierta curva, las velocidades medias en sucesivos intervalos de tiempo, permiten determinar desplazamientos sucesivos que aproximarían la curva mediante un conjunto de segmentos orientados (los sucesivos desplazamientos).

Evidentemente, la descripción en términos de sucesivos desplazamientos, obtenidos a través del conocimiento de velocidades medias no es enteramente satisfactoria. En tanto no se consideren velocidades medias en intervalos de tiempo suficientemente pequeños (entendiendo como pequeños a aquellos intervalos muy cortos comparados con el que transcurre entre el comienzo y el fin del estudio que estemos haciendo), no se mejorará la descripción. Cabría la pregunta: ¿cuál es el intervalo de tiempo más pequeño como para asegurar una descripción lo más detallada posible? ¿Cuál sería su valor? Tal vez las preguntas no tengan mucho sentido porque aún imaginando un intervalo de tiempo que creamos muy pequeño, siempre existirá el intervalo mil veces más chico. De manera que preguntar por algún valor particular no parece muy racional. Tenemos la absoluta seguridad de que es necesario que transcurra un cierto intervalo de tiempo para que deje de ser el instante que estamos considerando y nos damos cuenta que tal intervalo no se puede asociar a un número particular (por pequeño que sea). Para indicar el intervalo de tiempo más pequeño posible utilizaremos un símbolo: *dt* (léase "diferencial de t" o "diferencial t") que representa el intervalo de tiempo entre t y $t+\Delta t$, cuando Δt tiende a cero[1]. Definiremos velocidad instantánea $\boldsymbol{v}$ o simplemente velocidad $\boldsymbol{v}$ de una partícula en el instante t, como el límite al que tiende la velocidad media cuando el intervalo Δt tiende a cero:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

siendo $d\boldsymbol{r}$ el desplazamiento en el intervalo dt.

La velocidad media tiene, por definición, la dirección de la recta secante a la trayectoria que pasa por los puntos que marca el vector desplazamiento. La velocidad de una partícula en un cierto punto de su trayectoria, tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto considerado (el lector debe analizar el límite al que tiende la dirección de la recta secante por dos puntos de una curva cuando los puntos se aproximan tanto como se quiera). El sentido es, como en el caso de la velocidad media, el sentido del desplazamiento. Los diferentes valores de la velocidad $\boldsymbol{v}(t)$, en sucesivos instantes, permiten determinar una sucesión de desplazamientos $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$, que reproducen, con tanta aproximación como se quiera, la trayectoria de la partícula. En el intervalo entre t y $t+\Delta t$, el desplazamiento a partir de la posición en el instante t será naturalmente la suma de los sucesivos desplazamientos diferenciales $d\boldsymbol{r}$ (tal suma se denomina integral). Así, se puede expresar el desplazamiento en un cierto intervalo Δt como:

$$\Delta \boldsymbol{r}(\Delta t) = \int_{t}^{t+\Delta t} d\boldsymbol{r} = \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{v}(t)\,dt\,.$$

Es fácil admitir que en una trayectoria cualquiera (representada por una curva cualquiera) la velocidad será, en general, diferente en cada posición

[1] La palabra diferencial es una modificación de la palabra diferencia.

(piense el lector en relación a la dirección de la velocidad, al menos…). Se puede definir una magnitud para caracterizar los cambios en la velocidad de una partícula, de manera equivalente a la que se hizo para caracterizar los cambios de la posición. Se llama aceleración media a aquel vector que mide la relación entre el cambio en la velocidad y el intervalo de tiempo en el cual ocurrió el cambio:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

En virtud del mismo criterio de descripción que se tuvo para definir la velocidad, se define el vector aceleración instantánea ***a*** o simplemente aceleración ***a*** en el instante *t*, como:

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

donde $d\boldsymbol{v}$ el cambio de velocidad en el intervalo dt. Así, es posible describir los sucesivos cambios en la velocidad con la aproximación que se desee y, al cabo de un intervalo Δt a partir de t, el cambio en la velocidad será:

$$\Delta \boldsymbol{v}(\Delta t) = \int_{t}^{t+\Delta t} \boldsymbol{a}(t)dt\,.$$

1.3 - Movimiento uniformemente acelerado

Veamos ahora un caso particular que nos sirva para concretar la descripción del movimiento de una partícula y para insistir en algunas definiciones y sus consecuencias.

Supongamos que una partícula se mueve de manera que su aceleración es constante. Supongamos además, que en un instante t_o cualquiera, iniciamos el estudio del movimiento de la partícula, encontrándose ésta en la posición

$\boldsymbol{r}_o$ y con velocidad $\boldsymbol{v}_o$. Nos preguntamos ahora ¿cuál será la velocidad de la partícula en otro instante cualquiera t posterior a t_o? La definición de aceleración

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

nos indica que las modificaciones de la velocidad estarán determinadas en la forma:

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\ dt\,.$$

De manera que en el instante t, el cambio en la velocidad será:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} d\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}\ dt$$

Así, enfatizando una vez más que se trata de un movimiento con aceleración constante, la variación de la velocidad (a partir de su valor en t_o) resulta:

$$\Delta\boldsymbol{v} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}dt = \boldsymbol{a}\int_{t_0}^{t} dt = \boldsymbol{a}(t - t_0) = \boldsymbol{a}\Delta t\ ,$$

donde $\Delta t=(t-t_o)$ es el intervalo de tiempo que ha transcurrido a partir de t_o. De esta manera, es fácil deducir que la velocidad en el instante t será aquélla del instante t_o más el cambio "acumulado"[2] hasta el instante t:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ \Delta t$$

Siendo t_o el instante en que comenzamos el estudio del movimiento y $\Delta t = (\ t - t_o)$ el intervalo de tiempo transcurrido a partir de dicho instante, bien podríamos elegir t_o=0 de manera que t represente el intervalo de tiempo indicado por los relojes disparados en t_o. Si esta es la elección, la expresión anterior debería leerse como: "la velocidad $\boldsymbol{v}$ de una partícula cuyo movi-

[2] Se ha usado el término "acumulado" tratando de explicitar el concepto subyacente en la integración, en tanto ésta representa la suma de los sucesivos cambios de velocidad.

miento es uniformemente acelerado, t segundos luego del momento en que valía $\boldsymbol{v}_o$, es la suma del vector $\boldsymbol{v}_o$ y el vector que resulta de multiplicar $\boldsymbol{a}$ y t":

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ t$$

No puede perderse de vista que la cantidad t representa un valor positivo que indica cuánto tiempo ha transcurrido desde que comenzamos a analizar el movimiento.

