Una bola de boliche en movimiento transporta cantidad de movimiento, el tema de este capítulo. En la colisión entre la bola y los pinos, la cantidad de movimiento se transfiere a los pinos. (Mark Cooper/Corbis Stock Market)

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación
9.2 Impulso y cantidad de movimiento
9.3 Colisiones en una dimensión
9.4 Colisiones en dos dimensiones
9.5 El centro de masa
9.6 Movimiento de un sistema de partículas
9.7 Sistemas deformables
9.8 Propulsión de cohetes

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones

Considere lo que ocurre cuando una bola de boliche golpea un pino, como en la fotografía de arriba. Al pino se le da una gran velocidad como resultado de la colisión; en consecuencia, se aleja volando y golpea a otros pinos o se proyecta hacia el tope de retención y que la fuerza promedio que se ejerce sobre el pino durante la colisión es grande (lo que resulta en una gran aceleración), el pino logra su gran velocidad muy pronto y experimenta la fuerza durante un intervalo de tiempo muy corto.

Aunque la fuerza y la aceleración son grandes para el pino, varían en el tiempo, ¡lo que hace una situación complicada! Uno de los objetivos principales de este capítulo es permitirle entender y analizar tales eventos en una forma simple. Primero, se introduce el concepto de *cantidad de movimiento*, que es útil para describir objetos en movimiento. La cantidad de movimiento de un objeto se relaciona tanto con su masa como con su velocidad. El concepto de cantidad de movimiento conduce a una segunda ley de conservación para un sistema aislado, el de conservación de la cantidad de movimiento. Esta ley es de especial utilidad para tratar problemas que incluyen colisiones entre objetos y para analizar propulsión de cohetes. Además se introduce el concepto de centro de masa de un sistema de partículas: el movimiento de un sistema de partículas se puede describir mediante el movimiento de una partícula representativa ubicada en el centro de masa.

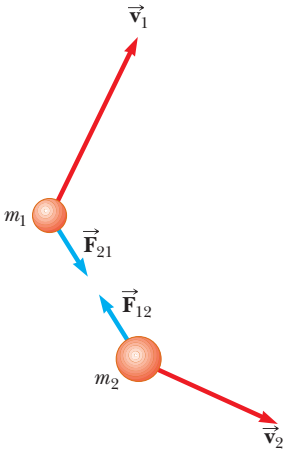


Figura 9.1 Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$.

9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

En el capítulo 8 se estudiaron situaciones que son difíciles de analizar con las leyes de Newton. Fue posible resolver problemas que involucran estas situaciones al identificar un sistema y aplicar un principio de conservación, el de conservación de energía. Examine otra situación en la que un arquero de 60 kg está de pie sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s. A partir de la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que el arco ejerce en la flecha se iguala mediante una fuerza en la dirección opuesta sobre el arco (y el arquero). Esta fuerza hace que el arquero se deslice hacia atrás sobre el hielo, ¿pero con qué rapidez? No se puede responder esta pregunta directamente con el uso de la segunda ley de Newton o un planteamiento de energía porque no se tiene suficiente información.

A pesar de la incapacidad para resolver el problema del arquero mediante las técnicas aprendidas hasta el momento, este problema es muy simple de resolver si se introduce una nueva cantidad que describa el movimiento, la *cantidad de movimiento lineal*. Aplique la estrategia general para resolver problemas y elabore su marco conceptual de un sistema aislado de dos partículas (figura 9.1) con las masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ en un instante de tiempo. Ya que el sistema está aislado, la única fuerza sobre una partícula es a causa de la otra partícula, y se puede clasificar esta situación como una en la que las leyes de Newton son útiles. Si una fuerza a causa de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa sobre la partícula 2, debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce sobre la partícula 1. Es decir, las fuerzas en las partículas forman un par acción–reacción de la tercera ley de Newton, y $\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$. Esta condición se expresa como

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} + \vec{\mathbf{F}}_{12} = 0$$

Más adelante *analice* esta situación al incorporar la segunda ley de Newton. En algún intervalo de tiempo, las partículas en acción recíproca en el sistema aceleran en respuesta a la fuerza. Por lo tanto, al sustituir la fuerza sobre cada partícula con $m\vec{\mathbf{a}}$ para la partícula se obtiene

$$m_1\vec{\mathbf{a}}_1 + m_2\vec{\mathbf{a}}_2 = 0$$

Ahora se sustituye cada aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes, se les puede colocar adentro de la operación de derivada, que produce

$$\frac{d(m_1\vec{\mathbf{v}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{\mathbf{v}}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) = 0 \qquad (9.1)$$

Para *finalizar* esta discusión, note que la derivada de la suma $m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2$ respecto del tiempo es cero. En consecuencia, esta suma debe ser constante. A partir de esta discusión se aprendió que la cantidad $m\vec{\mathbf{v}}$ para una partícula es importante en que la suma de estas cantidades para un sistema de partículas aislado se conserva. A esta cantidad se le llama *cantidad de movimiento lineal*:

Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula ▶

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \qquad (9.2)$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial $\vec{\mathbf{v}}$. Su dirección es a lo largo de $\vec{\mathbf{v}}$, tiene dimensiones ML/T y su unidad del SI es kg · m/s.

Si una partícula es móvil en una dirección arbitraria, $\vec{\mathbf{p}}$ tiene tres componentes y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones por componentes

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z$$

Como se obseva a partir de su definición, el concepto de *momentum*[1] proporciona una distinción cuantitativa entre partículas pesadas y ligeras que se mueven a la misma velocidad. Por ejemplo, el *momentum* de una bola de boliche es mucho mayor que la de una bola de tenis que se mueve con la misma rapidez. Newton llamó al producto $m\vec{\mathbf{v}}$ *cantidad de movimiento*; tal vez hoy en día este término es una descripción más gráfica que la palabra *momentum*, que viene del latín y significa movimiento.

Al usar la segunda ley de movimiento de Newton, se puede relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa en la partícula. Se inicia con la segunda ley de Newton y sustituye la definición de aceleración:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

En la segunda ley de Newton, la masa m se supone constante. Debido a eso, se puede llevar m dentro de la operación derivada para producir

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \tag{9.3}$$

◀ Segunda ley de Newton para una partícula

Esta ecuación muestra que **la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula**.

Esta forma alternativa de la segunda ley de Newton es la forma en que Newton presentó la ley, y de hecho es más general que la forma que se introdujo en el capítulo 5. Además de las situaciones en las que el vector velocidad varía con el tiempo, se puede usar la ecuación 9.3 para estudiar fenómenos en los que la masa cambia. Por ejemplo, la masa de un cohete cambia conforme el combustible se quema y es expulsado del cohete. No se puede usar $\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ para analizar la propulsión de cohetes; se debe aplicar la ecuación 9.3, como se mostrará en la sección 9.8.

Pregunta rápida 9.1 Dos objetos tienen iguales energías cinéticas. ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? a) $p_1 < p_2$, b) $p_1 = p_2$, c) $p_1 > p_2$, d) no hay suficiente información para informar.

Pregunta rápida 9.2 Su profesor de educación física le lanza una pelota de beisbol con cierta rapidez y usted la atrapa. A continuación el profesor le lanza una pelota grande y pesada usada para gimnasia cuya masa es diez veces la masa de la pelota de beisbol. Usted tiene las siguientes opciones: la pelota grande y pesada se le puede lanzar con a) la misma rapidez que la pelota de beisbol, b) la misma cantidad de movimiento o c) la misma energía cinética. Clasifique estas opciones de la más fácil a la más difícil de atrapar.

Al usar la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$ es *cero*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas en la figura 9.1 debe permanecer constante:

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \tag{9.4}$$

o, de manera equivalente,

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} \tag{9.5}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.1

La cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva

Aunque la cantidad de movimiento de un *sistema* aislado se conserva, la cantidad de movimiento de una partícula dentro de un sistema aislado no necesariamente se conserva porque es posible que otras partículas en el sistema interactúen con ella. Siempre aplique la conservación de cantidad de movimiento a un *sistema* aislado.

[1] En este capítulo, los términos *cantidad de movimiento* y *cantidad de movimiento lineal* tienen el mismo significado. Más adelante, en el capítulo 11, se usará el término *cantidad de movimiento angular* para una cantidad diferente cuando se trate con movimiento rotacional.

donde $\vec{\mathbf{p}}_1$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2i}$ son los valores iniciales y $\vec{\mathbf{p}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{2f}$ son los valores finales de las cantidades de movimiento para las dos partículas en el intervalo de tiempo durante el que las partículas se afectan entre sí. La ecuación 9.5 en forma de componentes demuestra que las cantidades de movimiento totales en las direcciones x, y y z se conservan todas de manera independiente:

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \qquad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \qquad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz} \tag{9.6}$$

Este resultado, conocido como la **ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal**, se puede extender a cualquier número de partículas en un sistema aislado. Se considera una de las leyes más importantes de la mecánica. Se le puede establecer del modo siguiente:

Conservación de la cantidad de movimiento ►

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

Esta ley dice que **la cantidad de movimiento total de un sistema aislado en todo momento es igual que su cantidad de movimiento inicial**. La ley es la representación matemática de la versión en cantidad de movimiento del **modelo de sistema aislado**. La versión energética del modelo de sistema aislado se estudió en el capítulo 8.

Note que no se hizo afirmación alguna en cuanto al tipo de fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. Además, no se especificó si las fuerzas son conservativas o no conservativas. El único requisito es que las fuerzas deben ser *internas* al sistema.

EJEMPLO 9.1 El arquero

Considere la situación propuesta al principio de esta sección. Un arquero de 60 kg está de pie en reposo sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.50 kg horizontalmente a 50 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad el arquero se mueve sobre el hielo después de disparar la flecha?

Figura 9.2 (Ejemplo 9.1) Un arquero dispara una flecha horizontalmente hacia la derecha. Ya que él está de pie sobre hielo sin fricción, comenzará a deslizarse hacia la izquierda a través del hielo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es posible que usted ya haya pensado en este problema cuando se introdujo al principio de la sección. Imagine que la flecha se dispara de una forma y el arquero retrocede en la dirección opuesta.

Categorizar *No se puede* resolver este problema al representar la flecha como una partícula bajo una fuerza neta, porque no se tiene información acerca de la fuerza en la flecha o su aceleración. *No se puede* resolver este problema al usar un modelo de sistema y aplicar un enfoque energético porque no se sabe cuánto trabajo se invierte al jalar el arco hacia atrás o cuánta energía potencial se almacena en el arco. No obstante, este problema *se puede* resolver muy fácilmente con un planteamiento que suponga cantidad de movimiento.

Considere el sistema que está constituido del arquero (incluido el arco) y la flecha. El sistema no está aislado porque la fuerza gravitacional y la fuerza normal del hielo actúan sobre el sistema. Sin embargo, dichas fuerzas son verticales y perpendiculares al movimiento del sistema. Por lo tanto, no hay fuerzas externas en la dirección horizontal y se puede considerar un sistema aislado en términos de componentes de la cantidad de movimiento en esta dirección.

Analizar La cantidad de movimiento horizontal total del sistema antes de disparar la flecha es cero, porque nada en el sistema se mueve. Debido a esto, la cantidad de movimiento horizontal total del sistema después de disparar la flecha también debe ser cero. Se elige la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Al identificar al arquero como la partícula 1 y la flecha como la partícula 2, se tiene $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.50$ kg y $\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 50\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

Ajustar la cantidad de movimiento final del sistema igual a cero: $m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f} = 0$

Resuelva esta ecuación para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y sustituya valores numéricos:

$$\vec{\mathbf{v}}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{\mathbf{v}}_{2f} = -\left(\frac{0.50\text{ kg}}{60\text{ kg}}\right)(50\,\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = -0.42\,\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}$$

Finalizar El signo negativo para $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ indica que el arquero, después de disparar la flecha, se mueve hacia la izquierda en la figura 9.2, en la dirección opuesta a la dirección de movimiento de la flecha, en concordancia con la tercera ley de Newton. Ya que el arquero es mucho más pesado que la flecha, su aceleración y en consecuencia su velocidad son mucho más pequeños que la aceleración y velocidad de la flecha.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la flecha se dispara en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambiará la velocidad de retroceso del arquero?

Respuesta La velocidad de retroceso disminuirá en magnitud porque sólo una componente de la velocidad de la flecha está en la dirección x. La conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x produce

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}\cos\theta = 0$$

lo que conduce a

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}v_{2f}\cos\theta$$

Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, y la velocidad final del arquero se reduce al valor cuando la flecha se dispara horizontalmente. Para valores de θ distintos de cero, la función coseno es menor que 1 y la velocidad de retirada es menor que el valor calculado para $\theta = 0$. Si $\theta = 90°$, en tal caso $\cos\theta = 0$ y $v_{1f} = 0$, de modo que no hay velocidad de retirada.

EJEMPLO 9.2 ¿En realidad se puede ignorar la energía cinética de la Tierra?

En la sección 7.6 se afirmó que se puede ignorar la energía cinética de la Tierra cuando se considera la energía de un sistema que consiste de la Tierra y una bola que se deja caer. Verifique esta afirmación.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que deja caer una bola en la superficie de la Tierra. Desde su punto de vista, la bola cae mientras la Tierra permanece fija. Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la Tierra experimenta una fuerza hacia arriba y debido a eso una aceleración hacia arriba mientras la bola cae. En el cálculo que sigue, se demostrará que este movimiento se puede ignorar.

Categorizar El sistema se identifica como la bola y la Tierra. Ignore la resistencia del aire y otras fuerzas cualesquiera sobre el sistema, de modo que el sistema está aislado en términos de cantidad de movimiento.

Analizar Esta afirmación se verificará al establecer una relación de la energía cinética de la Tierra respecto a la bola. Se identifican v_E y v_b como las magnitudes de velocidad de la Tierra y la bola, respectivamente, después de que la bola cae a través de cierta distancia.

Use la definición de energía cinética para establecer una proporción:

$$1)\quad \frac{K_E}{K_b} = \frac{\frac{1}{2}m_E v_E^{\,2}}{\frac{1}{2}m_b v_b^{\,2}} = \left(\frac{m_E}{m_b}\right)\left(\frac{v_E}{v_b}\right)^2$$

La cantidad de movimiento inicial del sistema es cero, de modo que la cantidad de movimiento final es igual a cero:

$$p_i = p_f \rightarrow 0 = m_b v_b + m_E v_E$$

Resuelva la ecuación para la relación de las magnitudes de velocidad:

$$\frac{v_E}{v_b} = -\frac{m_b}{m_E}$$

Sustituya esta expresión de v_E/v_b en la ecuación 1):

$$\frac{K_E}{K_b} = \left(\frac{m_E}{m_b}\right)\left(-\frac{m_b}{m_E}\right)^2 = \frac{m_b}{m_E}$$

Sustituya los números de orden de magnitud para las masas:

$$\frac{K_E}{K_b} = \frac{m_b}{m_E} \sim \frac{1\text{ kg}}{10^{24}\text{ kg}} \sim 10^{-24}$$

Finalizar La energía cinética de la Tierra es una fracción muy pequeña de la energía cinética de la bola, así que es justificado ignorar la energía cinética del sistema.

© Vereschagin Dmitry/Shutterstock

Las bolsas de aire en los automóviles han salvado incontables vidas en los accidentes. La bolsa de aire aumenta el intervalo de tiempo durante el cual el pasajero es llevado al reposo, con lo cual disminuye la fuerza (y las lesiones resultantes) en el pasajero.

9.2 Impulso y cantidad de movimiento

De acuerdo con la ecuación 9.3, la cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa en la partícula. Conocer el cambio en la cantidad de movimiento causada por una fuerza es útil al resolver algunos tipos de problemas. Para construir una mejor comprensión de este concepto importante, suponga que una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ actúa en una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. De acuerdo con la segunda ley de Newton, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, o

$$d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.7}$$

Se puede integrar[2] esta ecuación para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa durante algún intervalo de tiempo. Si la cantidad de movimiento de la partícula cambia de $\vec{\mathbf{p}}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{\mathbf{p}}_f$ en el tiempo t_f, integrar la ecuación 9.7 produce

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.8}$$

Para evaluar la integral, es necesario saber cómo varía con el tiempo la fuerza neta. La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado **impulso** de la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa en una partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

Impulso de una fuerza ▶

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.9}$$

A partir de esta definición, se ve que el impulso $\vec{\mathbf{I}}$ es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza–tiempo, como se describe en la figura 9.3a. Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma integral que se muestra en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento. El impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento, esto es, ML/T. El impulso *no* es una propiedad de una partícula; en vez de ello, es una medida del grado en el que la fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

La ecuación 9.8 es un enunciado importante conocido como **teorema impulso–cantidad de movimiento**:

Teorema impulso–cantidad de movimiento ▶

El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{I}} \tag{9.10}$$

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, significa que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a dicha partícula. La ecuación 9.10 es idéntica en forma a la ecuación de conservación de la energía, la ecuación 8.1. El lado izquierdo de la ecuación 9.10 representa el cambio en la cantidad de movimiento del sistema, que en este caso es una sola partícula. El lado derecho es una medida de cuánta cantidad de movimiento cruza la frontera del sistema debido a la fuerza neta que se aplica al sistema.

Ya que la fuerza neta que imparte un impulso a una partícula por lo general puede variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza neta promediada en el tiempo:

[2] Aquí se integra la fuerza en relación con el tiempo. Compare esta estrategia con los esfuerzos del capítulo 7, donde se integró fuerza en relación con la posición para encontrar el trabajo invertido por la fuerza.

$$\left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.11}$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Esta ecuación es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.) Debido a eso, la ecuación 9.9 se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{I}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \Delta t \tag{9.12}$$

Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura 9.3b, se interpreta como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo Δt, el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da durante este mismo intervalo.

En principio, si $\sum \vec{\mathbf{F}}$ se conoce como una función del tiempo, el impulso se calcula a partir de la ecuación 9.9. El cálculo se vuelve especialmente simple si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante. En este caso $(\sum \vec{\mathbf{F}})_{\text{prom}} = \sum \vec{\mathbf{F}}$, donde $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza neta constante, y la ecuación 9.12 se convierte en

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, \Delta t \tag{9.13}$$

En muchas situaciones físicas se usará lo que se llama la **aproximación del impulso, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida sobre una partícula actúa durante un tiempo breve pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente**. En este caso, la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ en la ecuación 9.9 se sustituye con una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ para encontrar el impulso sobre la partícula. Esta aproximación es especialmente útil al tratar colisiones en las cuales la duración de la colisión es muy breve. Cuando se hace esta aproximación, la fuerza sola se conoce como *fuerza impulsiva*. Por ejemplo, cuando un bat golpea una pelota de beisbol, el tiempo de la colisión es aproximadamente 0.01 s y la fuerza promedio que el bat ejerce sobre la pelota en este tiempo usualmente es de muchos miles de newtons. Ya que esta fuerza de contacto es mucho más grande que la magnitud de la fuerza gravitacional, la aproximación del impulso justifica el ignorar las fuerzas gravitacionales en la pelota y el bat. Cuando se usa esta aproximación, es importante recordar que $\vec{\mathbf{p}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_f$ representan las cantidades de movimiento *inmediatamente* antes y después de la colisión, respectivamente. Por lo tanto, en cualquier situación en la que es adecuado usar la aproximación del impulso, la partícula se mueve muy poco durante la colisión.

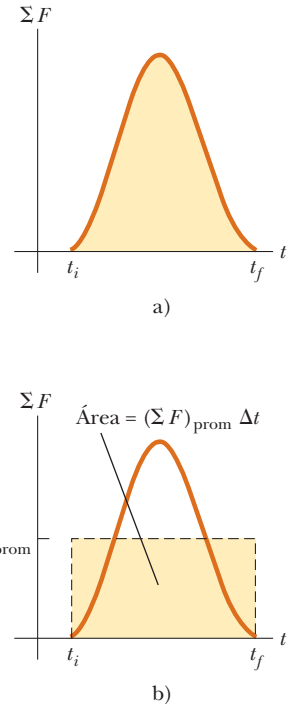


Figura 9.3 a) Una fuerza neta que actúa sobre una partícula puede variar en el tiempo. El impulso impartido a la partícula por la fuerza es el área bajo la curva fuerza con tiempo. b) En el intervalo de tiempo Δt, la fuerza neta promediada en el tiempo (línea discontinua horizontal) da el mismo impulso a una partícula como lo hace la fuerza variable en el tiempo descrita en a).