Si conocemos la velocidad de la partícula al cabo de cualquier intervalo de tiempo, es posible determinar también, los cambios que se han sucedido en la posición de la partícula a partir de $\boldsymbol{r}_o$ donde estaba al comenzar el análisis y por lo tanto determinar la posición de la partícula en cualquier momento posterior a t_o.

Efectivamente, de la definición de velocidad surge que para cualquier intervalo de tiempo dt (contenido entre t_o y t) el desplazamiento es $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$, de manera que el cambio en la posición de la partícula resulta:

$$\Delta r = \int_{t_0}^{t} d\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}dt$$

y explicitando la velocidad se obtiene:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}(t - t_0)]dt = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}_0 dt + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t - t_0)dt = \boldsymbol{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t - t_0)^2$$

con lo cual se llega (en virtud de la elección de t_o) a:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\ t^2.$$

Así, la posición de la partícula t segundos luego de iniciar el estudio del movimiento (o t segundos luego de haber disparado los relojes), es la que se obtiene de agregarle a la posición $\boldsymbol{r}_o$ el cambio $\Delta\boldsymbol{r}$ resultante en t segundos:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\ t^2.$$

De manera tal que si una partícula se mueve con aceleración constante, la descripción de su movimiento, esta contenida en las expresiones:

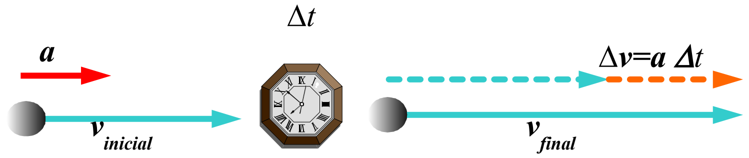
$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\ t^2$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ t$$

que pasaremos a interpretar y discutir a continuación.

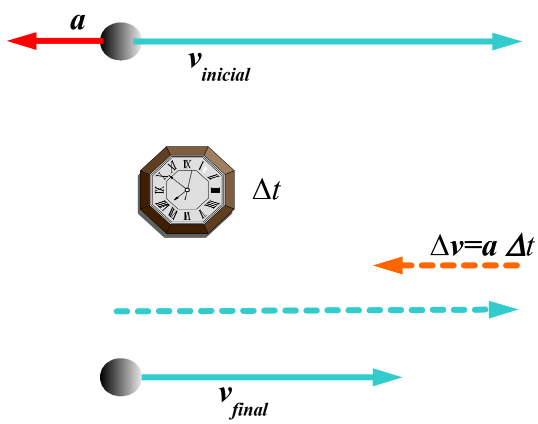
En primer lugar es indispensable destacar algo que es evidente en las ecuaciones y que puede, en otras circunstancias, conducir a nuevos puntos de vista no necesariamente intuitivos (¿el lector ha oído hablar del Principio de la incerteza o Principio de la incertidumbre?): para el movimiento con aceleración constante que estamos estudiando, la posición de la partícula se puede predecir rigurosamente (a partir de un cierto momento) si y sólo si se especifican la posición $\boldsymbol{r}_o$ y la velocidad $\boldsymbol{v}_o$ al inicio del estudio (comúnmente denominadas posición inicial y velocidad inicial respectivamente). Se parte de la base de que se conocen los vectores $\boldsymbol{r}_o$ y $\boldsymbol{v}_o$ y a partir de ellos se determinan $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{v}$.

Es indispensable adquirir experiencia en la elección del sistema de referencia, de manera que las expresiones que describen el movimiento tengan formas simples. La práctica muestra que es conveniente (no indispensable) elegir los ejes coordenados con direcciones tales que marquen alguna dirección característica del movimiento. Al describir un movimiento con aceleración constante, la dirección de la aceleración es característica del movimiento y representaremos los vectores que describen el movimiento en un sistema de coordenadas en el cual uno de sus ejes tiene la dirección de la aceleración.

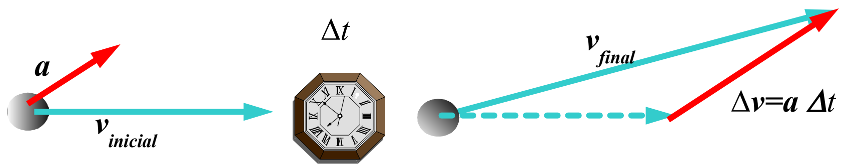
Si la aceleración es paralela a la velocidad inicial, el movimiento resultará



rectilíneo (todos los cambios en la velocidad serán paralelos a la aceleración y así a la velocidad inicial). Si la aceleración es además del mismo sentido que la velocidad inicial, las subsiguientes velocidades serán cada vez mayores y, en caso contrario, serán cada vez menores. Para el caso en que la aceleración no posea la misma dirección que la velocidad inicial, los cambios en la velocidad no resultarán paralelos a la velocidad inicial y el movimiento resultará no rectilíneo.



Luego de esta descripción cualitativa tratemos de concretar algunas situaciones que nos familiarizarán con el uso de las ecuaciones encontradas ayudándonos a comprender la información que ellas poseen.