Pregunta rápida 9.3 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción. El objeto 1 tiene una masa mayor que el objeto 2. **i)** Cuando se aplica una fuerza constante al objeto 1, acelera a través de una distancia d en una línea recta. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento cuando el objeto 2 aceleró a través de la misma distancia d, ¿qué enunciados son verdaderos? a) $p_1 < p_2$, b) $p_1 = p_2$, c) $p_1 > p_2$, d) $K_1 < K_2$, e) $K_1 = K_2$, f) $K_1 > K_2$. **ii)** Cuando se aplica una fuerza al objeto 1, éste acelera durante un intervalo de tiempo Δt. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. De la misma lista de opciones, ¿cuáles enunciados son verdaderos después de que el objeto 2 acelera durante el mismo intervalo de tiempo Δt?

Pregunta rápida 9.4 Clasifique el tablero, el cinturón de seguridad y la bolsa de aire de un automóvil en términos de a) el impulso y b) la fuerza promedio que cada uno entrega a un pasajero en el asiento delantero durante una colisión, de mayor a menor.

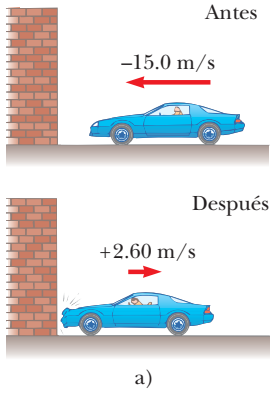
EJEMPLO 9.3 ¿Qué tan útiles son las defensas?

En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa choca con una pared, como se muestra en la figura 9.4. Las velocidades inicial y final del automóvil son $\vec{\mathbf{v}}_i = -15.0\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\vec{\mathbf{v}}_f = 2.60\hat{\mathbf{i}}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza promedio ejercida en el automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El tiempo de colisión es breve, así que se puede formar una idea de que el automóvil se lleva al reposo muy rápidamente y en tal caso se mueve de regreso en la dirección opuesta con una rapidez reducida.

Categorizar Se considera que la fuerza ejercida por la pared sobre el automóvil es grande en comparación con otras fuerzas sobre el auto (como la fricción y la resistencia del aire). Además, la fuerza gravitacional y la fuerza normal ejercida por el camino sobre el automóvil son perpendiculares al movimiento y en consecuencia no afectan la cantidad de movimiento horizontal. Por lo tanto, se clasifica el problema como uno en el que se puede aplicar la aproximación del impulso en la dirección horizontal.



a)

Tim Wright/CORBIS

b)

Figura 9.4 (Ejemplo 9.3) a) La cantidad de movimiento de este automóvil cambia como resultado de su colisión con la pared. b) En una prueba de choque, mucha de la energía cinética inicial del automóvil se transforma en energía asociada con el daño al auto.

Analizar

Evalúe las cantidades de movimiento inicial y final del automóvil:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m\vec{\mathbf{v}}_i = (1\,500\text{ kg})(-15.0\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = -2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{\mathbf{p}}_f = m\vec{\mathbf{v}}_f = (1\,500\text{ kg})(2.60\hat{\mathbf{i}}\text{ m/s}) = 0.39 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Aplique la ecuación 9.10 para hallar el impulso en el automóvil

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0.39 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s})$$

$$= 2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Aplique la ecuación 9.3 para hallar el valor numérico de la fuerza promedio ejercida por la pared en el automóvil:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\text{ s}} = 1.76 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}\text{ N}$$

Finalizar Note que los signos de las velocidades en este ejemplo indican la inversión de direcciones. ¿Cuáles serían las matemáticas descriptivas si las velocidades inicial y final tienen el mismo signo?

¿Qué pasaría si? ¿Y si el automóvil no rebota de la pared? Suponga que la velocidad final del automóvil es cero y que el intervalo de tiempo de la colisión permanece en 0.150 s. ¿Esto representaría una fuerza mayor o menor ejercida por la pared sobre el auto?

Respuesta En la situación original en la que el automóvil rebota, la fuerza por la pared sobre el automóvil hace dos cosas durante el intervalo de tiempo: 1) detiene el auto y 2) hace que el auto se aleje de la pared a 2.60 m/s después de chocar. Si el automóvil no rebota, la fuerza sólo hace el primero de estos pasos (detener el auto), lo que requiere una fuerza *más pequeña*.

En términos matemáticos, en el caso del auto que no rebota, el impulso es

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = 0 - (-2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

La fuerza promedio que ejerce la pared sobre el automóvil es

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{p}}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4\hat{\mathbf{i}}\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0.150\text{ s}} = 1.50 \times 10^5\hat{\mathbf{i}}\text{ N}$$

que de hecho es más pequeña que el valor anteriormente calculado, como se argumentó teóricamente.

9.3 Colisiones en una dimensión

En esta sección se usa la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal para describir lo que ocurre cuando chocan dos partículas. El término **colisión** representa un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan mediante fuerzas. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que otras fuerzas externas cualesquiera, así que se puede usar la aproximación del impulso.

Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura 9.5a, pero la noción de lo que significa una colisión se debe ampliar porque "contacto físico" en una escala submicroscópica está mal definido y por lo tanto no

tiene significado. Para comprender este concepto, considere una colisión a escala atómica (figura 9.5b) tal como la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio). Ya que las partículas tienen carga positiva, se repelen mutuamente debido a la fuerza electrostática intensa entre ellas en separaciones cercanas y nunca entran en "contacto físico".

Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan como se muestra en la figura 9.5, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, tales como las que se muestran en la figura 9.3. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza impulsiva, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. En consecuencia, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

En contraste, la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. De hecho, las colisiones se categorizan como *elásticas* o como *inelásticas*, dependiendo de si la energía cinética se conserva o no.

Una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en la que **la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión**. Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son *aproximadamente* elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, usted puede escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que usted sabe que parte de la energía se transfiere del sistema mediante sonido. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas.

En una **colisión inelástica la energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve)**. Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos se unen después de chocar, como cuando un meteorito choca con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica**. Cuando los objetos en colisión no se unen sino que se pierde parte de la energía cinética, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama **inelástica** (sin adverbio modificador). Cuando la bola de hule choca con la superficie dura, parte de la energía cinética de la bola se pierde cuando la bola se deforma mientras está en contacto con la superficie.

En el resto de esta sección, se tratan las colisiones en una dimensión y se consideran los dos casos extremos, las colisiones perfectamente inelásticas y elásticas.

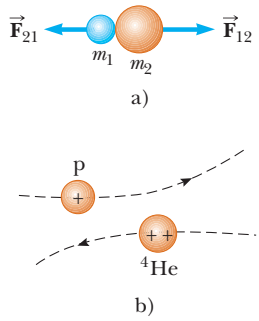


Figura 9.5 a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. b) "Colisión" entre dos partículas con carga.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.2

Colisiones inelásticas

Por lo general, las colisiones inelásticas son difíciles de analizar sin información adicional. La falta de esta información aparece en la representación matemática con más incógnitas que ecuaciones.

Colisiones perfectamente inelásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.6. Las dos partículas chocan de frente, quedan unidas y luego se mueven con alguna velocidad común $\vec{\mathbf{v}}_f$ después de la colisión. Ya que la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *cualquier* colisión, se puede decir que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento total del sistema compuesto después de la colisión:

$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f \tag{9.14}$$

Al resolver para la velocidad final se obtiene

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i}}{m_1 + m_2} \tag{9.15}$$

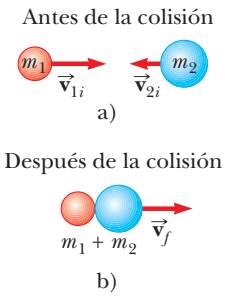


Figura 9.6 Representación esquemática de una colisión frontal perfectamente inelástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

Colisiones elásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{\mathbf{v}}_{1i}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2i}$ a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.7. Las dos partículas chocan frontalmente y luego dejan el sitio de colisión con diferentes velocidades $\vec{\mathbf{v}}_{1f}$ y $\vec{\mathbf{v}}_{2f}$. En una colisión elástica, tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética

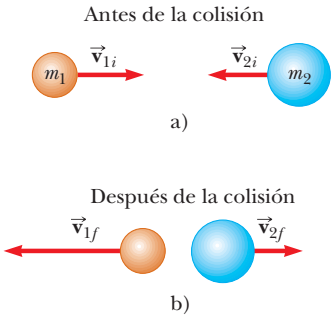


Figura 9.7 Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

del sistema se conserva. Por ende, al considerar velocidades a lo largo de la dirección horizontal en la figura 9.7, se tiene

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{9.16}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{9.17}$$

Ya que todas las velocidades en la figura 9.7 son hacia la izquierda o hacia la derecha, se pueden representar mediante las correspondientes magnitudes de velocidad junto con los signos algebraicos que indican dirección. Se indicará v como positivo si una partícula se mueve hacia la derecha y negativo si se mueve hacia la izquierda.

En un problema representativo que incluye colisiones elásticas, existen dos cantidades desconocidas, y las ecuaciones 9.16 y 9.17 se pueden resolver simultáneamente para encontrarlas. Sin embargo, un planteamiento alternativo, uno que involucra un poco de manipulación matemática de la ecuación 9.17, con frecuencia simplifica este proceso. Para ver cómo, cancele el factor $\frac{1}{2}$ en la ecuación 9.17 y rescríbala como

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

el factorizar ambos lados de esta ecuación produce

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \tag{9.18}$$

A continuación, se separa los términos que contengan m_1 y m_2 en la ecuación 9.16 para obtener

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \tag{9.19}$$

Para obtener el resultado final, divida la ecuación 9.18 entre la ecuación 9.19

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \tag{9.20}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.3

No es una ecuación general

La ecuación 9.20 sólo se puede usar en una situación muy *específica*, una colisión elástica unidimensional entre dos objetos. El concepto *general* es la conservación de la cantidad de movimiento (y la conservación de la energía cinética, si la colisión es elástica) para un sistema aislado.

Esta ecuación, en combinación con la ecuación 9.16, se usa para resolver problemas que traten con colisiones elásticas. De acuerdo con la ecuación 9.20, la velocidad *relativa* de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de su velocidad relativa después de la colisión, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Suponga que se conocen las masas y velocidades iniciales de ambas partículas. Las ecuaciones 9.16 y 9.20 se pueden resolver para las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales porque existen dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \tag{9.21}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \tag{9.22}$$

Es importante usar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i} en las ecuaciones 9.21 y 9.22.

Considere algunos casos especiales. Si $m_1 = m_2$, las ecuaciones 9.21 y 9.22 muestran que $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$, lo que significa que las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales. Esto es aproximadamente lo que uno observa en las colisiones frontales de las bolas de billar: la bola blanca se detiene y la bola golpeada se aleja de la colisión con la misma velocidad que tenía la bola blanca.

Si la partícula 2 está en reposo al inicio, en tal caso $v_{2i} = 0$, y las ecuaciones 9.21 y 9.22 se convierten en

Colisión elástica: partícula 2 inicialmente en reposo ▶

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \tag{9.23}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \tag{9.24}$$

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, se ve de las ecuaciones 9.23 y 9.24 que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Esto es, cuando una partícula muy pesada choca frontalmente con una muy

ligera que inicialmente está en reposo, la partícula pesada continúa su movimiento sin alterarse después de la colisión y la partícula ligera rebota con una rapidez igual a casi el doble de la rapidez inicial de la partícula pesada. Un ejemplo de tal colisión es la de un átomo pesado en movimiento, como el uranio, que golpea un átomo ligero, como el hidrógeno.

Si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 inicialmente está en reposo, en tal caso $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Esto es, cuando una partícula muy ligera choca frontalmente con una partícula muy pesada que inicialmente está en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la pesada permanece prácticamente en reposo.

Pregunta rápida 9.5 En una colisión unidimensional perfectamente inelástica entre dos objetos en movimiento, ¿qué condición única es necesaria de modo que la energía cinética final del sistema sea cero después de la colisión? a) Los objetos deben tener cantidades de movimiento con la misma magnitud pero direcciones opuestas. b) Los objetos deben tener la misma masa. c) Los objetos deben tener la misma velocidad. d) Los objetos deben tener la misma rapidez, con vectores velocidad en direcciones opuestas.

Pregunta rápida 9.6 Una pelota de ping pong se lanza hacia una bola de boliche fija. La pelota de ping pong hace una colisión elástica unidimensional y rebota de regreso a lo largo de la misma línea. En comparación con la bola de boliche después de la colisión, ¿la pelota de ping pong tiene a) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y más energía cinética, b) una magnitud menor de cantidad de movimiento y más energía cinética, c) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y menos energía cinética, d) una magnitud menor de cantidad de movimiento y menos energía cinética o e) la misma magnitud de cantidad de movimiento y la misma energía cinética?

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS — Colisiones unidimensionales

Debe aplicar el planteamiento siguiente cuando resuelva problemas de colisiones en una dimensión:

1. *Conceptualizar.* Piense que la colisión se presenta en su mente. Dibuje diagramas simples de las partículas antes y después de la colisión e incluya vectores velocidad adecuados. Al principio, es posible que deba adivinar las direcciones de los vectores velocidad finales.
2. *Categorizar.* ¿El sistema de partículas es aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.
3. *Analizar.* Establezca la representación matemática adecuada para el problema. Si la colisión es perfectamente inelástica, use la ecuación 9.15. Si la colisión es elástica, use las ecuaciones 9.16 y 9.20. Si la colisión es inelástica, use la ecuación 9.16. Para encontrar las velocidades finales en este caso, necesitará alguna información adicional.
4. *Finalizar.* Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son congruentes con las representaciones mental y gráfica y que sus resultados son realistas.

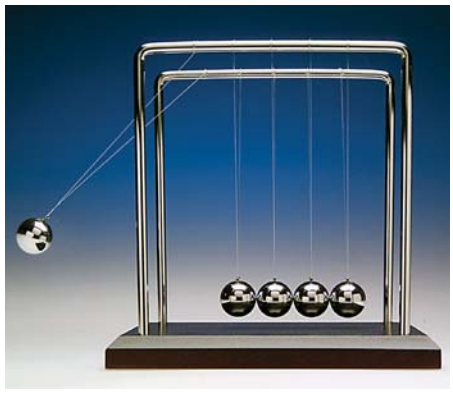
EJEMPLO 9.4 — Aliviador de estrés para ejecutivos

En la figura 9.8 (página 238) se muestra un ingenioso dispositivo que explica la conservación de la cantidad de movimiento y la energía cinética. Consiste de cinco bolas duras idénticas sostenidas por cuerdas de iguales longitudes. Cuando la bola 1 se retira y se libera, después de la colisión casi elástica entre ella y la bola 2, la bola 1 se detiene y la bola 5 se mueve hacia afuera, como se muestra en la figura 9.8b. Si las bolas 1 y 2 se retiran y liberan, se detienen después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balancean hacia afuera, y así por el estilo. ¿Alguna vez es posible que, cuando la bola 1 se libere, se detenga después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balanceen en el lado opuesto y viajen con la mitad de la rapidez de la bola 1, como en la figura 9.8c?

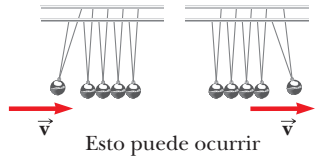
SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 9.8c, piense que una bola llega desde la izquierda y dos bolas salen de la colisión a la derecha. Este es el fenómeno que se quiere probar para ver si podría ocurrir alguna vez.

Categorizar Debido al intervalo de tiempo muy breve entre la llegada de la bola desde la izquierda y la partida de las bolas de la derecha, se puede usar la aproximación de impulso para ignorar las fuerzas gravitacionales sobre las bolas y clasificar el sistema de cinco bolas como aislado en términos de cantidad de movimiento y energía. Ya que las bolas son duras, las colisiones entre ellas se clasifican como elásticas para propósitos de cálculo.

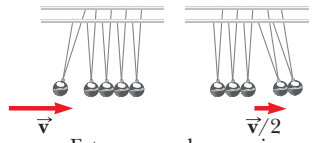


a)



Esto puede ocurrir

b)



Esto no puede ocurrir

c)

Figura 9.8 (Ejemplo 9.4) a) Un aliviador de estrés para ejecutivos. b) Si una bola se impulsa a la izquierda, se ve que una bola se aleja en el otro extremo. c) ¿Es posible que una bola se impulse a la izquierda y dos bolas dejen el otro extremo con la mitad de la rapidez de la primera bola? En b) y c), los vectores velocidad que se muestran representan los de las bolas inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión.

Analizar La cantidad de movimiento del sistema antes de la colisión es mv, donde m es la masa de la bola 1 y v es su rapidez inmediatamente antes de la colisión. Después de la colisión, se supone que la bola 1 se detiene y las bolas 4 y 5 se alejan, cada una con rapidez $v/2$. La cantidad de movimiento total del sistema después de la colisión sería $m(v/2) + m(v/2) = mv$. Por ende, la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

La energía cinética del sistema inmediatamente antes de la colisión es $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ y después de la colisión es $K_f = \frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}m(v/2)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Esto muestra que la energía cinética del sistema *no* se conserva, lo que es inconsistente con la suposición de que las colisiones son elásticas.

Finalizar El análisis muestra que *no* es posible que las bolas 4 y 5 se balanceen cuando sólo la bola 1 se libera. La única forma de conservar tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema es que una bola se mueva cuando una bola se libera, dos bolas se muevan cuando dos se liberan, y así sucesivamente.

¿Qué pasaría si? Considere lo que ocurriría si las bolas 4 y 5 se unen con pegamento. ¿Qué ocurre ahora cuando la bola 1 es alejada y liberada?

Respuesta En esta situación, las bolas 4 y 5 deben moverse juntas como un solo objeto después de la colisión. En efecto antes se argumentó que, en este caso, la cantidad de movimiento y la energía del sistema no se pueden conservar. Sin embargo, se supone que la bola 1 se detuvo después de golpear la bola 2. ¿Y si no se hace esta suposición? Considere las ecuaciones de conservación con la suposición de que la bola 1 se mueve después de la colisión. Para conservación de cantidad de movimiento

$$p_i = p_f$$

$$mv_{1i} = mv_{1f} + 2mv_{4,5}$$

donde $v_{4,5}$ se refiere a la rapidez final de la combinación bola 4–bola 5. La conservación de la energía cinética produce

$$K_i = K_f$$

$$\tfrac{1}{2}mv_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}(2m)v_{4,5}^2$$

Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$v_{4,5} = \tfrac{2}{3}v_{1i} \qquad v_{1f} = -\tfrac{1}{3}v_{1i}$$

En consecuencia, las bolas 4 y 5 se mueven juntas como un objeto después de la colisión mientras que la bola 1 rebota en la colisión con un tercio de su rapidez original.

EJEMPLO 9.5 ¡Lleve seguro contra choques!

A un automóvil de 1 800 kg detenido en un semáforo lo golpea por la parte trasera un automóvil de 900 kg. Los dos autos quedan unidos y se mueven a lo largo de la misma trayectoria que la del automóvil en movimiento. Si el auto más pequeño se movía a 20.0 m/s antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los automóviles unidos después de la colisión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este tipo de colisión se visualiza con facilidad, y se puede predecir que, después de la colisión, ambos automóviles se moverán en la misma dirección que la del automóvil en movimiento. Ya que el automóvil en movimiento sólo tiene la mitad de masa que el automóvil fijo, se espera que la velocidad final de los automóviles sea relativamente pequeña.

Categorizar Identifique el sistema de dos automóviles como aislado y aplique la aproximación de impulso durante el breve intervalo de tiempo de la colisión. La frase "quedan unidos" pide clasificar la colisión como perfectamente inelástica.

Analizar La magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema antes de la colisión es igual a la del automóvil más pequeño porque el auto más grande inicialmente está en reposo.

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema: $$p_i = m_1 v_i = (900\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s}) = 1.80 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Evalúe la cantidad de movimiento final del sistema: $$p_f = (m_1 + m_2) v_f = (2\ 700\ \text{kg}) v_f$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final y resuelva para v_f: $$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{1.80 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{2\ 700\ \text{kg}} = 6.67\ \text{m/s}$$

Finalizar Ya que la velocidad final es positiva, la dirección de la velocidad final de la combinación es la misma que la velocidad del automóvil en movimiento, como se predijo. La rapidez de la combinación también es mucho menor que la rapidez inicial del automóvil en movimiento.

¿Qué pasaría si? Suponga que se invierten las masas de los automóviles. ¿Y si un automóvil de 1 800 kg en movimiento golpea a un automóvil fijo de 900 kg? ¿La rapidez final es la misma que antes?

Respuesta Por intuición, se supone que la rapidez final de la combinación es mayor que 6.67 m/s si el automóvil en movimiento es el auto más grande. En términos matemáticos, ese debe ser el caso, ya que el sistema tiene una cantidad de movimiento más grande si el automóvil en movimiento es el más grande. Al resolver para la velocidad final nueva, se encuentra

$$v_f = \frac{p_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1\ 800\ \text{kg})(20.0\ \text{m/s})}{2\ 700\ \text{kg}} = 13.3\ \text{m/s}$$

que es dos veces más grande que la velocidad final previa.

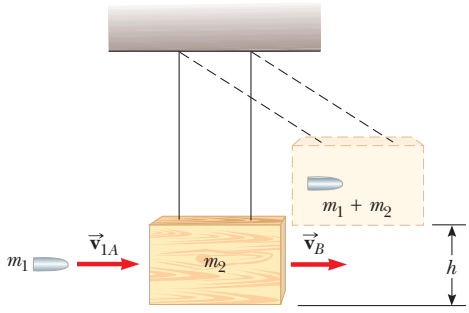
EJEMPLO 9.6 El péndulo balístico

El péndulo balístico (figura 9.9) es un aparato que se usa para medir la rapidez de un proyectil que se mueve rápidamente, como una bala. Un proyectil de masa m_1 se dispara hacia un gran bloque de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres ligeros. El proyectil se incrusta en el bloque y todo el sistema se balancea hasta una altura h. ¿Cómo se determina la rapidez del proyectil a partir de una medición de h?

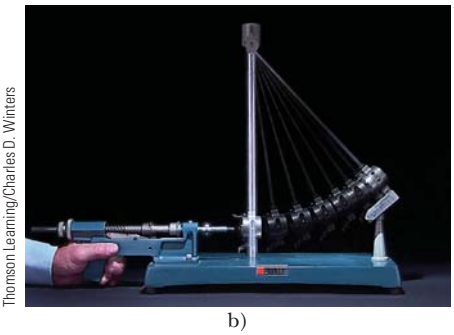
SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.9a ayuda a formar ideas de la situación. Siga la animación en su mente: el proyectil entra al péndulo, que se balancea cierta altura hasta que llega al reposo.

Categorizar El proyectil y el bloque forman un sistema aislado. Identifique la configuración A como inmediatamente antes de la colisión y la configuración B como inmediatamente después de la colisión. Ya que el proyectil se incrusta en el bloque, la colisión entre ellos se considera como perfectamente inelástica.



a)



Thomson Learning/Charles D. Winters

b)

Figura 9.9 (Ejemplo 9.6) a) Diagrama de un péndulo balístico. Note que $\vec{\mathbf{v}}_{1A}$ es la velocidad del proyectil inmediatamente antes de la colisión y $\vec{\mathbf{v}}_B$ es la velocidad del sistema proyectil–bloque inmediatamente después de la colisión perfectamente inelástica. b) Fotografía estroboscópica de un péndulo balístico usado en el laboratorio.

Analizar Para analizar la colisión, se aplica la ecuación 9.15, que proporciona la rapidez del sistema inmediatamente después de la colisión cuando se considera la aproximación de impulso.

Al notar que $v_{2A} = 0$, resuelva la ecuación 9.15 para v_B:

$$1) \quad v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

Categorizar Para el proceso durante el que la combinación proyectil–bloque se balancea hacia arriba a una altura h (y termina en la configuración C), considere un sistema *diferente*, el del proyectil, el bloque y la Tierra. Esta parte del problema se clasifica como un sistema aislado para energía sin fuerzas no conservativas en acción.

Analizar Escriba una expresión para la energía cinética total del sistema inmediatamente después de la colisión:

$$2) \quad K_B = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$$

Sustituya el valor de v_B de la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Esta energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión es *menor* que la energía cinética inicial del proyectil, como se esperaba en una colisión inelástica.

La energía potencial gravitacional del sistema se define como cero para la configuración B. Por lo tanto, $U_B = 0$, mientras que $U_C = (m_1 + m_2)gh$.

Aplique el principio de conservación de la energía mecánica al sistema:

$$K_B + U_B = K_C + U_C$$

$$\frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh$$

Resuelva para v_{1A}:

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh}$$

Finalizar Este problema tuvo que resolverse en dos etapas. Cada etapa involucró un sistema diferente y un principio de conservación diferente. Ya que la colisión se considera perfectamente inelástica, alguna energía mecánica se transformó en energía interna. Hubiera sido *incorrecto* igualar la energía cinética inicial del proyectil que entra con la energía potencial gravitacional final de la combinación proyectil–bloque–Tierra.

EJEMPLO 9.7 Un colisión de dos cuerpos con un resorte

Un bloque de masa $m_1 = 1.60$ kg inicialmente móvil hacia la derecha con una rapidez de 4.00 m/s sobre una pista horizontal sin fricción y choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2.10$ kg que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 2.50 m/s, como se muestra en la figura 9.10a. La constante de resorte es 600 N/m.

A) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión.

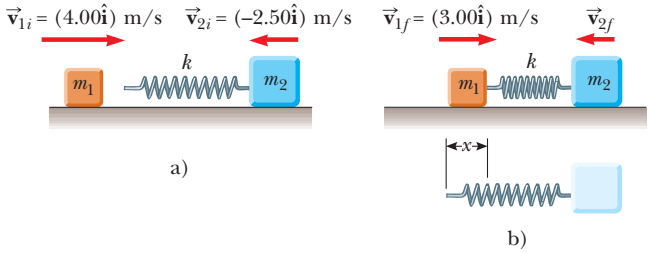


Figura 9.10 (Ejemplo 9.7) Un bloque móvil se aproxima a un segundo bloque en movimiento que está unido a un resorte.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con ayuda de la figura 9.10a, siga una animación de la colisión en su mente. La figura 9.10b muestra un instante durante la colisión, cuando se comprime el resorte. Al final, el bloque 1 y el resorte se separarán de nuevo, así que el sistema se parecerá de nuevo a la figura 9.10a pero con diferentes vectores velocidad para los dos bloques.

Categorizar Ya que la fuerza del resorte es conservativa, la energía cinética en el sistema no se transforma en energía interna durante la compresión del resorte. Si ignora cualquier sonido hecho cuando el bloque golpea el resorte, clasifique la colisión como elástica.

Analizar Ya que la cantidad de movimiento del sistema se conserva, aplique la ecuación 9.16:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Sustituya los valores conocidos:
$$(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s}) = (1.60\text{ kg})v_{1f} + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$
$$1)\quad 1.15\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (1.60\text{ kg})v_{1f} + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$

Puesto que la colisión es elástica, aplique la ecuación 9.20:
$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Sustituya los valores conocidos:
$$2)\quad 4.00\text{ m/s} - (-2.50\text{ m/s}) = 6.50\text{ m/s} = -v_{1f} + v_{2f}$$

Multiplique la ecuación 2) por 1.60 kg:
$$3)\quad 10.4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = -(1.60\text{ kg})v_{1f} + (1.60\text{ kg})v_{2f}$$

Sume las ecuaciones 1) y 3):
$$11.55\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (3.70\text{ kg})v_{2f}$$

Resuelva para v_{2f}:
$$v_{2f} = \frac{11.55\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{3.70\text{ kg}} = 3.12\text{ m/s}$$

Use la ecuación 2) para encontrar v_{1f}:
$$6.50\text{ m/s} = -v_{1f} + 3.12\text{ m/s}$$
$$v_{1f} = -3.38\text{ m/s}$$

B) Durante la colisión, en el instante en que el bloque 1 se mueve hacia la derecha con una velocidad de +3.00 m/s, como en la figura 9.10b, determine la velocidad del bloque 2.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ahora dirija su atención en la figura 9.10b, que representa la configuración final del sistema para el intervalo de tiempo de interés.

Categorizar Ya que la cantidad de movimiento y la energía mecánica del sistema de dos bloques se conservan *durante toda* la colisión para el sistema de dos bloques, la colisión se clasifica como elástica para *cualquier* instante de tiempo final. Ahora elija el instante final cuando el bloque 1 se mueve con una velocidad de +3.00 m/s.

Analizar Aplique la ecuación 9.16:
$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

Sustituya los valores conocidos:
$$(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})(-2.50\text{ m/s}) = (1.60\text{ kg})(3.00\text{ m/s}) + (2.10\text{ kg})v_{2f}$$

Resuelva para v_{2f}:
$$v_{2f} = -1.74\text{ m/s}$$

Finalizar El valor negativo para v_{2f} significa que el bloque 2 todavía se mueve hacia la izquierda en el instante que se considera.

C) Determine la distancia que se comprime el resorte en dicho instante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar De nuevo, centre su atención en la configuración del sistema que se muestra en la figura 9.10b.

Categorizar Para el sistema del resorte y dos bloques, ni fricción ni otras fuerzas no conservativas actúan dentro del sistema. Por lo tanto, el sistema se clasifica como aislado sin fuerzas no conservativas en acción.

Analizar Elija la configuración inicial del sistema como la existente inmediatamente antes de que el bloque 1 golpee el resorte y la configuración final cuando el bloque 1 se mueve hacia la derecha a 3.00 m/s.

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema:
$$K_i + U_i = K_f + U_f$$
$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

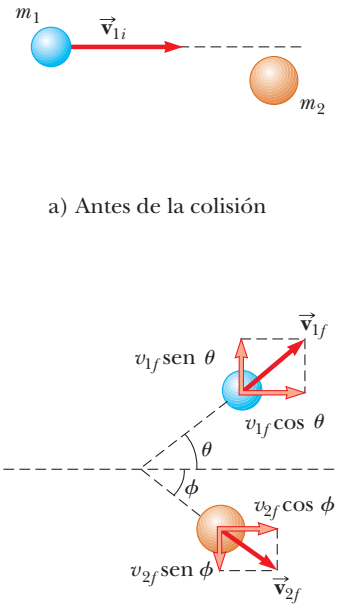
Sustituya los valores conocidos y el resultado del inciso B):

$$\tfrac{1}{2}(1.60\text{ kg})(4.00\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2.10\text{ kg})(2.50\text{ m/s})^2 + 0$$
$$= \tfrac{1}{2}(1.60\text{ kg})(3.00\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2.10\text{ kg})(1.74\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(600\text{ N/m})x^2$$

Resuelva para x:

$$x = 0.173\text{ m}$$

Finalizar Esta respuesta no es la compresión máxima del resorte, porque los dos bloques aún se mueven uno hacia el otro en el instante que se muestra en la figura 9.10b. ¿Se puede determinar la compresión máxima del resorte?



a) Antes de la colisión

b) Después de la colisión

Figura 9.11 Una colisión elástica indirecta entre dos partículas.

9.4 Colisiones en dos dimensiones

En la sección 9.1 se mostró que la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas se conserva cuando el sistema está aislado. Para cualquier colisión de dos partículas, este resultado implica que la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones x, y y z se conserva. Un importante subconjunto de colisiones tiene lugar en un plano. El juego de billar es un ejemplo familiar que involucra múltiples colisiones de objetos que se mueven en una superficie en dos dimensiones. Para tales colisiones en dos dimensiones, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$
$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

donde tres subíndices en las componentes de velocidad en estas ecuaciones representan, respectivamente, la identificación del objeto (1, 2), los valores inicial y final (i, f) y la componente de velocidad (x, y).

Considere un problema específico en dos dimensiones en el que la partícula 1 de masa m_1 choca con la partícula 2 de masa m_2 inicialmente en reposo, como en la figura 9.11. Después de la colisión (figura 9.11b), la partícula 1 se mueve en un ángulo θ respecto a la horizontal y la partícula 2 se mueve en un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Este evento se llama colisión *oblicua* al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que la componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es cero, se obtiene

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi \tag{9.25}$$

$$0 = m_1 v_{1f}\operatorname{sen}\theta - m_2 v_{2f}\operatorname{sen}\phi \tag{9.26}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.4
No use la ecuación 9.20

La ecuación 9.20, que relaciona las velocidades relativas inicial y final de dos objetos que chocan, sólo es válida para colisiones elásticas unidimensionales. No use esta ecuación cuando analice colisiones en dos dimensiones.

donde el signo menos en la ecuación 9.26 se incluye porque, después de la colisión, la partícula 2 tiene una componente y de velocidad que es hacia abajo. (Los símbolos v en estas ecuaciones particulares son magnitudes de velocidad, no componentes de velocidad. La dirección del vector componente se indica explícitamente con los signos más o menos.) Ahora se tienen dos ecuaciones independientes. Ya que no más de dos de las siete cantidades en las ecuaciones 9.25 y 9.26 sean incógnitas, se puede resolver este problema.

Si la colisión es elástica, también se puede usar la ecuación 9.17 (conservación de energía cinética) con $v_{2i} = 0$:

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 \tag{9.27}$$

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, quedan cuatro incógnitas (v_{1f}, v_{2f}, θ y ϕ). Ya que sólo se tienen tres ecuaciones, se debe proporcionar una de las cuatro cantidades restantes para determinar el movimiento después de la colisión elástica a partir de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y la ecuación 9.27 *no* se aplica.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Colisiones bidimensionales

Se recomienda el procedimiento siguiente cuando trate con problemas que involucran colisiones entre dos partículas en dos dimensiones.

1. *Conceptualizar.* Forme una idea de que ocurren las colisiones y predice las direcciones aproximadas en las que se moverán las partículas después de la colisión. Establezca un sistema coordenado y defina sus velocidades en términos de dicho sistema. Es conveniente que el eje x coincida con una de las velocidades iniciales. Bosqueje el sistema coordenado, dibuje y etiquete todos los vectores velocidad e incluya toda la información conocida.

2. *Categorizar.* ¿El sistema de partículas verdaderamente está aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.

3. *Analizar.* Escriba expresiones para las componentes x y y de la cantidad de movimiento de cada objeto antes y después de la colisión. Recuerde incluir los signos adecuados para las componentes de los vectores velocidad y ponga mucha atención a los signos.

   Escriba expresiones para la cantidad de movimiento *total* en la dirección x *antes* y *después* de la colisión, e iguale las dos. Repita este procedimiento para la cantidad de movimiento total en la dirección y.

   Proceda a resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento para las cantidades desconocidas. Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y es posible que se requerirá información adicional. Si la colisión es perfectamente inelástica, las velocidades finales de los dos objetos son iguales.

   Si la colisión es elástica, la energía cinética se conserva y se puede igualar la energía cinética total del sistema antes de la colisión con la energía cinética total después de la colisión, lo que proporciona una relación adicional entre las magnitudes de velocidad.

4. *Finalizar.* Una vez que haya determinado su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mental y gráfica y que sus resultados sean realistas.

EJEMPLO 9.8 Colisión en un cruce

Un automóvil de 1 500 kg, que viaja al este con una rapidez de 25.0 m/s, choca en un cruce con una camioneta de 2 500 kg que viaja al norte con una rapidez de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 9.12. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad del choque después de la colisión, y suponga que los vehículos quedan unidos después de la colisión.

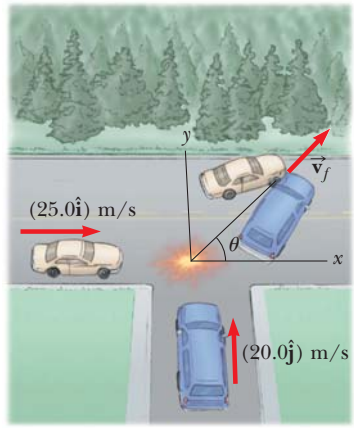


Figura 9.12 (Ejemplo 9.8) Un automóvil que viaja hacia el este choca con una camioneta que viaja hacia el norte.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.12 debe ayudarlo a formar ideas de la situación antes y después de la colisión. Elija el este a lo largo de la dirección x positiva y el norte a lo largo de la dirección y positiva.

Categorizar Como se consideran los momentos inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión como definitorios del intervalo de tiempo, se ignora el efecto pequeño que la fricción tendría sobre las llantas del automóvil y el sistema de dos autos se modela como aislado. También se ignoran los tamaños de los automóviles y se les modela como partículas. La colisión es perfectamente inelástica porque los dos autos quedan unidos después de la colisión.

Analizar Antes de la colisión, el único objeto que tiene cantidad de movimiento en la dirección x es el automóvil. Por lo tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento inicial total del sistema (automóvil más camioneta) en la dirección x sólo es la del automóvil. De igual modo, la cantidad de movimiento inicial total del sistema en la dirección y es la de la camioneta. Después de la colisión, suponga que los despojos se mueven a un ángulo θ y rapidez v_f.

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección x:

$$\sum p_{xi} = (1\,500\text{ kg})(25.0\text{ m/s}) = 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento final en la dirección x:

$$\sum p_{xf} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final en la dirección x:

$$1)\quad 3.75 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta$$

Evalúe la cantidad de movimiento inicial del sistema en la dirección y:

$$\sum p_{yi} = (2\,500\text{ kg})(20.0\text{ m/s}) = 5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento final en la dirección y:

$$\sum p_{yf} = (4\,000\text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Iguale las cantidades de movimiento inicial y final en la dirección y:

$$2)\quad 5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} = (4\,000\text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta$$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) y resuelva para θ:

$$\frac{(4\,000\text{ kg})v_f \operatorname{sen}\theta}{(4\,000\text{ kg})v_f \cos\theta} = \tan\theta = \frac{5.00 \times 10^4}{3.75 \times 10^4} = 1.33$$

$$\theta = 53.1^\circ$$

Use la ecuación 2) para encontrar el valor de v_f:

$$v_f = \frac{5.00 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{(4\,000\text{ kg})\operatorname{sen} 53.1^\circ} = 15.6\text{ m/s}$$

Finalizar Note que el ángulo θ está cualitativamente en concordancia con la figura 9.12; además que la rapidez final de la combinación es menor que las magnitudes de velocidad iniciales de los dos automóviles. Este resultado es consistente con la energía cinética del sistema a reducir en una colisión inelástica. Puede ser útil si dibuja los vectores cantidad de movimiento de cada vehículo antes de la colisión y de los dos vehículos juntos después de la colisión.

EJEMPLO 9.9 Colisión protón–protón

Un protón choca elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. El protón que entra tiene una rapidez inicial de 3.50×10^5 m/s y hace una colisión oblicua con el segundo protón, como en la figura 9.11. (En separaciones cercanas, los protones ejercen una fuerza electrostática repulsiva mutua.) Después de la colisión, un protón se aleja en un ángulo de 37.0° hacia la dirección de movimiento original y el segundo se desvía a un ángulo ϕ con el mismo eje. Encuentre las magnitudes de velocidad finales de los dos protones y el ángulo ϕ.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta colisión es similar a la que se muestra en la figura 9.11, que lo ayudará a formar ideas del comportamiento del sistema. El eje x se define a lo largo de la dirección del vector velocidad del protón inicialmente en movimiento.

Categorizar El par de protones forma un sistema aislado. Tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema se conservan en esta colisión elástica oblicua.

Analizar Se sabe que $m_1 = m_2$ y $\theta = 37.0^\circ$, y se sabe que $v_{1i} = 3.50 \times 10^5$ m/s.

Ingrese los valores conocidos en las ecuaciones 9.25, 9.26 y 9.27:

$$1)\quad v_{1f}\cos 37^\circ + v_{2f}\cos\phi = 3.50 \times 10^5\text{ m/s}$$

$$2)\quad v_{1f}\operatorname{sen} 37.0^\circ - v_{2f}\operatorname{sen}\phi = 0$$

$$3)\quad v_{1f}^2 + v_{2f}^2 = (3.50 \times 10^5\text{ m/s})^2 = 1.23 \times 10^{11}\text{ m}^2/\text{s}^2$$

Reordene las ecuaciones 1) y 2):

$$v_{2f}\cos\phi = 3.50 \times 10^5\text{ m/s} - v_{1f}\cos 37.0^\circ$$

$$v_{2f}\operatorname{sen}\phi = v_{1f}\operatorname{sen} 37.0^\circ$$

Eleve al cuadrado estas dos ecuaciones y súmelas:

$$v_{2f}^2 \cos^2 \phi + v_{2f}^2 \operatorname{sen}^2 \phi = 1.23 \times 10^{11}\ \text{m}^2/\text{s}^2 - (7.00 \times 10^5\ \text{m/s}) v_{1f} \cos 37.0^\circ + v_{1f}^2 \cos^2 37.0^\circ + v_{1f}^2 \operatorname{sen}^2 37.0^\circ$$

$$4) \quad v_{2f}^2 = 1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5) v_{1f} + v_{1f}^2$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 3):

$$v_{1f}^2 + [1.23 \times 10^{11} - (5.59 \times 10^5) v_{1f} + v_{1f}^2] = 1.23 \times 10^{11}$$

$$2v_{1f}^2 - (5.59 \times 10^5) v_{1f} = (2v_{1f} - 5.59 \times 10^5) v_{1f} = 0$$

Una posible solución de esta ecuación es $v_{1f} = 0$, que corresponde a una colisión frontal en la que el primer protón se detiene y el segundo continúa con la misma rapidez en la misma dirección. Esta no es la solución que se quiere.