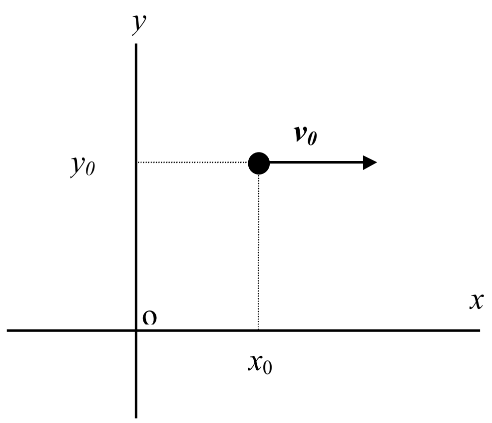
1.4 – Movimiento sin aceleración. Movimiento rectilíneo uniforme

Aceleración constante indica obviamente que es "siempre" la misma. La palabra "siempre" debe entenderse como "mientras estudiamos el movimiento". Tal condición no excluye el caso de una aceleración siempre nula. Las ecuaciones nos muestran que la posición y velocidad de una partícula en estas circunstancias son:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0}$$

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme, es decir, movimiento a velocidad constante. Eligiendo el sistema de coordenadas con un eje (digamos el eje *x* o el que el lector mejor le parezca) coincidente con la velocidad inicial (la dirección de la aceleración no está definida) resulta:

$$\boldsymbol{r_0} = x_0\ \boldsymbol{i} + y_0\ \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0\ \boldsymbol{i}$$

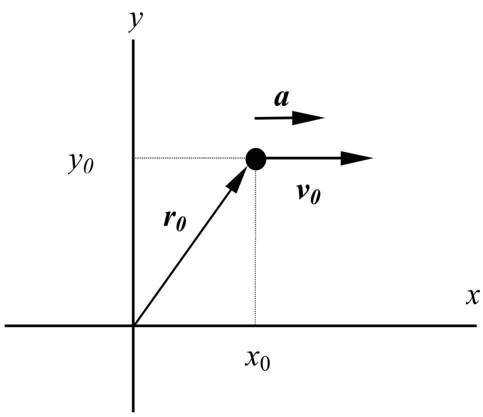


Una vez especificados los valores de la posición inicial y la velocidad inicial, las ecuaciones del movimiento nos indican qué resulta para la posición y la velocidad *t* segundos luego del comienzo del estudio. Así, simplemente reemplazando en las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme, resulta:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}} + (v_{\boldsymbol{0}}\breve{\boldsymbol{i}})\ t = (x_0 + v_{\boldsymbol{0}} t)\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = v_{\boldsymbol{0}}\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

Estas relaciones nos indican cómo se comportarán la posición y la velocidad en el movimiento rectilíneo uniforme: para las sucesivas indicaciones de los relojes (tenidas en cuenta en el valor de t) la posición únicamente cambia la coordenada x manteniendo constantes las coordenadas y y z (en los valores y_o y 0 respectivamente) y la velocidad resulta paralela al eje x (sólo tiene componente en la dirección del versor $\breve{\boldsymbol{i}}$, independiente del momento que se esté considerando).

1.5 - Aceleración y velocidad inicial en la misma dirección



Analicemos ahora el caso de aceleración constante paralela a la velocidad inicial. Hemos mencionado la posibilidades de que la aceleración tenga el mismo sentido o sentido contrario a la velocidad inicial. Veamos lo primero. Tomemos nuevamente un sistema de coordenadas con el eje x paralelo a la aceleración y por ende a la velocidad inicial. Así,

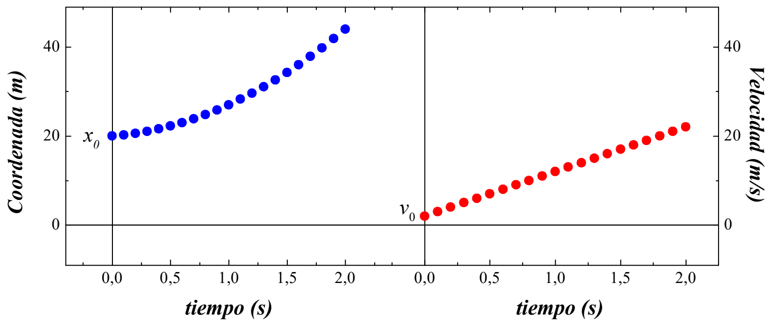
$$\boldsymbol{r_0} = x_{\boldsymbol{0}}\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}}$$
$$\boldsymbol{a} = a\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

son los vectores que permitirán determinar la posición y la velocidad al cabo de t segundos de iniciado el análisis de este movimiento. Reemplazando los vectores correspondientes en las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado, arribamos a las igualdades:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}} + (v_0\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t + \frac{1}{2}\,(a\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t^2 = (x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2)\ \breve{\boldsymbol{i}} + y_0\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0\ \breve{\boldsymbol{i}} + (a\ \breve{\boldsymbol{i}})\, t = (v_0 + at)\ \breve{\boldsymbol{i}}$$

Estas relaciones muestran que el movimiento es rectilíneo, variando únicamente la coordenada x y que la velocidad es siempre paralela al eje x, con módulo creciente (a medida que transcurre el tiempo).



En el caso que la aceleración tenga sentido opuesto a la velocidad inicial (comúnmente conocido como movimiento desacelerado o descelerado), el análisis es idéntico al recién planteado, salvo que la componente x del vector aceleración (siempre referido al sistema de coordenadas que hemos elegido para hacer la descripción) cambia de signo:

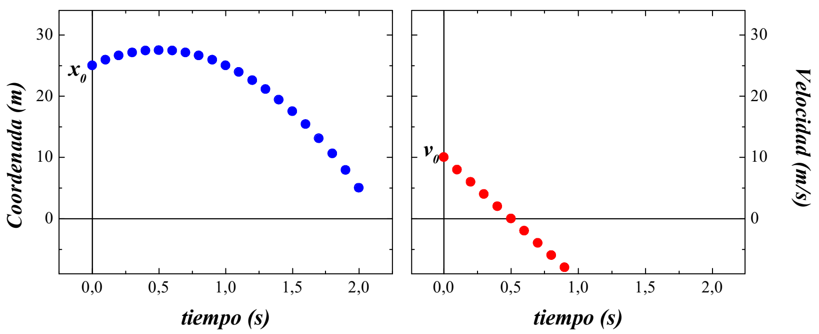
$$\boldsymbol{r_0} = x_0\,\boldsymbol{i} + y_0\,\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0\,\boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{a} = -a\,\boldsymbol{i}$$