Iguale a cero el otro factor:

$$2v_{1f} - 5.59 \times 10^5 = 0 \quad \rightarrow \quad v_{1f} = 2.80 \times 10^5\ \text{m/s}$$

Use la ecuación 3) para encontrar v_{2f}:

$$v_{2f} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - v_{1f}^2} = \sqrt{1.23 \times 10^{11} - (2.80 \times 10^5)^2} = 2.11 \times 10^5\ \text{m/s}$$

Use la ecuación 2) para encontrar ϕ:

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{v_{1f} \operatorname{sen} 37.0^\circ}{v_{2f}}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(2.80 \times 10^5) \operatorname{sen} 37.0^\circ}{2.11 \times 10^5}\right) = 53.0^\circ$$

Finalizar Es interesante que $\theta + \phi = 90^\circ$. Este resultado *no* es accidental. Siempre que dos objetos de igual masa choquen elásticamente en una colisión oblicua y uno de ellos inicialmente en reposo, sus velocidades finales son mutuamente perpendiculares.

9.5 El centro de masa

En esta sección se describe el movimiento global de un sistema en términos de un punto especial llamado el **centro de masa** del sistema. El sistema puede ser un grupo de partículas, como un conjunto de átomos en un contenedor, o un objeto extendido, como un gimnasta que salta en el aire. Se verá que el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto. Es decir, el sistema se mueve como si la fuerza externa neta se aplicara a una sola partícula ubicada en el centro de masa. Este comportamiento es independiente de otro movimiento, como la rotación o la vibración del sistema. Este modelo, el *modelo de partícula*, se introdujo en el capítulo 2.

Examine un sistema que consiste de un par de partículas que tienen diferentes masas y se conectan mediante una barra rígida ligera (figura 9.13). La posición del centro de masa de un sistema se describe como la *posición promedio* de la masa del sistema. El centro de masa del sistema se ubica en algún lugar en la línea que une las dos partículas y está más cerca de la partícula que tiene la masa más grande. Si se aplica una sola fuerza a un punto en la barra *arriba* del centro de masa, el sistema gira en sentido de las manecillas del reloj (vea la figura 9.13a). Si la fuerza se aplica en un punto en la barra por *abajo* del centro de masa, el sistema gira contra las manecillas del reloj (vea la figura 9.13b). Si la fuerza se aplica al centro de masa, el sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar (vea la figura 9.13c). El centro de masa de un objeto se ubica con este procedimiento.

El centro de masa del par de partículas descritas en la figura 9.14 (página 246) se ubica sobre el eje x y yace en algún lugar entre las partículas. Su coordenada x está dada por

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{9.28}$$

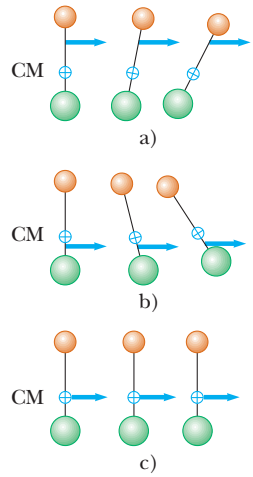


Figura 9.13 Dos partículas de distinta masa se conectan mediante una barra rígida ligera. a) El sistema gira en sentido de las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica arriba del centro de masa. b) El sistema gira contra las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica por abajo del centro de masa. c) El sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar cuando una fuerza se aplica en el centro de masa.

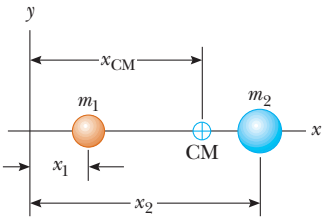


Figura 9.14 El centro de masa de dos partículas de masa distinta sobre el eje x se ubica en x_{CM}, un punto entre las partículas, más cerca de la que tiene la mayor masa.

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = d$ y $m_2 = 2m_1$, se encuentra que $x_{CM} = \frac{2}{3}d$. Es decir, el centro de masa se encuentra más cerca de la partícula más pesada. Si las dos masas son iguales, el centro de masa se encuentra a medio camino entre las partículas.

Se puede extender este concepto a un sistema de muchas partículas con masas m_i en tres dimensiones. La coordenada x del centro de masa de n partículas se define como

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i \qquad (9.29)$$

donde x_i es la coordenada x de la i–ésima partícula y la masa total es $M \equiv \sum_i m_i$, donde la suma incluye las n partículas. Las coordenadas y y z del centro de masa se definen de igual modo por las ecuaciones

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_iy_i \quad \text{y} \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_iz_i \qquad (9.30)$$

El centro de masa se puede ubicar en tres dimensiones mediante su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$. Las componentes de este vector son x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}, definidas en las ecuaciones 9.29 y 9.30. Por lo tanto,

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_iy_i\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_iz_i\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{r}}_i \qquad (9.31)$$

donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula, definida por

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Aunque ubicar el centro de masa para un objeto extendido es un poco más problemático que ubicar el centro de masa de un sistema de partículas, las ideas básicas discutidas aún se aplican. Piense en un objeto extendido como un sistema que contiene un gran número de partículas (figura 9.15). Ya que la separación de las partículas es muy pequeña, se considera que el objeto tiene una distribución de masa continua. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i, y_i, z_i, se ve que la coordenada x del centro de masa es aproximadamente

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i\,\Delta m_i$$

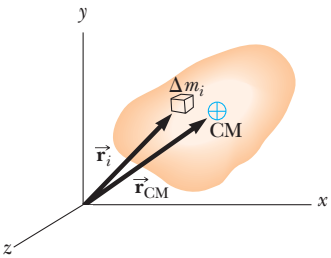


Figura 9.15 Un objeto extendido se considera como una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i. El centro de masa se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$, que tiene coordenadas x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}.

con expresiones similares para y_{CM} y z_{CM}. Si se hace que el número n de elementos tienda a infinito, el tamaño de cada elemento tiende a cero y x_{CM} se conoce con precisión. En este límite, se sustituye la suma mediante una integral y Δm_i por el elemento diferencial dm:

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i\,\Delta m_i = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad (9.32)$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad (9.33)$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\,dm \qquad (9.34)$$

que es equivalente a las tres expresiones dadas por las ecuaciones 9.32 y 9.33.

El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría.[3] Por ejemplo, el centro de masa de una barra uniforme se encuentra a medio camino entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o un cubo se encuentra en su centro geométrico.

El centro de masa de un objeto con forma irregular, como una llave de tuerca, se determina al suspender el objeto, primero de un punto y luego de otro. En la figura 9.16, una llave de tuerca cuelga del punto A y se dibuja una línea vertical AB (que se puede establecer con una plomada) cuando la llave de tuerca deja de balancearse. Luego la llave de tuerca se cuelga del punto C, y se dibuja una segunda línea vertical CD. El centro de masa está a la mitad a través del grosor de la llave de tuerca, bajo la intersección de estas dos líneas. En general, si la llave de tuerca cuelga libremente de cualquier punto, la línea vertical a través de este punto debe pasar a través del centro de masa.

Ya que un objeto extendido es una distribución de masa continua, en cada elemento pequeño de masa actúa la fuerza gravitacional. El efecto neto de todas estas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa a través de un punto especial, llamado **centro de gravedad**. Si $\vec{\mathbf{g}}$ es constante sobre la distribución de masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un objeto extendido gira sobre un eje en su centro de gravedad, se equilibra en cualquier orientación.

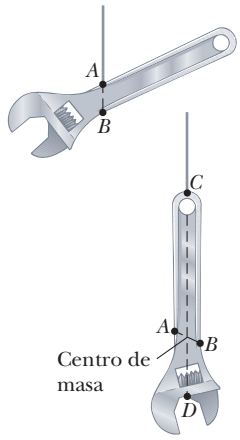


Figura 9.16 Una técnica experimental para determinar el centro de masa de una llave de tuerca. La llave de tuerca cuelga libremente, primero del punto A y luego del punto C. La intersección de las dos líneas AB y C ubica el centro de masa.

Pregunta rápida 9.7 Un bat de beisbol de densidad uniforme se corta en la ubicación de su centro de masa, como se muestra en la figura 9.17. ¿Cuál trozo tiene la menor masa? a) el de la derecha, b) el de la izquierda, c) ambos trozos tienen la misma masa, d) imposible de determinar.

Figura 9.17 (Pregunta rápida 9.7) Un bat de beisbol cortado en la ubicación de su centro de masa.

EJEMPLO 9.10 El centro de masa de tres partículas

Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura 9.18. Encuentre el centro de masa del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.18 muestra las tres masas. Su intuición debe decirle que el centro de masa se ubica en alguna parte en la región entre la partícula anaranjada y el par de partículas coloreadas en azul y verde, como se muestra en la figura.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución porque se usarán las ecuaciones para el centro de masa desarrolladas en esta sección.

El problema se configuró al etiquetar las masas de las partículas como se muestra en la figura, con $m_1 = m_2 = 1.0$ kg y $m_3 = 2.0$ kg.

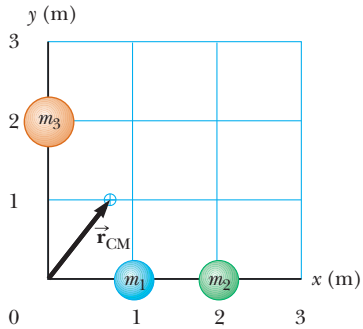


Figura 9.18 (Ejemplo 9.10) Dos partículas de 1.0 kg se ubican en el eje x, y una sola partícula de 2.0 kg se ubica en el eje y como se muestra. El vector indica la ubicación del centro de masa del sistema.

[3] Esta afirmación sólo es válida para objetos que tienen una densidad uniforme.

Use las ecuaciones definitorias para las coordenadas del centro de masa y note que $z_{CM} = 0$:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m}) + (1.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m}) + (2.0\ \text{kg})(0)}{1.0\ \text{kg} + 1.0\ \text{kg} + 2.0\ \text{kg}}$$

$$= \frac{3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 0.75\ \text{m}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0\ \text{kg})(0) + (1.0\ \text{kg})(0) + (2.0\ \text{kg})(2.0\ \text{m})}{4.0\ \text{kg}} = \frac{4.0\ \text{kg}\cdot\text{m}}{4.0\ \text{kg}} = 1.0\ \text{m}$$

Escriba el vector de posición del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} = (0.75\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

EJEMPLO 9.11 El centro de masa de una barra

A) Demuestre que el centro de masa de una barra de masa M y longitud L se encuentra equidistante de sus extremos, si supone que la barra tiene una masa uniforme por unidad de longitud.

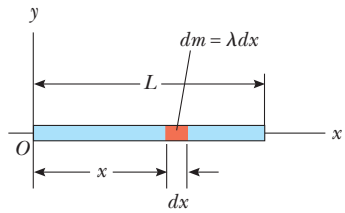


Figura 9.19 (Ejemplo 9.11) Geometría utilizada para encontrar el centro de masa de una barra uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La barra se muestra alineada a lo largo del eje x en la figura 9.19, de modo que $y_{CM} = z_{CM} = 0$.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis, porque es necesario dividir la barra en elementos para realizar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar La masa por unidad de longitud (esta cantidad se llama *densidad de masa lineal*) se puede escribir como $\lambda = M/L$ para la barra uniforme. Si la barra se divide en elementos de longitud dx, la masa de cada elemento es $dm = \lambda\, dx$.

Use la ecuación 9.32 para encontrar una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\, dx = \frac{\lambda}{M}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Sustituya $\lambda = M/L$:

$$x_{CM} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}$$

Además puede usar argumentos de geometría para obtener el mismo resultado.

B) Suponga que una barra *no es uniforme*, tal que su masa por unidad de longitud varía linealmente con x de acuerdo con la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada x del centro de masa como fracción de L.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya que la masa por unidad de longitud no es constante sino proporcional a x, los elementos de la barra hacia la derecha son más grandes que los elementos cerca del extremo izquierdo de la barra.

Categorizar Este problema se clasifica de manera similar al inciso A), con el sesgo añadido de que la densidad de masa lineal no es constante.

Analizar En este caso, sustituya dm en la ecuación 9.32 por $\lambda\, dx$, donde $\lambda = \alpha x$.

Use la ecuación 9.32 para encontrar una expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{1}{M}\int_0^L x\alpha x\,dx$$
$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2\,dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

Encuentre la masa total de la barra:

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\,dx = \int_0^L \alpha x\,dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

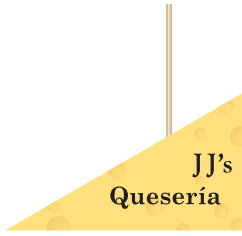
Sustituya M en la expresión para x_{CM}:

$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \tfrac{2}{3}L$$

Finalizar Note que el centro de masa en el inciso B) está más lejos hacia la derecha que en el inciso A). Este resultado es razonable porque los elementos de la barra se vuelven más grandes conforme uno se mueve hacia la derecha a lo largo de la barra en el inciso B).

EJEMPLO 9.12 Centro de masa de un triángulo rectángulo

Se le pide colgar una señal metálica de un alambre vertical. La señal tiene la forma triangular que se muestra en la figura 9.20a. La parte baja de la señal es paralela al suelo. ¿A qué distancia del extremo izquierdo de la señal se debe unir el alambre de soporte?



a)

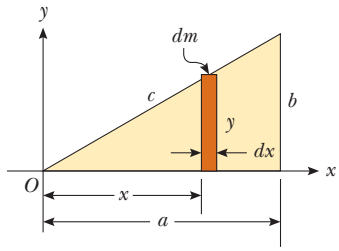
SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.20a muestra la señal que cuelga del alambre. El alambre se debe unir a un punto directamente sobre el centro de gravedad de la señal, que es el mismo que su centro de masa, porque está en un campo gravitacional uniforme.

Categorizar Como en el caso del ejemplo 9.11, este ejemplo se clasifica como un problema de análisis porque es necesario identificar elementos infinitesimales de la señal para realizar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar Se supone que la señal triangular tiene una densidad uniforme y masa total M. Ya que la señal es una distribución de masa continua, se debe usar la expresión integral de la ecuación 9.32 para hallar la coordenada x del centro de masa.

El triángulo se divide en flejes estrechos de ancho dx y altura y, como se muestra en la figura 9.20b, donde y es la altura de la hipotenusa del triángulo arriba del eje x para un valor conocido del fleje de x. La masa de cada fleje es el producto del volumen del fleje y la densidad ρ del material del que está hecho la señal: $dm = \rho y t\,dx$, donde t es el grosor de la señal metálica. La densidad del material es la masa total de la señal dividida entre su volumen total (área del triángulo por grosor).



b)

Figura 9.20 (Ejemplo 9.12) a) Una señal triangular que se colgará de un solo alambre. b) Construcción geométrica para ubicar el centro de masa.

Evalúe dm:

$$dm = \rho y t\,dx = \left(\frac{M}{\frac{1}{2}abt}\right) y t\,dx = \frac{2My}{ab}\,dx$$

Aplique la ecuación 9.32 para encontrar la coordenada x del centro de masa:

$$1)\quad x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^a x\frac{2My}{ab}\,dx = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\,dx$$

Para proceder aún más y evaluar la integral, debe expresar y en términos de x. La línea que representa la hipotenusa del triángulo en la figura 9.20b tiene una pendiente de b/a y pasa a través del origen, de modo que la ecuación de esta línea es $y = (b/a)x$.

Sustituya para y en la ecuación 1):

$$x_{CM} = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$
$$= \tfrac{2}{3}a$$

Por lo tanto, el alambre se debe unir a la señal a una distancia dos tercios la longitud del borde inferior desde el extremo izquierdo.

Finalizar Esta respuesta es idéntica a la del inciso B) del ejemplo 9.11. Para la señal triangular, el aumento lineal en altura y con la posición x significa que los elementos en la señal aumentan en masa linealmente, lo que refleja el aumento lineal en densidad de masa en el ejemplo 9.11. También se podría encontrar la coordenada y del centro de masa de la señal, pero esto no es necesario para determinar dónde se debe unir el alambre. Puede intentar cortar un triángulo rectángulo de cartulina y colgarlo de una cuerda de modo que la base larga sea horizontal. ¿La cuerda necesita unirse a $\frac{2}{3}a$?

9.6 Movimiento de un sistema de partículas

Comenzará a entender el significado físico y la utilidad del concepto de centro de masa si toma la derivada con el tiempo del vector posición para el centro de masa conocido en la ecuación 9.31. De la sección 4.1 se sabe que la derivada con el tiempo de un vector de posición es por definición el vector velocidad. Si supone que M permanece constante para un sistema de partículas (esto es, ninguna partícula entra o sale del sistema) se obtiene la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema:

Velocidad del centro de masa ▶

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i \qquad (9.35)$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ es la velocidad de la i–ésima partícula. Al reordenar la ecuación 9.35 proporciona

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas ▶

$$M\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{tot} \qquad (9.36)$$

Debido a eso, la **cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.** En otras palabras, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{CM}$.

La derivación de la ecuación 9.35 respecto del tiempo, se obtiene la **aceleración del centro de masa** del sistema:

Aceleración del centro de masa ▶

$$\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i \qquad (9.37)$$

Al reordenar esta expresión y usar la segunda ley de Newton se obtiene

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \qquad (9.38)$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la partícula i.

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema pueden incluir tanto fuerzas externas (desde afuera del sistema) y fuerzas internas (desde dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1. En consecuencia, cuando en la ecuación 9.38 se suman todas las fuerzas internas, se cancelan en pares y se encuentra que la fuerza neta en el sistema la causan *solamente* las fuerzas externas. En tal caso se escribe la ecuación 9.38 en la forma

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas ▶

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{CM} \qquad (9.39)$$

Es decir, **la fuerza externa neta en un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa.** Al comparar la ecuación 9.39 con la segunda ley de Newton para una sola partícula, se ve que el modelo de partícula que se ha usado en muchos capítulos se describe en términos del centro de masa:

> El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Se integra la ecuación 9.39 en un intervalo de tiempo finito:

$$\int \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}\, dt = \int M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}\, dt = \int M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt}\, dt = M\int d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = M\,\Delta\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}$$

Note que esta ecuación se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \tag{9.40}$$

donde $\vec{\mathbf{I}}$ es el impulso que las fuerzas externas imparten al sistema y $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$ es la cantidad de movimiento del sistema. La ecuación 9.40 es la generalización del teorema impulso–cantidad de movimiento para una partícula (ecuación 9.10) a un sistema de partículas.

Por último, si la fuerza externa neta sobre un sistema es cero, se sigue de la ecuación 9.39 que

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

de modo que

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad (\text{cuando } \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0) \tag{9.41}$$

Es decir, la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas se conserva si no hay fuerza neta externa que actúe sobre el sistema. Se sigue que, para un sistema aislado de partículas, tanto la cantidad de movimiento total como la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo. Este enunciado es una generalización de la ley de conservación de la cantidad de movimiento para un sistema de muchas partículas.

Suponga que un sistema aislado que consta de dos o más integrantes en reposo. El centro de masa de tal sistema permanece en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa. Por ejemplo, considere un sistema de un nadador que está de pie sobre una balsa, con el sistema inicialmente en reposo. Cuando el nadador se clava horizontalmente desde la balsa, ésta se mueve en la dirección opuesta a la del nadador y el centro de masa del sistema permanece en reposo (si se desprecia la fricción entre la balsa y el agua). Además, la cantidad de movimiento lineal del nadador es igual en magnitud a la de la balsa, pero opuesta en dirección.

Pregunta rápida 9.8 Un crucero se mueve con rapidez constante a través del agua. Los vacacionistas en el barco están ansiosos por llegar a su siguiente destino. Deciden acelerar el crucero reuniéndose en la proa (el frente) y correr hacia la popa (la parte trasera) de la nave. **i)** Mientras corren hacia la popa, ¿la rapidez de la nave es a) mayor que antes, b) invariable, c) menor que antes, o d) imposible de determinar? **ii)** Los vacacionistas dejan de correr cuando llegan a la popa del barco. Después de que todos dejan de correr, ¿la rapidez del barco es a) mayor de la que era antes de que comenzaran a correr, b) invariable de la que era antes de que comenzaran a correr, c) menor de la que era antes de que comenzaran a correr, o d) imposible de determinar?