De manera que la descripción del movimiento estará expresada en:

$$\boldsymbol{r}(t) = x_0\,\boldsymbol{i} + y_0\,\boldsymbol{j} + (v_0\,\boldsymbol{i})\,t + \frac{1}{2}\,(-a\,\boldsymbol{i})\,t^2 = (x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2)\,\boldsymbol{i} + y_0\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = v_0\,\boldsymbol{i} + (-a\,\boldsymbol{i})\,t = (v_0 - at)\,\boldsymbol{i}$$

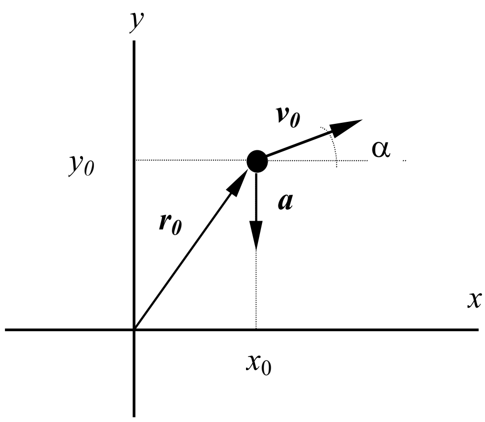
La interpretación de estas últimas relaciones es algo más rica que la que resultó antes. Veamos primero qué ocurre con la velocidad: a partir de $t = 0$, el término at disminuye el módulo de la velocidad de tal manera que al cabo de v_o/a segundos, la velocidad se anula; a medida que se suceden los segundos (luego del instante v_o/a) el módulo de la velocidad crece nuevamente pero el sentido del vector es opuesto al que tenía antes. En palabras comunes, la partícula se va frenando, se detiene, permanece detenida por un instante, y luego retrocede a velocidades crecientes (esta vez, sin parar).



El análisis de la posición, naturalmente, también revela que la partícula anda un trayecto, se frena y luego desanda el trayecto ya sin detenerse. Efectivamente, para los primeros instantes (en los cuales el valor de t es más importante que el de t^2) el término $v_o t$ domina sobre el término $at^2/2$ y la coordenada x crece a partir del valor x_o. Cuando (a tiempos mayores) el término $at^2/2$ resulta más importante que $v_o t$, la coordenada disminuye su crecimiento, deja de crecer y comienza a disminuir, volviendo a tomar valores que ya había tomado (incluyendo el valor x_o). Si la situación de aceleración constante persiste, la coordenada continuará disminuyendo, pasará por el valor 0 y se hará negativa. ¿Podría el lector demostrar que el máximo de la coordenada x es $x_{\text{máx}} = x_0 + (v_o^2 / 2a)$?

1.6 - Aceleración y velocidad inicial en diferentes direcciones

¿Cómo se analiza la situación en la cual la aceleración no es paralela a la velocidad inicial? Bien, se elige un sistema de coordenadas con un eje paralelo a la dirección de la aceleración (característica del movimiento), se determinan las componentes de los vectores $\boldsymbol{r}_o$ y $\boldsymbol{v}_o$ y las ecuaciones del movimiento permiten inferir las posiciones y velocidades de la partícula a medida que el tiempo transcurre. Tomemos por ejemplo los movimientos en las proximidades de la superficie de nuestro planeta como lanzamientos, caídas, tiros, etc. (sin considerar la influencia del aire). Se ha determinado que tales movimientos son acelerados con aceleración constante de



valor muy próximo a 9,80 m/s^2 (representado habitualmente con la letra g), dirección vertical (la de la vertical del lugar) y sentido hacia el interior del planeta (hacia el centro de la Tierra). Veamos la situación planteada en la figura, que representa el hecho de arrojar un proyectil desde el punto $\boldsymbol{r}_o$ con velocidad $\boldsymbol{v}_o$ (inclinada un ángulo α respecto de la horizontal). En el sistema de coordenadas indicado en el esquema, los vectores $\boldsymbol{r}_o$ y $\boldsymbol{v}_o$ están dados por:

$$\boldsymbol{r_0} = x_{\boldsymbol{0}} \breve{\boldsymbol{i}} + y_0 \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v_0} = v_0 \cos\boldsymbol{\alpha}\ \breve{\boldsymbol{i}} + v_0 \operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha} \breve{\boldsymbol{j}}$$

y la aceleración por:

$$\boldsymbol{a} = -\, g\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

De forma que, usando las ecuaciones del movimiento deducidas antes,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}\ t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\ t^2$$
$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}\ t$$

se determina:

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + v_{\boldsymbol{0}} \cos\alpha\ t)\ \breve{\boldsymbol{i}} + (y_0 + v_{\boldsymbol{0}} \operatorname{sen}\alpha t - \tfrac{1}{2} g t^2)\ \breve{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{v}(t) = (v_{\boldsymbol{0}} \cos\alpha)\ \breve{\boldsymbol{i}} + (v_{\boldsymbol{0}} \operatorname{sen}\alpha\ - g t)\ \breve{\boldsymbol{j}}$$

Estas igualdades describen cómo se desarrolla el movimiento y su análisis es el siguiente:

La coordenada x varía como la de un movimiento uniforme (la aceleración no tiene componente en la dirección x). Esta coordenada puede crecer indefinidamente.

La coordenada y obedece un movimiento uniformemente acelerado. Esta coordenada crece, pasa por un valor máximo y luego disminuye (eventualmente indefinidamente).

La coordenada z es siempre cero, lo cual indica un movimiento plano, más precisamente en el plano xy.

La componente x de la velocidad es constante (nuevamente se insiste en que la aceleración no tiene componente en la dirección x).

La componente y de la velocidad disminuye a partir de su valor inicial, se anula en un instante y luego se invierte (cambia de signo).

¿Qué curva describe la partícula en el plano xy? Una forma de obtenerla es, por ejemplo, proponer algunos valores razonables para los parámetros que figuran en las relaciones (x_0 , y_0 , v_0 y α) y calcular el par de coordenadas (x,y) de la partícula para valores crecientes de t. La representación gráfica de esos valores en un sistema de coordenadas muestra la forma de la trayectoria. Por otro lado, la ecuación de la trayectoria puede obtenerse eliminando t entre las ecuaciones correspondientes a cada coordenada. Así resulta,

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha \quad t \rightarrow t = \frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(x) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\alpha}\right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{(x - x_0)}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

De lo cual se deduce una relación entre las coordenadas de la forma:

$$y(x) = Ax^2 + Bx + C$$

con:

$$A = -\frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha} < 0$$

$$B = \left(\mathrm{tg}\alpha + \frac{g x_0}{v_0^2 \cos^2\alpha} \right)$$

$$C = \left(y_0 - x_0 \,\mathrm{tg}\, \alpha - \frac{g x_0^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} \right)$$

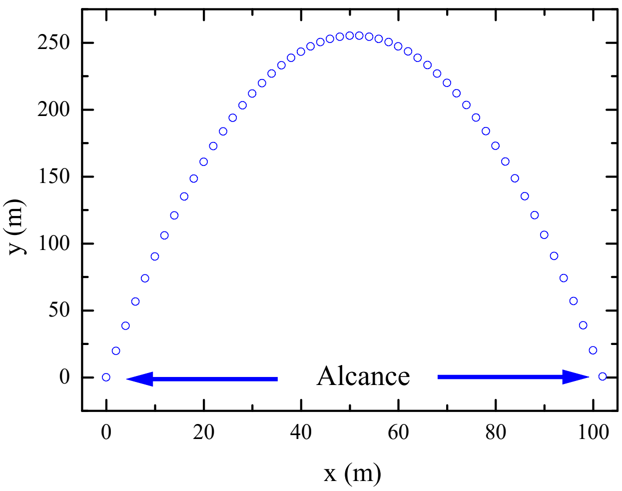
La relación $y(x)$ describe una parábola de ramas hacia abajo (A<0) cuyos coeficientes están determinados por la aceleración y los valores iniciales de la posición y velocidad.

Naturalmente que una mejor elección del sistema de coordenadas puede simplificar las expresiones encontradas. Podría, por ejemplo, tomarse como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y así, a x_o e y_o le corresponderían valores nulos (resultando B= tg α y C=0).

La ecuaciones indican que al cabo de (v_o sen α)/g segundos la componente y de la velocidad se anula por lo que la partícula no subirá mas allá de:

$$y_{\text{máx}} = y_0 + \boldsymbol{v_0} \operatorname{sen} \boldsymbol{\alpha} \left(\frac{\boldsymbol{v_0} \operatorname{sen} \boldsymbol{\alpha}}{g} \right) - \tfrac{1}{2} g \left(\frac{\boldsymbol{v_0} \operatorname{sen} \boldsymbol{\alpha}}{g} \right)^2 = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \boldsymbol{\alpha}}{2g}$$

En el caso de un lanzamiento sería interesante predecir cuál será el alcance del tiro, es decir, cuán lejos se llega (horizontalmente hablando) desde el punto de lanzamiento.



Tal determinación es sencilla si se admite que a partir de $t = 0$ habrá un momento t_L para el cual el nivel (expresado a través de la coordenada y) vuelve a ser el de partida. Así,

$$y(t_L) = y_0 = y_0 + v_0 \text{ sen}\,\alpha \;\; t_L - \tfrac{1}{2} g\, t_L^2$$

de modo que

$$0 = v_0 \text{ sen}\,\alpha \;\; t_L - \tfrac{1}{2} g\, t_L^2 = (v_0 \text{ sen}\,\alpha - \tfrac{1}{2} g\, t_L) t_L$$

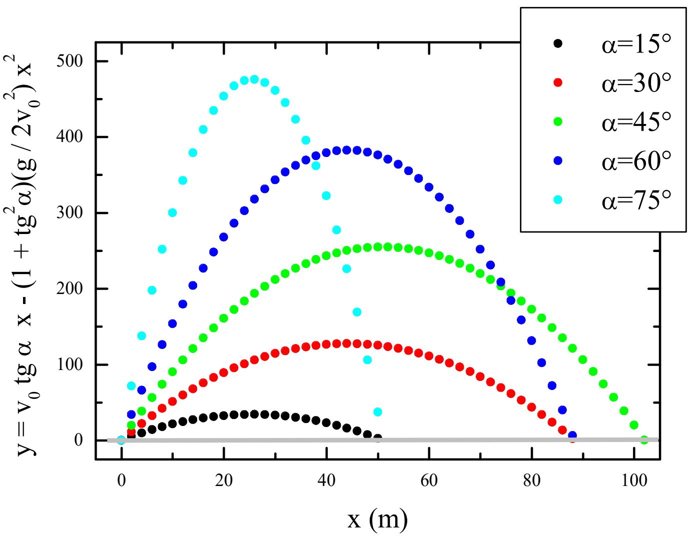
resultando

$$t_L = \frac{2\, v_0 \text{ sen}\,\alpha}{g}$$

(Note el lector que el valor t_L=0, que es también solución de la ecuación, no se tiene en cuenta porque representa el instante inicial). El alcance L que resulta es:

$$L = x(t_L) - x_0 = v_0 \cos\alpha \left(\frac{2v_0 \,\mathrm{sen}\alpha}{g} \right) = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \,\mathrm{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \,\mathrm{sen}(2\alpha)}{g}$$

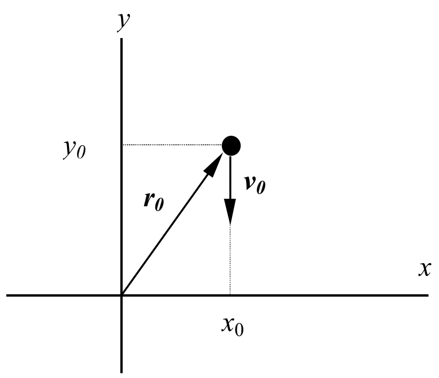
Esta última expresión muestra que el alcance se puede variar modificando la "intensidad" del tiro (expresado mediante el módulo de la velocidad inicial) y la inclinación del tiro. Para una dada intensidad de tiro, el alcance será el mismo para las inclinaciones α y (90°-α) (es decir, α grados por encima de la horizontal y α grados apartado de la vertical) y será el mayor para α=45°.



Existen situaciones particulares del lanzamiento que naturalmente están contenidas en las ecuaciones que hemos deducido y analizado.