EJEMPLO CONCEPTUAL 9.13 Explosión de un proyectil

Un proyectil disparado al aire súbitamente explota en muchos fragmentos (figura 9.21).

A) ¿Qué se puede decir acerca del movimiento del centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos después de la explosión?

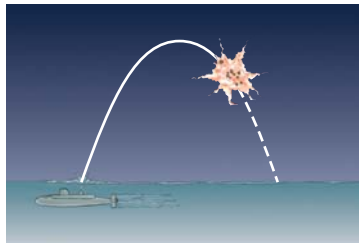


Figura 9.21 (Ejemplo conceptual 9.13) Cuando un proyectil explota en muchos fragmentos, el centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría tomado si no hubiese explotado.

SOLUCIÓN

Si desprecia la resistencia del aire, la única fuerza externa en el proyectil es la fuerza gravitacional. Por lo tanto, si el proyectil no explota, continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica indicada por la línea discontinua en la figura 9.21. Ya que las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el movimiento del centro de masa del sistema (los fragmentos). En consecuencia, después de la explosión, el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría seguido si no hubiese ocurrido la explosión.

B) Si el proyectil no explota, aterrizará a una distancia R desde su punto de lanzamiento. Suponga que el proyectil explota y se separa en dos piezas de igual masa. Una pieza aterriza a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento. ¿Dónde aterriza la otra pieza?

SOLUCIÓN

Como se discutió en el inciso A), el centro de masa del sistema de dos piezas aterriza a una distancia R desde el punto de lanzamiento. Una de las piezas aterriza a una distancia más allá de R desde el punto de aterrizaje (o a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento), a la derecha en la figura 9.21. Ya que las dos piezas tienen la misma masa, la otra pieza debe aterrizar a una distancia R a la izquierda del punto de aterrizaje en la figura 9.21, ¡lo que coloca a esta pieza justo de regreso en el punto de lanzamiento!

EJEMPLO 9.14 El cohete que explota

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de 300 m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de 450 m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de 240 m/s y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dibuje la explosión en su mente, con una pieza yendo hacia arriba y una segunda pieza moviéndose horizontalmente hacia el este. ¿Tiene usted algún sentimiento intuitivo acerca de la dirección en la que se mueve la tercera pieza?

Categorizar Este ejemplo es un problema en dos dimensiones porque tiene dos fragmentos móviles en direcciones perpendiculares después de la explosión, así como un tercer fragmento que se mueve en una dirección desconocida en el plano definido por los vectores velocidad de los otros dos fragmentos. Se supone que el intervalo de tiempo de la explosión es muy breve, así que se usa la aproximación de impulso en la que se ignora la fuerza gravitacional y la resistencia del aire. Ya que las fuerzas de la explosión son internas al sistema (el cohete), el sistema se modela como aislado y la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_i$ del cohete inmediatamente antes de la explosión debe ser igual a la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_f$ de los fragmentos inmediatamente después de la explosión.

Analizar Ya que los tres fragmentos tienen igual masa, la masa de cada fragmento es $M/3$, donde M es la masa total del cohete. Sea $\vec{\mathbf{v}}_f$ que representa la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema antes de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = M\vec{\mathbf{v}}_i = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s})$$

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento del sistema después de la explosión:

$$\vec{\mathbf{p}}_f = \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}) + \frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f$$

Iguale estas dos expresiones:

$$\frac{M}{3}\vec{\mathbf{v}}_f + \frac{M}{3}(240\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{m/s}) + \frac{M}{3}(450\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s}) = M(300\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{m/s})$$

Resuelva para $\vec{\mathbf{v}}_f$:

$$\vec{\mathbf{v}}_f = (-240\,\hat{\mathbf{i}} + 450\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}$$

Finalizar Note que este evento es el inverso de una colisión perfectamente inelástica. Hay un objeto antes de la colisión y tres objetos después. Imagine correr hacia atrás una película del evento: los tres objetos se juntarían y se convertirían en un solo objeto. En una colisión perfectamente inelástica, la energía cinética del sistema disminuye. Si calcula la energía cinética antes y después del evento en este ejemplo, encontrará que la energía cinética del sistema aumenta. (¡Inténtelo!) Este aumento en energía cinética viene de la energía potencial almacenada en cualquier combustible que explote para causar el rompimiento del cohete.

9.7 Sistemas deformables

Hasta el momento, en esta exposición de mecánica, se analizó el movimiento de partículas o sistemas no deformables que se modelan como partículas. La discusión en la sección 9.6 se puede aplicar a un análisis del movimiento de los sistemas deformables. Por ejemplo, suponga que está de pie sobre una patineta y se empuja de una pared, con lo que se pone en movimiento alejándose de la pared. ¿Cómo describiría este evento?

La fuerza a causa de la pared en sus manos se mueve hasta el final sin desplazamiento; la fuerza siempre se localiza en la interfaz entre la pared y sus manos. Por lo tanto, la fuerza no trabaja en el sistema, que son usted y su patineta. Sin embargo, empujarse de la pared en efecto da por resultado un cambio en la energía cinética del sistema. Si intenta usar el teorema trabajo–energía cinética, $W = \Delta K$, para describir este evento, note que el lado izquierdo de la ecuación es cero, pero el lado derecho es distinto de cero. El teorema trabajo–energía cinética no es válido para este evento y con frecuencia no es válido para sistemas que son deformables. Su cuerpo se deformó durante este evento: sus brazos se doblaron antes del evento y se estiraron mientras se empujaba de la pared.

Para analizar el movimiento de los sistemas deformables, se recurre a la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, y a la ecuación 9.40, el teorema impulso–cantidad de movimiento para un sistema. Para el ejemplo de usted empujándose de la pared sobre su patineta, la ecuación 8.2 produce

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T$$
$$\Delta K + \Delta U = 0$$

donde ΔK es el cambio en energía cinética debida al aumento de rapidez del sistema y ΔU es la disminución en energía potencial almacenada en el cuerpo resultante de las comidas previas. Esta ecuación dice que el sistema transformó energía potencial en energía cinética mediante el empleo de fuerza muscular necesaria para empujarse de la pared.

Al aplicar la ecuación 9.40 a esta situación se obtiene

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$$

$$\int \vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}\, dt = m\,\Delta\vec{\mathbf{v}}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{\text{pared}}$ es la fuerza que ejerce la pared sobre sus manos, m es la masa de usted y la patineta, y $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ es el cambio en la velocidad del sistema durante el evento. Para evaluar el lado izquierdo de esta ecuación, se necesitaría conocer cómo varía en el tiempo la fuerza a causa de la pared. En general, este proceso puede ser complicado. Sin embargo, en el caso de fuerzas constantes, o fuerzas bien comportadas, se puede evaluar la integral del lado izquierdo de la ecuación.

EJEMPLO 9.15 Empujar sobre un resorte[4]

Como se muestra en la figura 9.22a, dos bloques están en reposo sobre una mesa a nivel sin fricción. Ambos bloques tienen la misma masa m y están conectados mediante un resorte de masa despreciable. La distancia de separación de los bloques cuando el resorte está relajado es L. Durante un intervalo de tiempo Δt, se aplica horizontalmente una fuerza constante F al bloque izquierdo y lo mueve una distancia x_1, como se muestra en la figura 9.22b. Durante este intervalo de tiempo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2. Al final de este intervalo de tiempo, se retira la fuerza F.

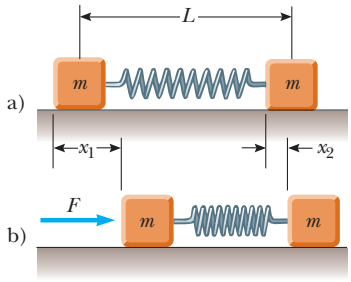


Figura 9.22 (Ejemplo 9.15) a) Dos bloques de igual masa se conectan mediante un resorte. b) El bloque izquierdo se empuja con una fuerza constante de magnitud F y se mueve una distancia x_1 durante cierto intervalo de tiempo. Durante este mismo intervalo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2.

A) Encuentre la rapidez resultante $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}$ del centro de masa del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede mientras empuja sobre el bloque izquierdo. Empieza a moverse hacia la derecha en la figura 9.22 y el resorte empieza a comprimirse. Como resultado, el resorte empuja hacia la derecha el bloque derecho, que comienza a moverse hacia la derecha. En cualquier momento dado, por lo general los bloques se mueven con diferentes velocidades. A medida que el centro de masa del sistema se mueve hacia la derecha, los dos bloques oscilan de ida y vuelta respecto del centro de masa.

Categorizar El sistema de dos bloques y un resorte no es un sistema aislado, porque se está invirtiendo trabajo en él por la fuerza aplicada. Es un sistema deformable. Durante el intervalo de tiempo Δt, el centro de masa del sistema se mueve una distancia $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Ya que la fuerza aplicada en el sistema es constante, la aceleración de su centro de masa es constante y el centro de masa se modela como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Se aplica el teorema impulso–cantidad de movimiento al sistema de dos bloques, y se reconoce que la fuerza F es constante durante el intervalo Δt mientras se aplica la fuerza.

Escriba la ecuación 9.40 para el sistema:

$$1) \quad F\,\Delta t = (2m)(v_{\mathrm{CM}} - 0) = 2mv_{\mathrm{CM}}$$

Ya que el centro de masa se modela como una partícula bajo aceleración constante, la velocidad promedio del centro de masa es el promedio de la velocidad inicial, que es cero, y la velocidad final v_{CM}.

Exprese el intervalo de tiempo en términos de v_{CM}:

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{v_{\mathrm{CM,\,prom}}} = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{1}{2}(0 + v_{\mathrm{CM}})} = \frac{(x_1 + x_2)}{v_{\mathrm{CM}}}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 1):

$$F\frac{(x_1 + x_2)}{v_{\mathrm{CM}}} = 2mv_{\mathrm{CM}}$$

Resuelva para v_{CM}:

$$v_{\mathrm{CM}} = \sqrt{F\frac{(x_1 + x_2)}{2m}}$$

B) Encuentre la energía total del sistema asociada con la vibración relativa a su centro de masa después de que se retira la fuerza F.

SOLUCIÓN

Analizar La energía de vibración es toda la energía del sistema, distinta de la energía cinética asociada con el movimiento traslacional del centro de masa. Para encontrar la energía vibratoria, se aplica la ecuación de conservación de la energía. La energía cinética del sistema se puede expresar como $K = K_{\mathrm{CM}} + K_{\mathrm{vib}}$, donde K_{vib} es la energía cinética de los bloques en relación con el centro de masa debida a su vibración. La energía potencial del sistema es U_{vib}, que es la energía potencial almacenada en el resorte cuando la separación de los bloques es algún valor distinto de L.

Exprese la ecuación 8.2 para este sistema:

$$2) \quad \Delta K_{\mathrm{CM}} + \Delta K_{\mathrm{vib}} + \Delta U_{\mathrm{vib}} = W$$

[4] El ejemplo 9.15 fue inspirado en parte por C. E. Mungan, "A primer on work–energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher*, 43 p. 10, 2005.

Exprese la ecuación 2) en una forma alternativa y note que $K_{vib} + U_{vib} = E_{vib}$:

$$\Delta K_{CM} + \Delta E_{vib} = W$$

Los valores iniciales de la energía cinética del centro de masa y la energía vibratoria del sistema son cero:

$$K_{CM} + E_{vib} = W = Fx_1$$

Resuelva para la energía vibratoria y use el resultado en el inciso A):

$$E_{vib} = Fx_1 - K_{CM} = Fx_1 - \tfrac{1}{2}(2m)v_{CM}^2 = F\frac{(x_1 - x_2)}{2}$$

Finalizar Ninguna de las dos respuestas en este ejemplo depende de la longitud del resorte, la constante del resorte o el intervalo de tiempo. Note también que la magnitud x_1 del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada es diferente de la magnitud $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ del desplazamiento del centro de masa del sistema. Esta diferencia recuerda que el desplazamiento en la definición del trabajo es la del punto de aplicación de la fuerza.

9.8 Propulsión de cohetes

Cuando los vehículos ordinarios como los automóviles se impulsan, la fuerza impulsora para el movimiento es la fricción. En el caso del automóvil, la fuerza impulsora es la fuerza que ejerce el camino sobre el auto. Sin embargo, un cohete que se mueve en el espacio no tiene camino contra el cual empujar. Por lo tanto, la fuente de la propulsión de un cohete debe ser algo distinto de la fricción. **La operación de un cohete depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un sistema de partículas, donde el sistema es el cohete más su combustible expulsado.**

La propulsión de cohetes es comprensible al considerar primero al arquero que está de pie sobre hielo sin fricción, en el ejemplo 9.1. Imagine que el arquero dispara varias flechas horizontalmente. Por cada flecha disparada, el arquero recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta. Mientras más flechas dispare, el arquero se mueve cada más rápido a través del hielo.

En forma similar, conforme un cohete se mueve en el espacio libre, su cantidad de movimiento lineal cambia cuando una parte de su masa se expulsa en la forma de gases de escape. **Ya que a los gases se les da cantidad de movimiento cuando se expulsan del motor, el cohete recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta.** Por lo tanto, el cohete se acelera como resultado del "empujón", o empuje, de los gases de escape. En el espacio libre, el centro de masa del sistema (cohete más gases expulsados) se mueve uniformemente, independiente del proceso de propulsión.[5]

Suponga que en algún tiempo t la magnitud de la cantidad de movimiento de un cohete más su combustible es $(M + \Delta m)v$, donde v es la rapidez del cohete en relación con la Tierra (figura 9.23a). En un intervalo de tiempo breve Δt, el cohete expulsa combustible de masa Δm. Al final de este intervalo, la masa del cohete es M y su rapidez es $v + \Delta v$, donde Δv es el cambio en rapidez del cohete (figura 9.23b). Si el combustible se expulsa con una rapidez v_e en relación con el cohete (el subíndice e representa *escape* y v_e usualmente se llama *rapidez de escape*), la velocidad del combustible relativa a la Tierra es $v - v_e$. Si la cantidad de movimiento inicial total del sistema se iguala a la cantidad de movimiento final total, se obtiene

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

Al simplificar esta expresión se obtiene

$$M\Delta v = v_e \Delta m$$

Si ahora se toma el límite conforme Δt tiende a cero, se tiene $\Delta v \to dv$ y $\Delta m \to dm$. Además, el aumento en la masa de escape dm corresponde a una igual disminución en la masa

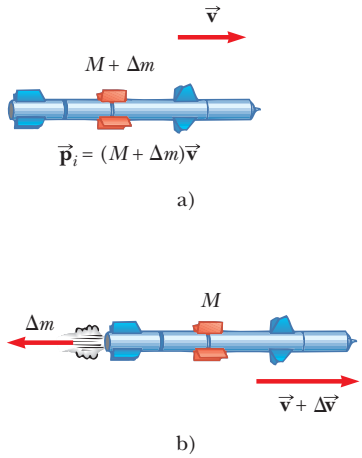


Figura 9.23 Propulsión de cohete. a) La masa inicial del cohete más todo su combustible es $M + \Delta m$ en un tiempo t, y su rapidez es v. b) En un tiempo $t + \Delta t$, la masa del cohete se redujo a M y se expulsó una cantidad de combustible Δm. La rapidez del cohete aumenta por una cantidad Δv.

Cortesía de NASA

La fuerza del dispositivo manual impulsado por nitrógeno permite a un astronauta moverse libremente en el espacio sin correas restrictivas, con el uso de la fuerza de empuje proveniente del nitrógeno expulsado.

[5] El cohete y el arquero representan casos del inverso de una colisión perfectamente inelástica: la cantidad de movimiento se conserva, pero la energía cinética del sistema cohete–gas expulsado aumenta (a costa de energía potencial química en el combustible), como lo hace la energía cinética del sistema arquero–flecha (a costa de energía potencial de las comidas previas del arquero).

del cohete, así que $dm = -dM$. Note que dM es negativo porque representa una disminución en masa, de modo que $-dM$ es un número positivo. Al usar este hecho se obtiene

$$M\,dv = v_e\,dm = -v_e\,dM \tag{9.42}$$

Ahora divida la ecuación entre M e integre, tomando la masa inicial del cohete más combustible como M_i y la masa final del cohete más su combustible restante como M_f. El resultado es

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Expresión para propulsión de cohete ▶

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \tag{9.43}$$

que es la expresión básica para la propulsión de cohetes. Primero, la ecuación 9.43 señala que el aumento en la rapidez del cohete es proporcional a la rapidez de escape v_e de los gases expulsados. Por lo tanto, la rapidez de escape debe ser muy alta. Segundo, el aumento en la rapidez del cohete es proporcional al logaritmo natural de la proporción M_i/M_f. En consecuencia, esta proporción debe ser tan grande como sea posible, es decir, la masa del cohete sin combustible debe ser tan pequeña como sea posible y el cohete debe llevar tanto combustible como sea posible.

El **empuje** en el cohete es la fuerza que ejercen sobre él los gases de escape expulsados. A partir de la segunda ley de Newton y de la ecuación 9.42 se obtiene la siguiente expresión para el empuje:

$$\text{Empuje} = M\frac{dv}{dt} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right| \tag{9.44}$$

Esta expresión muestra que el empuje aumenta conforme la rapidez de escape aumenta y conforme aumenta la relación de cambio de masa (llamada *rapidez de consumo*).

EJEMPLO 9.16 Combate de incendios

Dos bomberos deben aplicar una fuerza total de 600 N para estabilizar una manguera que descarga agua a una proporción de 3 600 L/min. Estime la rapidez del agua conforme sale de la boquilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conforme el agua sale de la boquilla, actúa en una forma similar a los gases que se expulsan del motor de un cohete. Como resultado, una fuerza (empuje) actúa sobre los bomberos en una dirección opuesta a la dirección de movimiento del agua. En este caso se quiere que el extremo de la manguera sea una partícula en equilibrio, en lugar de que acelere como en el caso del cohete. En consecuencia, los bomberos deben aplicar una fuerza de magnitud igual al empuje en la dirección opuesta para mantener fijo el extremo de la manguera.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en el que se usan valores conocidos en una ecuación deducida en esta sección. El agua sale a 3 600 L/min, que es 60 L/s. Al saber que 1 L de agua tiene una masa de 1 kg, se estima que aproximadamente 60 kg de agua salen de la boquilla cada segundo.

Use la ecuación 9.44 para el empuje:

$$\text{Empuje} = \left|v_e \frac{dM}{dt}\right|$$

Sustituya los valores conocidos:

$$600\ \text{N} = |v_e(60\ \text{kg/s})|$$

Resuelva para la rapidez de escape:

$$v_e = 10\ \text{m/s}$$

EJEMPLO 9.17 Un cohete en el espacio

Un cohete que se mueve en el espacio, lejos de todos los otros objetos, tiene una rapidez de 3.0×10^3 m/s en relación con la Tierra. Sus motores se encienden y el combustible se expulsa en una dirección opuesta al movimiento del cohete con una rapidez de 5.0×10^3 m/s en relación con el cohete.

A) ¿Cuál es la rapidez del cohete en relación con la Tierra una vez que la masa del cohete se reduce a la mitad de su masa antes de la ignición?

SOLUCIÓN

Conceptualizar A partir de la discusión en esta sección y las escenas de las películas de ciencia ficción, uno puede imaginar fácilmente el cohete acelerando a una mayor rapidez conforme el motor funciona.

Categorizar Este es un problema de sustitución en el que se usan los valores conocidos en la ecuación deducida en esta sección.

Resuelva la ecuación 9.43 para la velocidad final y sustituya los valores conocidos:

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \\ &= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.5M_i}\right) \\ &= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

B) ¿Cuál es el empuje sobre el cohete si quema combustible en una proporción de 50 kg/s?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 9.44 y el resultado del inciso A), y note que $dM/dt = 50$ kg/s:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) = 2.5 \times 10^5 \text{ N}$$

Resumen

DEFINICIONES

La **cantidad de movimiento lineal** $\vec{\mathbf{p}}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ es

$$\vec{\mathbf{p}} \equiv m\vec{\mathbf{v}} \tag{9.2}$$

El **impulso** que se imparte a una partícula mediante una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es igual a la integral en el tiempo de la fuerza:

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt \tag{9.9}$$

En una **colisión inelástica** no se conserva la energía cinética total del sistema de partículas en colisión. En una **colisión perfectamente inelástica** las partículas en colisión quedan unidas después de la colisión. En una **colisión elástica** se conserva la energía cinética del sistema.