En el caso para el cual el ángulo de inclinación es 90° se tiene para las componentes (no nulas) de la posición y de la velocidad:

$$x(t) = x_0 \; ; \; y(t) = y_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$v_x(t) = 0 \; ; \; v_y(t) = v_0 - gt$$



El caso es conocido con el nombre de tiro vertical.

La situación denominada caída libre es aquélla para la cual se suelta (v_o= 0) o se empuja ($v_o \neq$ 0) una partícula hacia abajo. Tal caso se obtiene para un ángulo de inclinación de 270° (recuérdese que la inclinación es respecto al eje x) y las ecuaciones resultantes son:

$$x(t) = x_0 \; ; \; y(t) = y_0 - v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$v_x(t) = 0 \; ; \; v_y(t) = -v_0 - gt$$

1.7 - Movimiento circular de una partícula

Repasemos un poco: el movimiento es un concepto totalmente enlazado al desplazamiento de cuerpos, unos respecto de otros. El desplazamiento es aquel vector que indica cuánto (su módulo) y cómo (dirección y sentido) ha variado la posición de una partícula. Si se relaciona el desplazamiento con el intervalo de tiempo en el que ha ocurrido, se obtiene la velocidad de la partícula, la cual posee entonces la información de cuánto y cómo varía la posición por unidad de tiempo. Es la velocidad de una partícula la información esencial de su movimiento. El hecho que los diferentes momentos o instantes, durante el estudio de un movimiento, se sucedan de una manera única y ordenada (hacia el futuro) impone un signo característico a los intervalos de tiempo: los intervalos de tiempo son números positivos. Así, la velocidad de una partícula hereda características del vector desplazamiento: la dirección y el sentido, y es común describir tales características sin distinguir entre ambos vectores, la velocidad y el desplazamiento, obviamente diferentes.

En esta discusión intentaremos caracterizar un cierto tipo de movimiento en el cual se ponen de manifiesto los cambios de orientación del vector posición. Vamos a comenzar por el análisis de aquellos desplazamientos que nos llevan a nuevos vectores posición que poseen el mismo módulo que los anteriores pero diferentes direcciones. El proceso mediante el cual se modifica la dirección de un vector sin alterar su módulo se denomina rotación.

Especificar una rotación requiere de algunas indicaciones:

a) Se rota en torno a un eje: debe especificarse el eje de rotación.
b) Se rota un cierto ángulo: debe especificarse el ángulo.
c) Se rota en un cierto sentido en torno al eje: debe especificarse el sentido.

Así, parece que una rotación posee más información que la que un número permite simbolizar y de ahí que intentaremos simbolizarla por un vector. No resulta muy claro qué se debe hacer frente a la instrucción: "tome ese libro y rótelo 5°". Es más clara la instrucción: "tome ese libro y rótelo 5° en torno a un eje vertical de manera tal que, si el eje fuera roscado, el libro ascienda"[3].

Para indicar una rotación haremos lo siguiente:

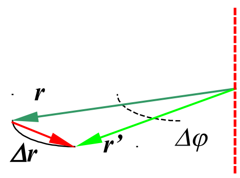
[3] Debo advertirle al lector que si no conoce la forma en que avanza un tornillo al enroscarlo, se verá en dificultades para comprender la descripción de los movimientos de rotación.

- tomaremos el valor del ángulo que se rota (a partir de una cierta dirección) como el módulo de un vector;
- adoptaremos como dirección del vector a la dirección del eje perpendicular al plano de la rotación (entorno al cual se rota) y
- el sentido de avance de un tirabuzón o tornillo (sobre el eje), que rota de la misma manera que la rotación que queremos describir, será el sentido del vector.

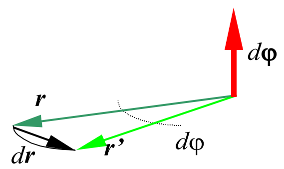
Al vector definido con las tres últimas indicaciones lo llamaremos vector rotación.

Existe una dificultad importante en cuanto a las propiedades del vector rotación: dos rotaciones sucesivas no conmutan. Es decir, se obtienen resultados diferentes si se altera la secuencia de las rotaciones. Ejemplo: tome un libro con alguna marca notable en una de las tapas; rótelo 90° alrededor de un eje vertical en el sentido que un tirabuzón o tornillo sobre el eje suba; rótelo a continuación 90° alrededor de un eje horizontal en el sentido que un tirabuzón o tornillo avance hacia su derecha. Observe la posición en la que quedó la marca del libro. Recuerde la posición alcanzada, vuelva el libro a su posición inicial y ahora ejecute las mismas rotaciones pero en otro orden. Primero la rotación de 90° alrededor del eje horizontal con sentido de tirabuzón hacia su derecha y a continuación la rotación de 90° alrededor del eje vertical con sentido de tirabuzón hacia arriba. El resultado de las rotaciones es evidentemente diferente. La falta de conmutatividad nos impedirá utilizar el vector rotación que hemos definido como un vector propiamente dicho. Las operaciones entre vectores deben satisfacer la propiedad conmutativa para que los elementos que se operan sean realmente vectores. Así que el vector rotación no debe ser tratado como tal a menos que aclaremos ciertas circunstancias bajo cuales las operaciones sean conmutativas. Veamos…Si tomamos el ejemplo del libro y reducimos los ángulos de rotación de 90° a 45°, tal vez notemos un cierto parecido entre las posiciones finales resultantes luego de ejecutar, en un orden u otro, la sucesión de rotaciones. Si en lugar de 45° rotamos 10 o 5° el parecido será más evidente. Así, si admitimos que podemos rotar ángulos tan pequeños como sea necesario para que sucesivas rotaciones (en cualquier orden) conduzcan al mismo resultado, el vector rotación tendrá las mismas propiedades que los vectores ordinarios. Concretando: un vector rotación satisface la propiedad conmutativa respecto a una sucesión de rotaciones, si su módulo es el menor posible. Dado que el módulo del vector rotación representa el ángulo que se ha rotado, el valor de tal ángulo debe ser un valor infinitesimal.

Analicemos una situación concreta de manera de usar los conceptos que se han esbozado. Imaginemos que una partícula rota en torno a un cierto eje describiendo una circunferencia. Supongamos que en un cierto instante t el vector $\boldsymbol{r}$ indica la posición de la partícula. Dejemos transcurrir Δt segundos tal que la partícula ha pasado a la posición indicada por el vector $\boldsymbol{r}$'. Sea $\Delta\boldsymbol{r}$ el des-



plazamiento entre las posiciones sucesivas $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{r}$' (siendo $\boldsymbol{r}$' el vector que se obtiene a partir de $\boldsymbol{r}$ rotando un ángulo $\Delta\varphi$). Por simplicidad se ha esquematizado el caso mediante una circunferencia en un plano horizontal de forma que el eje de rotación sea vertical, pero el lector no tendrá dificultad en imaginar una rotación cualquiera. El vector asociado a la rotación de valor $\Delta\varphi$, tendrá módulo $\Delta\varphi$, la dirección del eje de rotación y el sentido hacia arriba, en virtud de que un tirabuzón sobre el eje, que rota en el sentido de llevar ***r*** hacia ***r'***, ascendería. Para poder usar las propiedades conocidas de los vectores en el manejo del vector rotación, analicemos la situación haciendo Δt lo más pequeño posible ($\Delta t \rightarrow 0$). En ese caso, $\Delta\boldsymbol{\varphi} \rightarrow d\boldsymbol{\varphi}$, $\Delta\boldsymbol{r} \rightarrow d\boldsymbol{r}$. En estas circunstancias podemos representar a la rotación por el vector $d\boldsymbol{\varphi}$ sobre el eje de rotación (hacia arriba) y el desplazamiento $d\boldsymbol{r}$ será perpendicular a $\boldsymbol{r}$. Lamentablemente no es posible representar una rotación de valor infinitesimal y el esquema de la figura es un esquema muy aproximado de la situación. Siendo (en el caso de una rotación infinitesimal) $d\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{r}$ y $d\boldsymbol{r}$ perpendiculares entre sí ya que la dirección de $d\boldsymbol{r}$ será la de la tangente a la curva, la relación entre el vector rotación $d\boldsymbol{\varphi}$ y el cambio producido en $\boldsymbol{r}$ es:



$$d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}$$

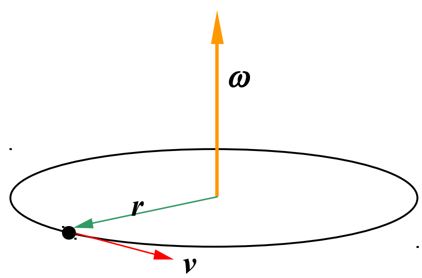
De manera que si dt es el intervalo de tiempo en el cual se produjo el desplazamiento $d\boldsymbol{r}$, la velocidad de la partícula que rota será:

$$v = \frac{d\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

donde se ha definido el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ como $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}$

La velocidad angular es un vector que, con la misma dirección y sentido que el vector rotación, representa cómo se efectúa el barrido angular de la dirección de un vector, por unidad de tiempo. Las unidades de $\boldsymbol{\omega}$ son radianes por segundos [rad/s].

La figura muestra los vectores ***r***, ***v*** y $\boldsymbol{\omega}$ en un cierto instante t, durante el mo-



vimiento circular de una partícula. En este tipo de movimiento, los vectores ***r***, ***v*** y $\boldsymbol{\omega}$ son perpendiculares entre ellos y esta situación es una particularidad del movimiento circular[4]. Así, el módulo de la velocidad resulta:

$$v = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{r}| \ \mathrm{sen}\, 90^\circ = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\boldsymbol{r}| = \omega \ r$$

De esta manera, es claro que el módulo de la velocidad variará en tanto varíe el módulo de la velocidad angular (el módulo del vector posición es el radio de la circunferencia). Las variaciones de la velocidad ***v*** están descriptas por la aceleración. Por definición, la aceleración se obtiene derivando la expresión de la velocidad. El lector debe recordar que la derivación de un producto vectorial de funciones sigue las mismas reglas que el producto ordinario de funciones. Por lo tanto, la aceleración de una partícula que efectúa un movimiento circular es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

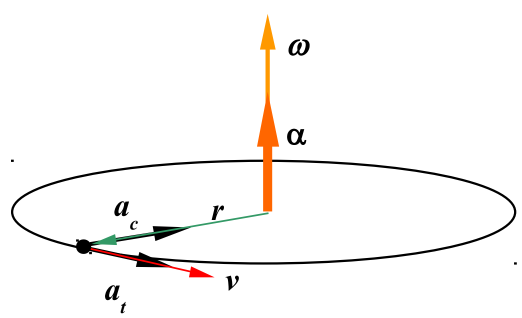
donde se ha hecho una nueva definición vinculada al cambio de la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\boldsymbol{t}} \, .$$

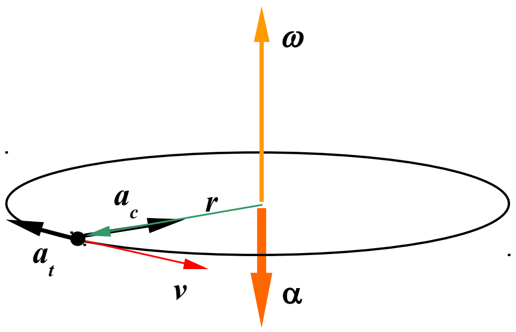
La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ describe los cambios en la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ a medida que transcurre el tiempo. La aceleración angular se mide en radianes por segundo cuadrado [rad/s^2] o “radianes por segundo, cada segundo”.