El vector de posición del **centro de masa** de un sistema de partículas se define como

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i \tag{9.31}$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema y $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El vector de posición del centro de masa de un objeto extendido se obtiene a partir de la expresión integral

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm \tag{9.34}$$

La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas es

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{M} \tag{9.35}$$

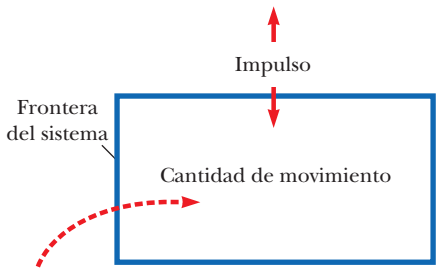
La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas es

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} \tag{9.39}$$

donde $\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}}$ es la aceleración del centro de masa y la suma es sobre todas las fuerzas externas. El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante en el sistema.

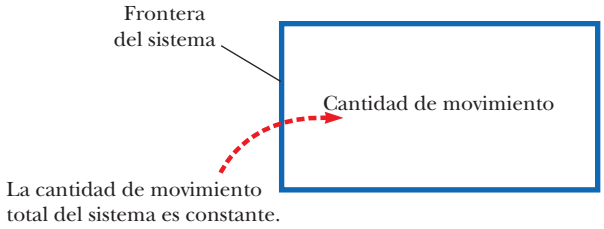
MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



El cambio en la cantidad de movimiento total del sistema es igual al impulso total sobre el sistema.

Sistema no aislado (cantidad de movimiento). Si un sistema interactúa con su entorno en el sentido de que hay una fuerza externa sobre el sistema, el comportamiento del sistema se describe mediante el **teorema impulso–cantidad de movimiento**:

$$\vec{\mathbf{I}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} \tag{9.40}$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento). El principio de **conservación de cantidad de movimiento lineal** indica que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado (sin fuerzas externas) se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas entre los integrantes del sistema:

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \text{constante}\left(\text{cuando } \sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = 0\right) \tag{9.41}$$

En el caso de un sistema de dos partículas, este principio se expresa como

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f} \tag{9.5}$$

El sistema puede ser aislado en términos de cantidad de movimiento pero no aislado en términos de energía, como en el caso de colisiones inelásticas.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. a) ¿Una fuerza neta mayor ejercida sobre un objeto, siempre produce un cambio mayor en la cantidad de movimiento del objeto, en comparación con una fuerza neta más pequeña? Explique. b) ¿Una fuerza neta mayor siempre produce un cambio mayor en energía cinética que una fuerza neta más pequeña? Explique.
2. **O i)** La cantidad de movimiento de cierto objeto se hace cuatro veces más grande en magnitud. ¿En qué factor cambió su energía cinética? a) 16, b) 8, c) 4, d) 2, e) 1. **ii)** La energía cinética de un objeto se hace cuatro veces mayor. ¿En qué factor cambió la magnitud de su cantidad de movimiento? a) 16, b) 8, c) 4, d) 2, e) 1.
3. **O i)** Si dos partículas tienen cantidades de movimiento iguales, ¿sus energías cinéticas son iguales? a) sí, b) no, c) si y sólo si sus masas son iguales. **ii)** Si dos partículas tienen energías cinéticas iguales, ¿sus cantidades de movimiento son iguales? a) sí, b) no, c) si y sólo si sus masas son iguales, d) si y sólo si sus masas y direcciones de movimiento son iguales.
4. **O** Dos partículas de diferentes masas parten del reposo. La misma fuerza neta actúa en ambas mientras se mueven sobre distancias iguales. **i)** ¿Cómo se comparan sus energías cinéticas finales? a) La partícula de mayor masa tiene más energía cinética. b) La partícula de menor masa tiene más energía cinética. c) Las partículas tienen iguales energías cinéticas. d) Cualquier partícula puede tener más energía cinética. **ii)** ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? a) La partícula de mayor masa tiene más cantidad de movimiento. b) La partícula de menor masa tiene más cantidad de movimiento. c) Las partículas tienen iguales cantidades de movimiento. d) Cualquier partícula puede tener más cantidad de movimiento.
5. Mientras está en movimiento, una pelota de beisbol lanzada porta energía cinética y cantidad de movimiento. a) ¿Porta una fuerza que puede ejercer sobre cualquier objeto que golpee? b) ¿La pelota de beisbol entrega más energía cinética al objeto que golpea que la que portaba la bola inicialmente? c) ¿La pelota de beisbol entrega al objeto que golpea más cantidad de movimiento que la que porta la bola inicialmente? Explique sus respuestas.
6. **O** Un balón de basquetbol se lanza hacia el aire, cae libremente y rebota en el suelo de madera. Desde el momento después de que el jugador lo libera, hasta que la bola llega a la parte superior de su rebote, ¿cuál es el sistema más pequeño para el que se conserva la cantidad de movimiento? a) el balón, b) el balón más el jugador, c) el balón más el suelo, d) el balón más la Tierra, e) la cantidad de movimiento no se conserva.
7. Una bomba, inicialmente en reposo, explota en muchos pedazos. a) ¿Se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema? b) ¿Se conserva la energía cinética del sistema? Explique.
8. Usted está de pie perfectamente quieto y enseguida da un paso hacia adelante. Antes del paso su cantidad de movimiento era cero, pero después tiene cierta cantidad de movimiento. ¿En este caso se viola el principio de conservación de cantidad de movimiento?
9. **O** Un gran camión distribuidor de estiércol rueda por un camino vecinal. En una colisión perfectamente inelástica, un pequeño auto deportivo choca el camión por detrás. **i)** ¿Cuál vehículo experimenta un cambio en cantidad de movimiento de mayor magnitud? a) El automóvil. b) El camión de estiércol. c) Los cambios de cantidad de movimiento son del mismo tamaño. d) Podría ser cualquiera. **ii)** ¿Cuál vehículo experimenta un mayor cambio en energía cinética? a) El automóvil. b) El camión de estiércol. c) Los cambios de energía cinética son del mismo tamaño. d) Podría ser cualquier vehículo.
10. Un tirador experimentado, con la culata del arma contra su hombro, dispara un rifle mientras está de pie. Si la cantidad de movimiento hacia adelante de una bala es la misma que la cantidad de movimiento hacia atrás del arma, ¿por qué no es tan peligroso ser golpeado por el arma que por la bala?
11. **O** Una bola está suspendida mediante una cuerda que se une a un punto fijo sobre un bloque de madera que está vertical. La bola se jala hacia atrás, como se muestra en la figura P9.11, y se libera. En el ensayo a), la bola rebota elásticamente a causa del bloque. En el ensayo b), cinta de dos lados hace que la bola se pegue al bloque. **i)** ¿En cuál caso, a) o b), la bola tiene más probabilidad de derribar el bloque? O c) ¿no hay diferencia? O d) ¿podría ser cualquier caso, dependiendo de otros factores? **ii)** ¿En cuál caso, a) o b), hay un mayor aumento temporal de temperatura en la bola y el trozo de madera adyacente? O c) ¿es la misma para ambos? O d) ¿no hay aumento de temperatura?

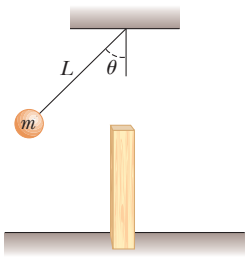


Figura P9.11

12. Un saltador de garrocha cae desde una altura de 6.0 m sobre un colchón de espuma de caucho. ¿Puede calcular su rapidez inmediatamente antes de llegar al colchón? ¿Puede calcular la fuerza que ejerce el colchón sobre él? Explique.
13. Dos estudiantes sostienen verticalmente una gran sábana. Un tercer estudiante, que resulta ser el lanzador estrella del equipo de beisbol de la escuela, lanza un huevo a la sábana. Explique por qué el huevo no se rompe cuando golpea la sábana, sin importar su rapidez inicial. (Si intenta esta demostración, asegúrese de que el lanzador golpee la sábana cerca de su centro, y no permita que el huevo caiga al suelo después de atraparlo.)
14. **O** Usted está de pie sobre un trineo con forma de platillo, en reposo, en medio de una pista de patinaje de hielo sin fricción. Su compañero de laboratorio le lanza un pesado *frisbee*. Usted realiza diferentes acciones en ensayos experimentales sucesivos. Clasifique las siguientes situaciones en orden de acuerdo con su rapidez final, de mayor a menor. Si su rapidez final es la misma en dos casos, déles igual clasificación. a) Atrapa el *frisbee* y se queda con él. b) Atrapa el *frisbee* y lo lanza de regreso a su compañero. c) Atrapa el *frisbee* y lo lanza a una tercera persona al lado en un ángulo recto. d) Falla la atrapada y apenas toca al *frisbee*, de modo que continúa en su dirección original más lentamente. e) Atrapa el *frisbee* y lo lanza de modo que se mueve verticalmente hacia arriba sobre su cabeza. f) Atrapa

el *frisbee* mientras viene del sur, da la vuelta y lo lanza al norte varias veces más rápido. g) Atrapa el *frisbee* y lo pone en reposo sobre el hielo.

15. Una persona equilibra una regleta en una posición horizontal sobre los dedos índice extendidos. Lentamente junta los dos dedos. La regleta permanece equilibrada y los dos dedos siempre unidos en la marca de 50 cm sin importar sus posiciones originales. (¡Inténtelo!) Explique.

16. **O** Mientras se ensambla un tren, una máquina de piso libera un vagón de mercancías en movimiento en lo alto de un montecillo. El vagón rueda suavemente y sin fricción. Los conmutadores están configurados para cambiarlo de vía a una pista recta a nivel, donde se acopla con un vagón de plataforma de menor masa, originalmente en reposo, de modo que los dos vagones ruedan juntos sin fricción. Considere los dos vagones como un sistema desde el momento de liberación del vagón de mercancías hasta que ambos ruedan juntos. a) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? b) ¿Se conserva la cantidad de movimiento? A continuación, considere el proceso del vagón de mercancías que gana rapidez conforme rueda por el montecillo. Para el vagón de mercancías y la Tierra como sistema, c) ¿se conserva la energía mecánica? d) ¿Se conserva la cantidad de movimiento? Por último, considere los dos vagones como un sistema a medida que el vagón de mercancías frena en el proceso de acoplamiento. e) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? f) ¿Se conserva la cantidad de movimiento?

17. Un malabarista lanza tres bolas en un ciclo continuo. Cualquier bola está en contacto con sus manos durante un quinto del tiempo. Describa el movimiento del centro de masa de las tres bolas. ¿Qué fuerza promedio ejerce el malabarista sobre una bola mientras él la toca?

18. ¿El centro de masa de un cohete en espacio libre acelera? Explique. ¿La rapidez de un cohete puede superar la rapidez de escape del combustible? Explique.

19. Sobre el tema de las siguientes posiciones, establezca su propia visión y argumente para apoyarla. a) La mejor teoría de movimiento es que la fuerza causa aceleración. b) La verdadera medida de la efectividad de una fuerza es el trabajo que realiza, y la mejor teoría de movimiento es que el trabajo invertido sobre un objeto cambia su energía. c) La verdadera medida del efecto de una fuerza es el impulso, y la mejor teoría del movimiento es que el impulso impartido a un objeto cambia su cantidad de movimiento.

Problemas

Sección 9.1 Cantidad de movimiento lineal y su conservación

1. Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de $(3.00\hat{\mathbf{i}} - 4.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) Encuentre las componentes x y y de su cantidad de movimiento. b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.

2. ● Un niño de 65.0 kg y su hermana de 40.0 kg, ambos con patines, están frente a frente en reposo. La niña empuja duro al niño y lo envía hacia atrás con velocidad de 2.90 m/s hacia el oeste. Ignore la fricción. a) Describa el movimiento consecutivo de la niña. b) ¿Cuánta energía química se convierte en energía mecánica en los músculos de la niña? c) ¿La cantidad de movimiento del sistema niño–niña se conserva en el proceso de empujar? ¿Cómo puede ser, con fuerzas grandes en acción? ¿Cómo puede ser, sin movimiento anticipado y con mucho movimiento posterior?

3. ¿Qué tan rápido puede poner en movimiento a la Tierra? En particular, cuando salta recto hacia arriba tan alto como puede, ¿cuál es el orden de magnitud de la máxima rapidez de retroceso que le da a la Tierra? Modele la Tierra como un objeto perfectamente sólido. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

4. ● Dos bloques de masas M y $3M$ se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero se ensambla a uno de ellos, y los bloques se empujan juntos con el resorte entre ellos (figura P9.4). Una cuerda que inicialmente mantiene a los bloques juntos se quema; después de esto, el bloque de masa $3M$ se mueve hacia la derecha con una rapidez de 2.00 m/s. a) ¿Cuál es la velocidad del bloque de masa M? b) Encuentre la energía potencial elástica original del sistema, considerando $M = 0.350$ kg. c) ¿La energía original está en el resorte o en la cuerda? Explique su respuesta. d) ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva en el proceso de rompimiento? ¿Cómo puede ser, con fuerzas grandes en acción? ¿Cómo puede ser, sin movimiento anticipado y mucho movimiento posterior?

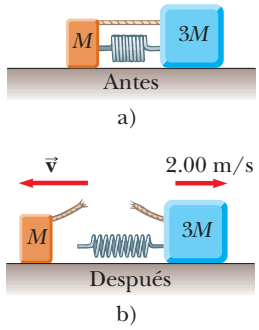


Figura P9.4

5. a) Una partícula de masa m se mueve con cantidad de movimiento de magnitud p. Demuestre que la energía cinética de la partícula está dada por $K = p^2/2m$. b) Exprese la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula en términos de su energía cinética y masa.

Sección 9.2 Impulso y cantidad de movimiento

6. ● Un amigo afirma que, en tanto tenga puesto su cinturón de seguridad, puede sostener a un niño de 12.0 kg en una

colisión frontal a 60 mi/h con una pared de ladrillos en la que el compartimiento de pasajeros del automóvil se detiene en 0.050 0 s. ¿Esta afirmación es cierta? Explique por qué experimentará una fuerza violenta durante la colisión, que arrancará al niño de sus brazos. Evalúe el tamaño de esta fuerza. (Un niño siempre debe estar en un asiento especial, protegido con un cinturón de seguridad en el asiento trasero de un automóvil.)

7. En la figura P9.7 se muestra una curva fuerza–tiempo estimada para una pelota de beisbol golpeada por un bat. A partir de esta curva, determine a) el impulso entregado a la pelota, b) la fuerza promedio ejercida sobre la pelota y c) la fuerza máxima que se ejerce sobre la pelota.

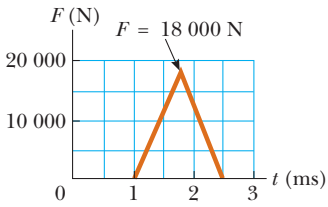


Figura P9.7

8. Una bola de 0.150 kg de masa se deja caer desde el reposo a una altura de 1.25 m. Rebota en el suelo para alcanzar una altura de 0.960 m. ¿Qué impulso le da el piso a la bola?
9. Una bola de acero de 3.00 kg golpea una pared con una rapidez de 10.0 m/s en un ángulo de 60.0° con la superficie. Rebota con la misma rapidez y ángulo (figura P9.9). Si la bola está en contacto con la pared durante 0.200 s, ¿cuál es la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la bola?

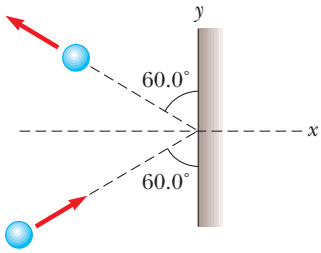


Figura P9.9

10. Un jugador de tenis recibe un tiro con la bola (0.060 0 kg) que viaja horizontalmente a 50.0 m/s y regresa el tiro con la bola viajando horizontalmente a 40.0 m/s en la dirección opuesta. a) ¿Cuál es el impulso que la raqueta de tenis entrega a la bola? b) ¿Qué trabajo realiza la raqueta sobre la bola?
11. La magnitud de la fuerza neta que se ejerce en la dirección x sobre una partícula de 2.50 kg varía en el tiempo como se muestra en la figura P9.11. Encuentre: a) el impulso de la fuerza, b) la velocidad final que logra la partícula si originalmente está en reposo, c) su velocidad final si su velocidad original es −2.00 m/s y d) la fuerza promedio ejercida sobre la partícula durante el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s.

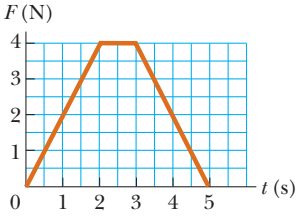


Figura P9.11

12. Una *plataforma de fuerza* es una herramienta que se usa para analizar el rendimiento de los atletas al medir la fuerza vertical que el atleta ejerce sobre el suelo como función del tiempo. Desde el reposo, una atleta de 65.0 kg salta hacia la plataforma desde una altura de 0.600 m. Mientras está en contacto con la plataforma durante el intervalo de tiempo $0 < t < 0.800$ s, la fuerza que ejerce sobre ella se describe mediante la función

$$F = (9\,200\ \text{N/s})\,t - (11\,500\ \text{N/s}^2)\,t^2$$

a) ¿Qué impulso recibió la atleta desde la plataforma? b) ¿Con qué rapidez llegó a la plataforma? c) ¿Con qué rapidez la dejó? d) ¿A qué altura saltó al dejar la plataforma?

13. ● Un deslizador de masa m es libre de deslizarse a lo largo de una pista de aire horizontal. Se empuja contra un lanzador en un extremo de la pista. Modele el lanzador como un resorte ligero con constante de fuerza k comprimido una distancia x. El deslizador se libera desde el reposo. a) Muestre que el deslizador logra una rapidez de $v = x(k/m)^{1/2}$. b) ¿Un deslizador de mayor o menor masa logra una mayor rapidez? c) Demuestre que el impulso impartido al deslizador está dado por la expresión $x(km)^{1/2}$. d) ¿Un impulso mayor se imparte a una masa grande o pequeña? e) ¿Se invierte más trabajo sobre una masa grande o pequeña?
14. Agua cae sin salpicar con una rapidez de 0.250 L/s desde una altura de 2.60 m en una cubeta de 0.750 kg sobre una báscula. Si la cubeta originalmente está vacía, ¿qué lee la báscula 3.00 s después de que el agua comienza a acumularse en ella?

Sección 9.3 Colisiones en una dimensión

15. Una bala de 10.0 g se dispara en un bloque de madera fijo ($m = 5.00$ kg). La bala se incrusta en el bloque. La rapidez de la combinación bala más madera inmediatamente después de la colisión es 0.600 m/s. ¿Cuál fue la rapidez original de la bala?
16. Un vagón de ferrocarril de 2.50×10^4 kg de masa se mueve con una rapidez de 4.00 m/s. Choca y se acopla con otros tres vagones acoplados, cada uno de la misma masa que el vagón solo y se mueven en la misma dirección con una rapidez inicial de 2.00 m/s. a) ¿Cuál es la rapidez de los cuatro vagones inmediatamente después de la colisión? b) ¿Cuánta energía se transforma en energía interna en la colisión?
17. ● Cuatro vagones, cada uno de 2.50×10^4 kg de masa, se acoplan y avanzan a lo largo de pistas horizontales con rapidez v_i hacia el sur. Un actor de cine muy fuerte, que viaja en el segundo vagón, desacopla el vagón frontal y le da un gran empujón, lo que aumenta su rapidez a 4.00 m/s hacia el sur. Los tres vagones restantes continúan moviéndose hacia el sur, ahora a 2.00 m/s. a) Encuentre la rapidez inicial de los vagones. b) ¿Cuánto trabajo hizo el actor? c) Establezca la correspondencia entre el proceso descrito aquí y el proceso del problema 16.
18. Como se muestra en la figura P9.18 (página 262), una bala de masa m y rapidez v atraviesa la esfera de un péndulo de masa M. La bala sale con una rapidez de $v/2$. La esfera del péndulo está suspendida mediante una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable. ¿Cuál es el valor mínimo de v tal que la esfera del péndulo apenas se balanceará para lograr un círculo vertical completo?

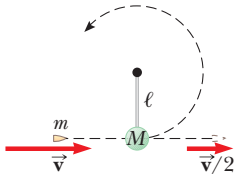


Figura P9.18

19. Dos bloques son libres de deslizarse a lo largo de la pista de madera sin fricción *ABC*, que se muestra en la figura P9.19. El bloque de masa $m_1 = 5.00$ kg se libera desde *A*. De su extremo frontal sobresale el polo norte de un poderoso imán, que repele el polo norte de un imán idéntico incrustado en el extremo posterior del bloque de masa $m_2 = 10.0$ kg, inicialmente en reposo. Los dos bloques nunca se tocan. Calcule la altura máxima a la que se eleva m_1 después de la colisión elástica.

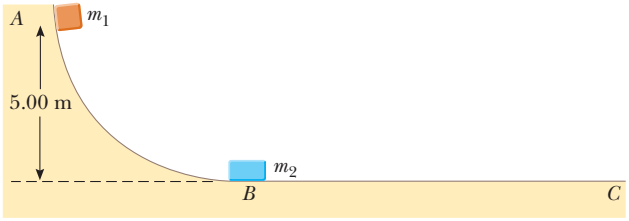


Figura P9.19

20. Una pelota de tenis de 57.0 g de masa se sostiene justo arriba de un balón de basquetbol de 590 g de masa. Con sus centros verticalmente alineados, ambos se liberan desde el reposo en el mismo momento, para caer una distancia de 1.20 m, como se muestra en la figura P9.20. a) Encuentre la magnitud de la velocidad hacia abajo con la que el balón llega al suelo. Suponga una colisión elástica con el suelo que instantáneamente invierte la velocidad del balón mientras la pelota de tenis aún se mueve hacia abajo. A continuación, las dos bolas se encuentran en una colisión elástica. b) ¿A qué altura rebota la pelota de tenis?

Figura P9.20

21. Una niña de 45.0 kg está de pie sobre una tabla que tiene una masa de 150 kg. La tabla, originalmente en reposo, es libre de deslizarse sobre un lago congelado que constituye una superficie de soporte plana y sin fricción. La niña comienza a caminar a lo largo de la tabla con una velocidad constante de $1.50\hat{\mathbf{i}}$ m/s en relación con la tabla. a) ¿Cuál es su velocidad en relación con la superficie de hielo? b) ¿Cuál es la velocidad de la tabla en relación con la superficie del hielo?

22. Una bala de 7.00 g, cuando se dispara desde un arma en un bloque de madera de 1.00 kg sostenido en un tornillo de banco, penetra el bloque a una profundidad de 8.00 cm. Este bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción, y una segunda bala de 7.00 g se dispara desde el arma en el bloque. En este caso, ¿a qué profundidad penetra la bala en el bloque?

23. Un neutrón en un reactor nuclear hace una colisión frontal elástica con el núcleo de un átomo de carbono inicialmente en reposo. a) ¿Qué fracción de la energía cinética del neutrón se transfiere al núcleo de carbono? b) La energía cinética inicial del neutrón es 1.60×10^{-13} J. Encuentre su energía cinética final y la energía cinética del núcleo de carbono después de la colisión. (La masa del núcleo de carbono es casi 12.0 veces la masa del neutrón.)

24. ● a) Tres carros de masas 4.00 kg, 10.0 kg y 3.00 kg, se mueven sobre una pista horizontal sin fricción con magnitudes de velocidad de 5.00 m/s, 3.00 m/s y 4.00 m/s, como se muestra en la figura P9.24. Acopladores de velcro hacen que los carros queden unidos después de chocar. Encuentre la velocidad final del tren de tres carros. b) **¿Qué pasaría si?** ¿Su respuesta requiere que todos los carros choquen y se unan en el mismo momento? ¿Qué sucedería si chocan en diferente orden?

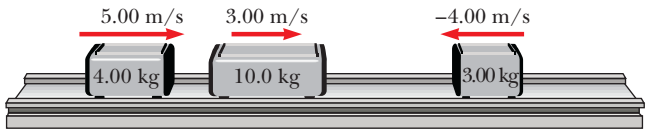


Figura P9.24

25. Una porción de arcilla pegajosa de 12.0 g es arrojada horizontalmente a un bloque de madera de 100 g al inicio en reposo sobre una superficie horizontal. La arcilla se pega al bloque. Después del impacto, el bloque se desliza 7.50 m antes de llegar al reposo. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0.650, ¿cuál fue la rapidez de la masilla inmediatamente antes del impacto?

Sección 9.4 Colisiones en dos dimensiones

26. ● En un juego de futbol americano, un corredor de 90.0 kg que corre al este con una rapidez de 5.00 m/s es detenido por un oponente de 95.0 kg que corre al norte con una rapidez de 3.00 m/s. a) Explique por qué la tacleada exitosa constituye una colisión perfectamente inelástica. b) Calcule la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la tacleada. c) Determine la energía mecánica que desaparece como resultado de la colisión. Explique la energía perdida.

27. Una bola de billar que se mueve a 5.00 m/s golpea una bola fija de la misma masa. Después de la colisión, la primera bola se mueve, a 4.33 m/s, en un ángulo de 30.0° respecto de la línea de movimiento original. Si supone una colisión elástica (e ignora la fricción y el movimiento rotacional), encuentre la velocidad de la bola golpeada después de la colisión.

28. ● Dos automóviles de igual masa se aproximan a una intersección. Un vehículo viaja con velocidad de 13.0 m/s hacia el este y el otro viaja al norte con rapidez v_{2i}. Ningún conductor ve al otro. Los vehículos chocan en la intersección y quedan unidos, dejando marcas de derrape paralelas a un ángulo de 55.0° al noreste. La rapidez límite para ambos caminos es de 35 mi/h y el conductor del vehículo que se movía al norte afirma que él estaba dentro del límite de rapidez cuando ocurrió la colisión. ¿Dice la verdad? Explique su razonamiento.

29. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con una rapidez de 5.00 m/s. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo

largo de una dirección que forma un ángulo de 37.0° con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.

30. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con rapidez v_i. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.

31. Un objeto de 3.00 kg de masa, que se mueve con una velocidad inicial de $5.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s, choca y se une a un objeto de 2.00 kg de masa con una velocidad inicial de $-3.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Encuentre la velocidad final del objeto compuesto.

32. Dos partículas con masas m y $3m$ se mueven una hacia la otra a lo largo del eje x con la misma rapidez inicial v_i. La partícula m viaja hacia la izquierda y la partícula $3m$ viaja hacia la derecha. Se someten a una colisión oblicua elástica tal que la partícula m se mueve hacia abajo después de la colisión en ángulo recto desde su dirección inicial. a) Encuentre las magnitudes de velocidad finales de las dos partículas. b) ¿Cuál es el ángulo θ al que se fuga la partícula $3m$?

33. Un núcleo atómico inestable de 17.0×10^{-27} kg de masa, inicialmente en reposo, se desintegra en tres partículas. Una de las partículas, de 5.00×10^{-27} kg de masa, se mueve en la dirección y con una rapidez de 6.00×10^{6} m/s. Otra partícula, de 8.40×10^{-27} kg de masa, se mueve en la dirección x con una rapidez de 4.00×10^{6} m/s. Encuentre a) la velocidad de la tercera partícula y b) el aumento de energía cinética en el proceso.

34. La masa del disco azul en la figura P9.34 es 20.0% mayor que la masa del disco verde. Antes de chocar, los discos se aproximan mutuamente con cantidades de movimiento de igual magnitud y direcciones opuestas, y el disco verde tiene una rapidez inicial de 10.0 m/s. Encuentre la rapidez que tiene cada disco después de la colisión, si la mitad de la energía cinética del sistema se convierte en energía interna durante la colisión.

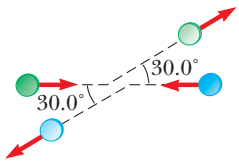


Figura P9.34

Sección 9.5 El centro de masa

35. Cuatro objetos se sitúan a lo largo del eje y del modo siguiente: un objeto de 2.00 kg se ubica a +3.00 m, un objeto de 3.00 kg está a +2.50 m, un objeto de 2.50 kg está en el origen y un objeto de 4.00 kg está en −0.500 m. ¿Dónde está el centro de masa de estos objetos?

36. La masa de la Tierra es 5.98×10^{24} kg, y la masa de la Luna es 7.36×10^{22} kg. La distancia de separación, medida entre sus centros, es 3.84×10^{8} m. Localice el centro de masa del sistema Tierra–Luna, medido desde el centro de la Tierra.

37. A una pieza uniforme de hoja de acero se le da la forma como se muestra en la figura P9.37. Calcule las coordenadas x y y del centro de masa de la pieza.

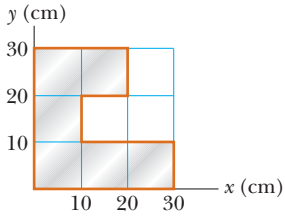


Figura P9.37

38. a) Considere un objeto extendido cuyas diferentes porciones tienen distintas elevaciones. Suponga que la aceleración en caída libe es uniforme sobre el objeto. Pruebe que la energía potencial gravitacional del sistema objeto–Tierra está dada por $U_g = Mgy_{CM}$, donde M es la masa total del objeto y y_{CM} es la elevación de su centro de masa sobre el nivel de referencia elegido. b) Calcule la energía potencial gravitacional asociada con una rampa construida con piedra a nivel del suelo con 3 800 kg/m^3 de densidad y ancho de 3.60 m en todas partes. En una vista lateral, la rampa parece un triángulo rectángulo con 15.7 m de altura en la cima y 64.8 m de base (figura P9.38).

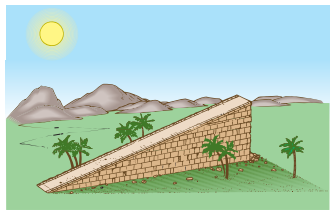


Figura P9.38

39. Una barra de 30.0 cm de longitud tiene densidad lineal (masa por longitud) dada por

$$\lambda = 50.0 \text{ g/m} + 20.0x \text{ g/m}^2$$

donde x es la distancia desde un extremo, medida en metros. a) ¿Cuál es la masa de la barra? b) ¿A qué distancia del extremo $x = 0$ está su centro de masa?

40. En los Juegos Olímpicos de verano de 1968, el saltador de altura de la Universidad de Oregon, Dick Fosbury, introdujo una nueva técnica de salto de altura llamada "salto Fosbury". Así elevó el récord mundial por casi 30 cm y actualmente lo usan casi todos los saltadores de clase mundial. En esta técnica, el saltador pasa sobre la barra con la cara hacia arriba mientras arquea su espalda tanto como sea posible, como se muestra en la figura P9.40a. Esta acción coloca su centro de masa fuera de su cuerpo, bajo su espalda. Conforme su cuerpo pasa sobre la barra, su centro de masa pasa por abajo de la barra. Ya que una entrada de energía dada implica cierta elevación para su centro de masa, la acción de arquear la espalda significa que

a) b)

Figura P9.40

su cuerpo está más alto que si su espalda estuviese recta. Como modelo, considere que el saltador es una barra delgada uniforme de longitud L. Cuando la barra está recta, su centro de masa está en su centro. Ahora doble la barra en un arco circular de modo que subtienda un ángulo de 90.0° en el centro del arco, como se muestra en la figura P9.40b. En esta configuración, ¿a qué distancia, afuera de la barra, está el centro de masa?

Sección 9.6 Movimiento de un sistema de partículas

41. Una partícula de 2.00 kg tiene una velocidad $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s, y una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Encuentre a) la velocidad del centro de masa y b) la cantidad de movimiento total del sistema.

42. El vector de posición de una partícula de 3.50 g que se mueve en el plano xy varía en el tiempo de acuerdo con $\vec{\mathbf{r}}_1 = (3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})t + 2\hat{\mathbf{j}}t^2$. Al mismo tiempo, el vector de posición de una partícula de 5.50 g varía como $\vec{\mathbf{r}}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{i}}t^2 - 6\hat{\mathbf{j}}t$, donde t está en s y r en cm. En $t = 2.50$ s, determine: a) el vector de posición del centro de masa, b) la cantidad de movimiento lineal del sistema, c) la velocidad del centro de masa, d) la aceleración del centro de masa y e) la fuerza neta que se ejerce sobre el sistema de dos partículas.

43. Romeo (77.0 kg) entretiene a Julieta (55.0 kg) al tocar su guitarra desde la parte trasera de su bote en reposo sobre agua calma, a 2.70 m de Julieta, quien está enfrente del bote. Después de la serenata, Julieta se mueve con cuidado hacia la parte trasera del bote (alejándose de la playa) para plantar un beso en la mejilla de Romeo. ¿Cuánto se mueve el bote de 80.0 kg hacia la playa que está enfrente?

44. Una bola de 0.200 kg de masa tiene una velocidad de $1.50\hat{\mathbf{i}}$ m/s; una bola de 0.300 kg de masa tiene una velocidad de $-0.400\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Se encuentran en una colisión frontal elástica. a) Halle sus velocidades después de la colisión. b) Halle la velocidad de su centro de masa antes y después de la colisión.

Sección 9.7 Sistemas deformables

45. ● Para un proyecto de tecnología, un estudiante construyó un vehículo, de 6.00 kg de masa total, que se mueve por sí solo. Como se muestra en la figura P9.45, corre sobre dos orugas ligeras que pasan alrededor de cuatro ruedas ligeras. Un carrete se acopla a uno de los ejes, y una cuerda originalmente enrollada sobre el carrete pasa sobre una polea unida al vehículo para soportar una carga elevada. Después de que el vehículo se libera desde el reposo, la carga desciende lentamente, desenrolla la cuerda para girar el eje y hace que el vehículo se mueva hacia adelante. La fricción es despreciable en la polea y los cojinetes del eje. La oruga no se desliza sobre las ruedas o el suelo. El carrete tiene una forma cónica de modo que la carga desciende a una rapidez baja constante mientras el vehículo se mueve horizontalmente a través del suelo con aceleración constante, y alcanza velocidad final $3.00\hat{\mathbf{i}}$ m/s. a) ¿El suelo imparte impulso al vehículo? Si es así, ¿cuánto? b) ¿El suelo realiza trabajo sobre el vehículo? Si es así, ¿cuánto? c) ¿Tiene sentido decir que la cantidad de movimiento final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde? d) ¿Tiene sentido decir que la energía cinética final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde? e) ¿Se puede decir que una fuerza particular causa la aceleración hacia adelante del vehículo? ¿Qué la causa?

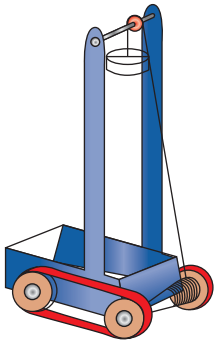


Figura P9.45

46. ● Una persona de 60.0 kg dobla sus rodillas y luego salta recto hacia arriba. Después de que sus pies dejan el suelo, su movimiento no es afectado por la resistencia del aire y su centro de masa se eleva un máximo de 15.0 cm. Modele el suelo como completamente sólido y sin movimiento. a) ¿El suelo imparte impulso a la persona? b) ¿El suelo realiza trabajo sobre la persona? c) ¿Con qué cantidad de movimiento deja el suelo la persona? d) ¿Tiene sentido decir que esta cantidad de movimiento viene del suelo? Explique. e) ¿Con qué energía cinética deja el suelo la persona? f) ¿Tiene sentido decir que esta energía proviene del suelo? Explique.

47. ● Una partícula está suspendida de un poste en lo alto de un carro mediante una cuerda ligera de longitud L, como se muestra en la figura P9.47a. El carro y la partícula inicialmente se mueven hacia la derecha con rapidez constante v_i, con la cuerda vertical. Súbitamente, el carro llega al reposo cuando choca y se une a un amortiguador, como se muestra en la figura P9.47b. La partícula suspendida se balancea a través de un ángulo θ. a) Demuestre que la rapidez original del carro se calcula a partir de $v_i = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$. b) Encuentre la rapidez inicial implicada por $L = 1.20$ m y $\theta = 35.0°$. c) ¿El amortiguador aún ejerce una fuerza horizontal en el carro cuando la partícula colgante está en su ángulo máximo desde la vertical? ¿En qué momento del movimiento observable el amortiguador deja de ejercer una fuerza horizontal en el carro?

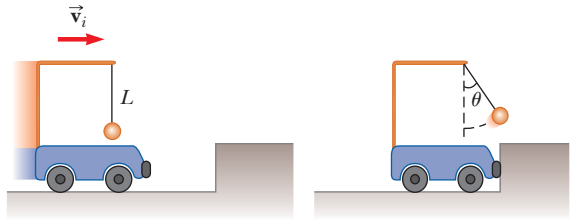


Figura P9.47

48. Sobre una pista de aire horizontal, un deslizador de masa m lleva un poste con forma de Γ. El poste soporta una pequeña esfera densa, también de masa m, que cuelga justo arriba de lo alto del deslizador en una cuerda de longitud L. El deslizador y la esfera inicialmente están en reposo con la cuerda vertical. (La figura P9.47a muestra un carro y una esfera igualmente conectados.) Una fuerza horizontal constante, de magnitud F, se aplica al deslizador, y lo mueve un desplazamiento x_1; después se quita la fuerza. Durante el intervalo de tiempo cuando la fuerza se aplica, la esfera se mueve a través de un desplazamiento con componente horizontal x_2. a) Encuentre la componente horizontal de la velocidad del centro de masa

del sistema deslizador–esfera cuando la fuerza se retira. b) Después de quitar la fuerza, el deslizador continúa moviéndose sobre la pista y la esfera se balancea atrás y adelante, ambos sin fricción. Encuentre una expresión para el mayor ángulo que la cuerda forma con la vertical.

49. ● Sobre una banda transportadora cae arena desde una tolva fija en una proporción de 5.00 kg/s, como se muestra en la figura P9.49. La banda transportadora está sostenida por rodillos sin fricción. Se mueve con una rapidez constante de 0.750 m/s bajo la acción de una fuerza horizontal externa constante $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ que proporciona el motor que impulsa la banda. Encuentre: a) la relación de cambio de la cantidad de movimiento de la arena en la dirección horizontal, b) la fuerza de fricción ejercida por la banda sobre la arena, c) la fuerza externa $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, d) el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ en 1 s, y e) la energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal. f) ¿Por qué son diferentes las respuestas en d) y e)?

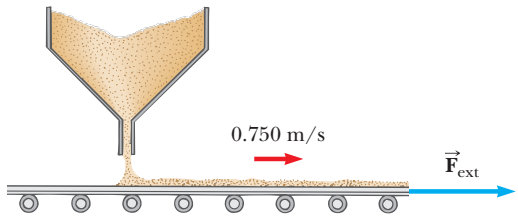


Figura P9.49

Sección 9.8 Propulsión de cohetes

50. Los motores de cohete a escala se dimensionan por el empuje, duración de empuje e impulso total, entre otras características. Un motor de cohete a escala tamaño C5 tiene un empuje promedio de 5.26 N, una masa de combustible de 12.7 g y una masa inicial de 25.5 g. La duración de su combustión es 1.90 s. a) ¿Cuál es la rapidez de escape promedio del motor? b) Este motor se coloca en el cuerpo de un cohete de 53.5 g de masa. ¿Cuál es la velocidad final del cohete si se dispara en el espacio exterior? Suponga que el combustible se quema a una proporción constante.

51. La primera etapa del vehículo espacial *Saturno V* consumió combustible y oxidante a la proporción de 1.50×10^4 kg/s, con una rapidez de escape de 2.60×10^3 m/s. a) Calcule el empuje producido por este motor. b) Encuentre la aceleración que tiene el vehículo justo cuando despega de la plataforma de lanzamiento sobre la Tierra, si considera la masa inicial del vehículo como 3.00×10^6 kg. *Nota:* Debe incluir la fuerza gravitacional para resolver b).

52. *Ciencia de cohetes.* Un cohete tiene masa total $M_i = 360$ kg, incluidos 330 kg de combustible y oxidante. En el espacio interestelar, parte del reposo en la posición $x = 0$, enciende su motor en el tiempo $t = 0$ y pone empuje con rapidez relativa $v_e = 1\,500$ m/s con la relación constante $k = 2.50$ kg/s. El combustible durará un tiempo de quema real de 330 kg/(2.5 kg/s) = 132 s, pero defina un "tiempo de agotamiento proyectado" como $T_p = M_i/k = 360$ kg/(2.5 kg/s) = 144 s (que sería el tiempo de quema si el cohete pudiera usar su carga y tanques de combustible, e incluso las paredes de la cámara de combustión como combustible). a) Demuestre que, durante la quema, la velocidad del cohete como función del tiempo se conoce por

$$v(t) = -v_e \ln\left(1 - \frac{t}{T_p}\right)$$

b) Haga una gráfica de la velocidad del cohete como función del tiempo para tiempos que van de 0 a 132 s. c) Demuestre que la aceleración del cohete es

$$a(t) = \frac{v_e}{T_p - t}$$

d) Grafique la aceleración como función del tiempo. e) Demuestre que la posición del cohete es

$$x(t) = v_e(T_p - t)\ln\left(1 - \frac{t}{T_p}\right) + v_e t$$

f) Grafique la posición durante la quema como función del tiempo.