Escapa al alcance de estos apuntes describir un movimiento de rotación completamente general. Nos hemos circunscripto al caso de una partícula rotando según una circunferencia, en torno a un eje fijo, pues es el caso más

[4] En un movimiento elíptico, por ejemplo, no siempre el vector posición (desde un foco) es perpendicular al vector velocidad.



sencillo para analizar el movimiento de rotación y a su vez, contiene todos los elementos conceptuales de una rotación más complicada. De todas maneras, el lector no debe perder de vista que se trata de una descripción particular. Por ejemplo, la aceleración angular (que acabamos de definir) mide los cambios en la velocidad angular. Tales cambios, tratándose de un movimiento circular en torno a un eje de dirección fija (vertical, horizontal, inclinada o como quiera, pero fija!) se restringen a modificaciones del módulo y eventualmente un cambio del sentido de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Los cambios de dirección no están contemplados. Así, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, será un vector paralelo al vector $\boldsymbol{\omega}$, con el mismo sentido (si la velocidad angular es cada vez más intensa) o con sentido opuesto a $\boldsymbol{\omega}$ (si la velocidad angular es cada vez más "lenta"). Dos figuras esquematizan las respectivas situaciones. La primera debe interpretarse como una fotografía del caso en el cual la velocidad angular es cada vez mayor, de manera que al cabo de un intervalo de tiempo dt, una nueva fotografía mostraría un vector velocidad angular incrementado en $d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha}\, dt$. La segunda corresponde a la situación en la cual la velocidad angular disminuiría, al cabo del intervalo dt, en la cantidad $\boldsymbol{\alpha}\, dt$. En ambos casos (y volviendo a insistir en que no se consideran cambios en la dirección del vector $\boldsymbol{\omega}$), la velocidad angular y la aceleración angular son vectores paralelos y en consecuencia, el vector que representa a $\boldsymbol{\alpha}$ es perpendicular al vector posición $\boldsymbol{r}$.



No se olvide el lector que se trata de un caso particular de movimiento de rotación.

Retomando la discusión sobre la aceleración $\boldsymbol{a}$ de la partícula estudiada, hemos hallado que está constituida de dos términos (que surgen naturalmente al derivar el producto vectorial). En virtud de lo comentado antes, el primer término (realmente el orden es irrelevante) es un vector perpendicular al plano determinado por $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{r}$. Este vector tiene la dirección de la velocidad y por lo tanto se lo denomina "componente tangencial" de la aceleración o "aceleración tangencial" $\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$. Su módulo es (teniendo en cuenta la perpendicularidad entre los vectores) $a_t = \alpha\, r$, siendo r el radio de la circunferencia. Conocer la aceleración tangencial permite determinar los cambios en el módulo de la velocidad.

El segundo término de la aceleración es un vector (perpendicular al plano determinado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{v}$) con dirección radial y sentido hacia el centro de la circunferencia. Así, este último término

$$\boldsymbol{a_c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

es denominado "componente centrípeta de la aceleración" o simplemente "aceleración centrípeta", cuyo módulo es $\omega\, v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$.

La aceleración como suma vectorial de las componentes tangencial y centrípeta tiene módulo:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Cabe al lector analizar la forma de la aceleración para el caso de un movimiento circular uniforme (aquél con velocidad angular constante).

Como ya se ha mencionado (tal vez en exceso), se ha estudiado un movimiento circular en torno a un eje de dirección fija, de forma que los vectores velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ son paralelos. Es ilustrativo analizar el caso de una aceleración angular constante. Si representamos dichos vectores en un sistema de coordenadas con uno de sus ejes en la dirección del eje de rotación, podemos manejarnos con ecuaciones numéricas de la siguiente manera:

Sea el eje z (por ejemplo) el eje del movimiento circular en el mismo sentido de la velocidad angular. La velocidad angular y aceleración angular serán $\boldsymbol{\omega} = \omega \, \breve{\boldsymbol{k}}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \pm \, \alpha \, \breve{\boldsymbol{k}}$ respectivamente. El doble signo en la aceleración angular corresponde a los casos ya discutidos de velocidad angular que aumenta (+) o que disminuye (-). Si la aceleración angular es constante, el cambio de la velocidad angular a partir de un valor ω_o determinado en t_o, es:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o = \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_{t_o}^{t} \alpha \; dt = \alpha \int_{t_o}^{t} dt = \alpha \Delta t = \alpha (t - t_o)$$

Así, si elegimos arbitrariamente $t_o = 0$ y usamos las expresiones de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ resulta

$$\omega = \omega_o \pm \alpha t$$

Si incluimos en el análisis al vector rotación $d\boldsymbol{\varphi}$, representado en el mismo sistema de coordenadas, es sencillo encontrar que a partir del momento en que se inicia el estudio, el ángulo rotado es

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t \pm \frac{1}{2} \, \alpha \, t^2$$

donde φ_o es el ángulo que forma el vector posición de la partícula respecto el eje x al momento inicial.

Las últimas ecuaciones son enteramente análogas a las que se deducen para el movimiento uniformemente acelerado.

La descripción de una rotación cualquiera, en la cual el eje de rotación se mueve en el espacio, incluye los mismos conceptos discutidos hasta ahora. El análisis es algo complicado en virtud de que las magnitudes de la cinemática de rotación está definidas en términos de productos vectoriales. Asímismo, lo que hemos denominado aceleración centrípeta (hacia el centro) podría perder significado si la trayectoria no fuera una curva con “centro”. Los conceptos no son difíciles de generalizar pero ese análisis escapa al alcance de estas notas.

Síntesis conceptual

El concepto más relevante introducido en este capítulo es el de velocidad. La velocidad es la información que sintetiza el hecho básico de la Mecánica: *los cuerpos se desplazan unos respecto a otros a medida que el tiempo transcurre*.

La velocidad no es algo que un objeto posea sino algo que manifiesta en relación a otros objetos (el sistema de referencia).

Poseer velocidad es asegurar que existirá desplazamiento con el transcurrir del tiempo.

La simbolización más adecuada de la última declaración es:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\ dt$$

siendo dt el símbolo que se usa para representar la idea de que el reloj ha dejado de marcar el instante t, pasando a indicar el instante "siguiente".

Si la velocidad es nula, el desplazamiento será nulo y se mantendrá la posición. Si la velocidad no es nula, la posición cambiará en $d\boldsymbol{r}$.

Describir un movimiento es indicar qué velocidad presenta un objeto cuando está en un cierto lugar del espacio en un dado momento. Tal información se puede extraer tanto de la trayectoria como de la aceleración (el comportamiento de la velocidad).

En general, la información requerida para hacer una predicción en base al fenómeno del movimientos es:

- el conocimiento de la posición y la velocidad de un objeto en un cierto instante (que son valores específicos) y
- conocer la aceleración, es decir, el comportamiento de la velocidad (una cierta función del tiempo).