53. ● Un cohete en el espacio profundo será capaz de impulsar una carga total (carga más armazón del cohete y motor) de 3.00 toneladas métricas a una rapidez de 10 000 m/s. a) Tiene un motor y combustible diseñados para producir una rapidez de escape de 2 000 m/s. ¿Cuánto combustible más oxidante se requiere? b) Si un combustible y diseño de motor dieran una rapidez de escape de 5 000 m/s, ¿qué cantidad de combustible y oxidante se requeriría para la misma tarea? Esta rapidez de escape es 2.50 veces mayor que la del inciso a). Explique por qué la masa del combustible requerido es 2.50 veces menor, o mayor que eso, o incluso más pequeña.

Problemas adicionales

54. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. Un resorte con constante de fuerza k se une al extremo posterior del segundo deslizador. El primer deslizador, de masa m_1, tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1$, y el segundo deslizador, de masa m_2, se mueve más lentamente, con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_2$, como se muestra en la figura P9.54. Cuando m_1 choca con el resorte unido a m_2 y comprime el resorte a su máxima compresión $x_{\text{máx}}$, la velocidad de los deslizadores es $\vec{\mathbf{v}}$. En términos de $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, m_1, m_2 y k, encuentre a) la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en máxima compresión, b) la máxima compresión $x_{\text{máx}}$ y c) la velocidad de cada deslizador después de que m_1 pierde contacto con el resorte.

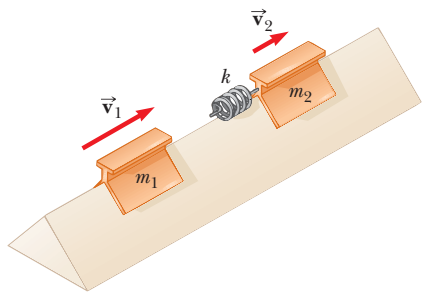


Figura P9.54

55. Un astronauta de 80.0 kg da una caminata espacial para trabajar en los motores de su nave, que va a la deriva por el espacio con una velocidad constante. El astronauta, que quiere tener una mejor vista del Universo, se empuja contra la nave y más tarde se encuentra 30.0 m atrás de la nave. Sin un propulsor o correa, la única forma de regresar a la nave es lanzar su llave de 0.500 kg directamente lejos de la nave. Si lanza la llave con una rapidez de 20.0 m/s en relación con la nave, ¿después de qué intervalo de tiempo el astronauta alcanza la nave?

56. ● Un envejecido actor de Hollywood (80.0 kg de masa) fue clonado, pero la réplica genética dista de la perfección. El clon tiene una masa diferente m, su presencia en el escenario es

deficiente y usa un lenguaje grosero. El clon, que sirve como doble del actor, está de pie en la orilla de un risco de 36.0 m de alto, junto a un árbol robusto. El actor está de pie en lo alto de un Humvee, 1.80 m sobre el nivel del suelo, y sostiene una soga tensa unida a la rama de un árbol directamente arriba del clon. Cuando el director grita "acción", el actor parte del reposo y se balancea hacia abajo en la soga sin fricción. El actor está momentáneamente oculto de la cámara en la parte baja del arco, donde se somete a una colisión elástica frontal con el clon, a quien envía al otro lado del risco. Maldiciendo, el clon va en caída libre al océano. El actor es acusado por hacer caer grotescamente al clon y a usted lo llaman como testigo experto en el sensacional juicio. a) Encuentre la componente horizontal R del desplazamiento del clon como dependiente de m. Evalúe R b) para $m = 79.0$ kg y c) para $m = 81.0$ kg. d) ¿Qué valor de m da un alcance de 30.0 m? e) ¿Cuál es el valor máximo posible para R, y f) a qué valor de m corresponde? ¿Cuáles son g) los valores mínimos de R y h) el valor correspondiente de m? i) Para el sistema actor–clon–Tierra, ¿la energía mecánica se conserva en cada parte de la secuencia de acción? ¿Este principio es suficiente para resolver el problema? Explique. j) Para el mismo sistema, ¿se conserva la cantidad de movimiento? Explique cómo se usa este principio. k) **¿Qué pasaría si?** Demuestre que R no depende del valor de la aceleración gravitacional. ¿Es notable este resultado? Establezca cómo puede dar sentido a esto.

57. Se dispara una bala de masa m hacia un bloque de masa M inicialmente en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura h (figura P9.57). La bala permanece en el bloque y, después de impactar el bloque, aterriza a una distancia d desde la parte más baja de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

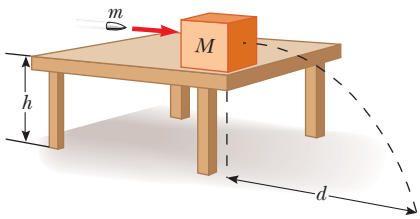


Figura P9.57

58. Un bloque pequeño de masa $m_1 = 0.500$ kg se libera desde el reposo en lo alto de una cuña sin fricción con forma curva, de masa $m_2 = 3.00$ kg, la cual se apoya sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P9.58a. Cuando el bloque deja la cuña, se mide su velocidad de 4.00 m/s hacia la derecha, como se muestra en la figura. a) ¿Cuál es la velocidad de la cuña después de que el bloque llega a la superficie horizontal? b) ¿Cuál es la altura h de la cuña?

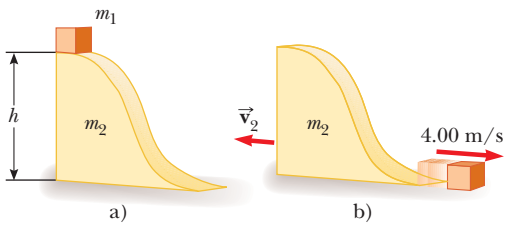


Figura P9.58

59. ● Una esfera de 0.500 kg, que se mueve con una velocidad conocida por $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}} + 1.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s, golpea a otra esfera de 1.50 kg de masa que se mueve con una velocidad inicial de $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}} - 3.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. a) La velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión está dada por $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} - 8.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión (elástica, inelástica o perfectamente inelástica). b) Ahora suponga que la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-0.250\hat{\mathbf{i}} + 0.750\hat{\mathbf{j}} - 2.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión. c) **¿Qué pasaría si?** Tome la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión como $(-1.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Encuentre el valor de a y la velocidad de la esfera de 1.50 kg después de una colisión elástica.

60. Un bombero de 75.0 kg se desliza hacia abajo en un poste mientras una fuerza de fricción constante de 300 N retarda su movimiento. Una plataforma horizontal de 20.0 kg está soportada por un resorte en la parte baja del poste para amortiguar la caída. El bombero parte del reposo 4.00 m arriba de la plataforma y la constante del resorte es 4 000 N/m. Encuentre a) la rapidez del bombero inmediatamente antes de chocar con la plataforma y b) la distancia máxima que se comprime el resorte. Suponga que la fuerza de fricción actúa durante todo el movimiento.

61. ● George de la Selva, con masa m, se balancea en una liana ligera que cuelga de la rama fija de un árbol. Una segunda liana de igual longitud cuelga del mismo punto, y un gorila de mayor masa M se balancea en ella en la dirección opuesta. Ambas lianas están horizontales cuando los primates parten desde el reposo en el mismo momento. George y el gorila se encuentran en el punto más bajo de su balanceo. Cada uno tiene miedo de que una liana se rompa, así que se abrazan mutuamente y cuelgan. Se balancean juntos hacia arriba y llegan a un punto donde las lianas forman un ángulo de 35.0° con la vertical. a) Encuentre el valor de la proporción m/M. b) **¿Qué pasaría si?** Intente el siguiente experimento en casa. Amarre un imán y un tornillo de acero a extremos opuestos de una cuerda. Sostenga fijo el centro de la cuerda para representar la rama del árbol y reproduzca un modelo de los movimientos de George y el gorila. ¿Qué cambios en su análisis lo harán aplicable a esta situación? **¿Qué pasaría si?** A continuación suponga que el imán tiene la fuerza para atraer notablemente el tornillo a través de una distancia de unos cuantos centímetros. Después el tornillo se moverá más rápido inmediatamente antes de pegarse al imán. ¿Esta intensidad magnética adicional hace una diferencia?

62. ● Una estudiante realiza un experimento en el péndulo balístico con el uso de un aparato similar al que se muestra en la figura 9.9b. Ella obtiene los siguientes datos promedio: $h = 8.68$ cm, $m_1 = 68.8$ g y $m_2 = 263$ g. Los símbolos se refieren a las cantidades en la figura 9.9a. a) Determine la rapidez inicial v_{1A} del proyectil. b) La segunda parte de su experimento es obtener v_{1A} al disparar el mismo proyectil horizontalmente (con el péndulo retirado de la trayectoria) y medir su posición horizontal final x y distancia de caída y (figura P9.62). Demuestre que la rapidez inicial del proyectil se relaciona con x y y mediante la ecuación

$$v_{1A} = \frac{x}{\sqrt{2y/g}}$$

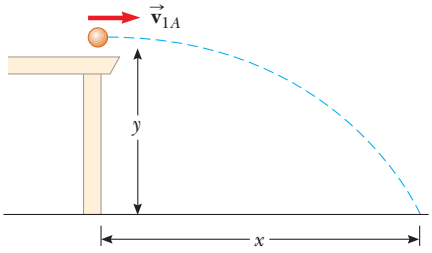


Figura P9.62

¿Qué valor numérico obtiene para v_{1A} en función de sus valores observados de $x = 257$ cm y $y = 85.3$ cm? ¿Qué factores pueden explicar la diferencia en este valor comparado con el obtenido en el inciso a)?

63. ● Lazarus Carnot, un general de artillería, condujo el proyecto militar de Napoleón. Carnot usó un péndulo balístico para medir las magnitudes de velocidad de disparo de balas de cañón. En los símbolos definidos en el ejemplo 9.6, comprobó que la relación de la energía cinética inmediatamente después de la colisión respecto a la energía cinética inmediatamente antes de $m_1/(m_1 + m_2)$. a) Realice la prueba usted mismo. b) Si la bala de cañón tiene 9.60 kg de masa y el bloque (un tronco de árbol) tiene 214 kg de masa, ¿qué fracción de la energía original permanece mecánica después de la colisión? c) ¿Cuál es la relación de la cantidad de movimiento inmediatamente después de la colisión respecto a la cantidad de movimiento inmediatamente antes de? d) Un estudiante cree que una pérdida tan grande de energía mecánica debe acompañarse de al menos una pequeña pérdida de cantidad de movimiento. ¿Cómo convencería a este estudiante de la verdad? El hijo del general Carnot, Sadi, fue el segundo ingeniero más importante en la historia de las ideas; su obra se estudiará en el capítulo 22.

64. ● Perseguido por lobos feroces, está en un trineo sin caballos, y se desliza sin fricción a través de un lago cubierto de hielo. Usted toma una acción descrita por estas ecuaciones:

$$(270 \text{ kg})(7.50 \text{ m/s})\hat{\mathbf{i}} = (15.0 \text{ kg})(-v_{1f}\hat{\mathbf{i}}) + (255 \text{ kg})(v_{2f}\hat{\mathbf{i}})$$

$$v_{1f} + v_{2f} = 8.00 \text{ m/s}$$

a) Complete el enunciado del problema, proporcione los datos e identifique las incógnitas. b) Encuentre los valores de v_{1f} y v_{2f}. c) Encuentre el trabajo que hizo.

65. **Problema de repaso.** Un resorte ligero, con constante de fuerza 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm y se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha. Ambos bloques están en reposo sobre una superficie horizontal. Los bloques se liberan simultáneamente de modo que el resorte tiende a separarlos. Encuentre la velocidad máxima que logra cada bloque si el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es a) 0, b) 0.100 y c) 0.462. Suponga que el coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción cinética en cada caso.

66. Considere como un sistema al Sol con la Tierra en una órbita circular alrededor de aquél. Encuentre la magnitud del cambio en la velocidad del Sol en relación con el centro de masa del sistema durante un periodo de 6 meses. Ignore la influencia de otros objetos del espacio. Puede obtener los datos astronómicos necesarios al final del libro.

67. Una bala de 5.00 g, que se mueve con una rapidez inicial de 400 m/s, se dispara y pasa a través de un bloque de 1.00 kg, como se muestra en la figura P9.67. El bloque, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, se conecta a un resorte con constante de fuerza 900 N/m. El bloque se mueve 5.00 cm hacia la derecha después del impacto. Encuentre a) la rapidez con que la bala sale del bloque y b) la energía mecánica que se convierte en energía interna en la colisión.

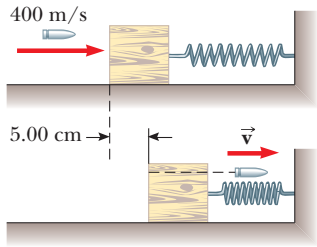


Figura P9.67

68. ● **Problema de repaso.** Existen (podría decirse) tres teorías recíprocas del movimiento: la segunda ley de Newton, que afirma que la fuerza total en una partícula causa su aceleración; el teorema trabajo–energía cinética, que afirma que el trabajo total en una partícula causa su cambio en energía cinética; y el teorema impulso–cantidad de movimiento, que establece que el impulso total en una partícula causa su cambio en cantidad de movimiento. En este problema, compare predicciones de las tres teorías en un caso particular. Un objeto de 3.00 kg tiene velocidad $7.00\hat{\mathbf{j}}$ m/s. Después, una fuerza total de $12.0\hat{\mathbf{i}}$ N actúa sobre el objeto durante 5.00 s. a) Calcule la velocidad final del objeto, con el teorema impulso–cantidad de movimiento. b) Calcule su aceleración a partir de $\vec{\mathbf{a}} = (\vec{\mathbf{v}}_f - \vec{\mathbf{v}}_i)/\Delta t$. c) Calcule su aceleración a partir de $\vec{\mathbf{a}} = \Sigma \vec{\mathbf{F}}/m$. d) Encuentre el desplazamiento vectorial del objeto a partir de $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{v}}_i t + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2$. e) Encuentre el trabajo invertido en el objeto a partir de $W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$. f) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\vec{\mathbf{v}}_f \cdot \vec{\mathbf{v}}_f$. g) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + W$. h) Establezca el resultado de comparar las respuestas de los incisos b) y c), y las respuestas a los incisos f) y g).

69. Una cadena de longitud L y masa total M se libera desde el reposo con su extremo inferior apenas tocando lo alto de una mesa, como se muestra en la figura P9.69a. Encuentre la fuerza que ejerce la mesa sobre la cadena después de que la cadena cae una distancia x, como se muestra en la figura P9.69b. (Suponga que cada eslabón llega al reposo en el instante en que llega a la mesa.)

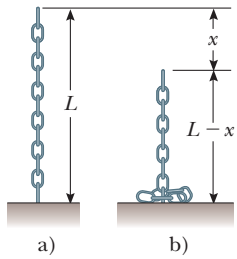


Figura P9.69

Respuestas a las preguntas rápidas

9.1 d). Dos objetos idénticos ($m_1 = m_2$) que viajan con la misma rapidez ($v_1 = v_2$) tienen las mismas energías cinéticas y las mismas magnitudes de cantidad de movimiento. Sin embargo, también es posible, para combinaciones particulares de masas y velocidades, satisfacer $K_1 = K_2$ pero no $p_1 = p_2$. Por ejemplo, un objeto de 1 kg que se mueve a 2 m/s tiene la misma energía cinética que un objeto de 4 kg que se mueve a 1 m/s, pero es claro que los dos no tienen las mismas cantidades de movimiento. Ya que no se tiene información acerca de masas y magnitudes de velocidad, no se puede elegir entre a), b) o c).

9.2 b), c), a). Mientras más lento viaje la bola, más fácil será de atrapar. Si la cantidad de movimiento de la pelota grande y pesada es la misma que la cantidad de movimiento de la pelota de beisbol, la rapidez de la pelota para gimnasia debe ser 1/10 la rapidez de la pelota de beisbol porque la pelota grande y pesada tiene 10 veces la masa. Si las energías cinéticas son las mismas, la rapidez de la pelota para gimnasia debe ser $1/\sqrt{10}$ la rapidez de la pelota de beisbol debido al término de rapidez al cuadrado en la ecuación para K. La pelota para gimnasia es más difícil de atrapar cuando tiene la misma rapidez que la pelota de beisbol.

9.3 **i)**, c), e). El objeto 2 tiene una mayor aceleración debido a su masa más pequeña. Por lo tanto, recorre la distancia d en un intervalo de tiempo más breve. Aun cuando la fuerza que se aplica a los objetos 1 y 2 es la misma, el cambio en cantidad de movimiento es menor para el objeto 2 porque Δt es menor. El trabajo $W = Fd$ invertido en ambos objetos es el mismo porque tanto F como d son los mismos en los dos casos. En consecuencia, $K_1 = K_2$. **ii)**, b), d). El mismo impulso se aplica a ambos objetos, de modo que experimentan el mismo cambio en cantidad de movimiento. El objeto 2 tiene una mayor aceleración debido a su masa más pequeña. Debido a eso, la distancia que cubre el objeto 2 en el intervalo de tiempo es mayor que la del objeto 1. Como resultado, sobre el objeto 2 se consume más trabajo y $K_2 > K_1$.

9.4 a) Los tres son iguales. Ya que el pasajero fue llevado desde la rapidez inicial del automóvil a un alto total, el cambio en cantidad de movimiento (igual al impulso) es el mismo sin importar qué detiene al pasajero. b) Tablero, cinturón de seguridad, bolsa de aire. El tablero detiene al pasajero muy rápidamente en una colisión frontal, lo que resulta en una fuerza muy grande. El cinturón de seguridad toma un poco más de tiempo, así que la fuerza es más pequeña. Usada junto con el cinturón de seguridad, la bolsa de aire puede extender aún más el tiempo de frenado del pasajero, en especial para su cabeza, que de otro modo chicotearía hacia adelante.

9.5 a). Si toda la energía cinética inicial se transforma o transfiere del sistema, nada se mueve después de la colisión. En consecuencia, la cantidad de movimiento final del sistema necesariamente es cero y la cantidad de movimiento inicial del sistema por lo tanto debe ser cero. Aunque b) y d) las condiciones *juntas* serían suficientes, ninguna de ellas *sola* lo hace.

9.6 b). Ya que la cantidad de movimiento del sistema de dos bolas se conserva, $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}i} + 0 = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}f} + \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{B}}$. Y que la bola de tenis de mesa rebota desde la bola de boliche mucho más masiva aproximadamente con la misma rapidez, $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}f} = -\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}i}$. En consecuencia, $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{B}} = 2\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{T}i}$. La energía cinética se puede expresar como $K = p^2/2m$. Debido a la masa mucho mayor de la bola de boliche, su energía cinética es mucho menor que la de la bola de tenis de mesa.

9.7 b). La pieza con el mango tendrá menos masa que la pieza que constituye el extremo del bat. Para ver por qué, tome el origen de coordenadas como el centro de masa antes de que el bat se corte. Sustituya cada pieza cortada por una pequeña esfera ubicada en el centro de masa de cada pieza. La esfera que representa la pieza del mango está más lejos del origen, pero el producto de menos masa y mayor distancia equilibra el producto de mayor masa y menor distancia para la pieza del extremo, como se muestra.

9.8 **i)**, a). Este efecto es el mismo que el nadador que se clava desde la balsa, recién discutido. El sistema crucero–pasajeros está aislado. Si los pasajeros comienzan todos a correr en una dirección, la rapidez del crucero aumenta (¡una pequeña cantidad!) en la otra dirección. **ii)**, b). Una vez que dejan de correr, la cantidad de movimiento del sistema es la misma que era antes de que comenzaran a correr; no se puede cambiar la cantidad de movimiento de un sistema aislado mediante fuerzas internas. En caso de que esté pensando que los pasajeros podrían correr hacia la popa repetidamente para sacar ventaja del aumento de rapidez *mientras* corren, ¡recuerde que frenarán la embarcación cada vez que regresen a la proa!