Los controles en la cabina de una aeronave comercial ayudan al piloto a mantener el control sobre la velocidad del aparato (cuán rápido viaja y en qué dirección lo hace) lo cual le permite aterrizar con seguridad. Las cantidades que se definen tanto por una magnitud como por una dirección, como la velocidad, se llaman *cantidades vectoriales*. (Mark Wagner/Getty Images)

3.1 Sistemas coordenados
3.2 Cantidades vectoriales y escalares
3.3 Algunas propiedades de los vectores
3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

3 Vectores

En el estudio de la física con frecuencia se necesita trabajar con cantidades físicas que tie- nen propiedades tanto numéricas como direccionales. Como se apuntó en la sección 2.1, las cantidades de esta naturaleza son cantidades vectoriales. Este capítulo está interesado principalmente en las propiedades generales de las cantidades vectoriales. Se analizan la suma y resta de cantidades vectoriales, con aplicaciones comunes a situaciones físicas.

Las cantidades vectoriales se usan en todas las partes de este texto. Por tanto, es imperativo que domine las técnicas que se discuten en este capítulo.

3.1 Sistemas coordenados

Muchos aspectos de la física incluyen una descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo, en el capítulo 2, se vio que la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios tiempos. En dos dimensiones esta descripción se logra con el uso del sistema de coordenadas cartesianas, en el que ejes perpendiculares cruzan en un punto definido como el origen (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas también se llaman *coordenadas rectangulares*.

A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus *coordenadas polares planas* (r, θ), como se muestra en la figura 3.2a. En este *sistema de coordenadas polares*, r es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas (x, y) y θ es el ángulo entre un eje fijo y una línea dibujada desde el origen hasta el punto. El eje fijo es el eje x positivo y θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el mismo. A partir del triángulo rectángulo de la figura 3.2b, se encuentra que

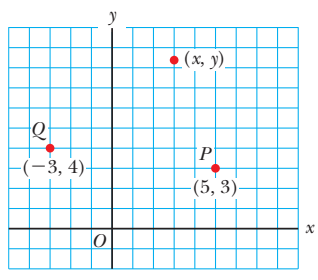

Figura 3.1 Designación de puntos en un sistema coordenado cartesiano. Cualquier punto se etiqueta con las coordenadas (x, y).

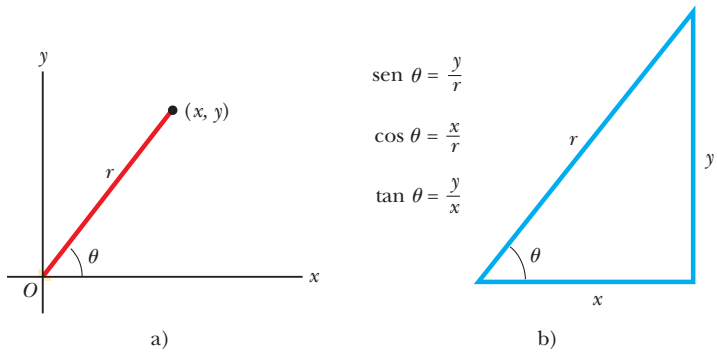

Figura 3.2 a) Las coordenadas polares planas de un punto se representan mediante la distancia r y el ángulo θ, donde θ se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo. b) Se usa el triángulo rectángulo para relacionar (x, y) con (r, θ).

sen $\theta = y/r$ y que cos $\theta = x/r$. (En el apéndice B.4 se presenta una revisión de las funciones trigonométricas.) En consecuencia, si parte con las coordenadas polares planas de cualquier punto, al aplicar las siguientes ecuaciones obtiene las coordenadas cartesianas

$$x = r \cos \theta \tag{3.1}$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \tag{3.2}$$

Además, las definiciones de trigonometría dicen que

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \tag{3.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.4}$$

La ecuación 3.4 es el conocido teorema de Pitágoras.

Estas cuatro expresiones, que relacionan las coordenadas (x, y) con las coordenadas (r, θ), se aplican sólo cuando θ se define como se muestra en la figura 3.2a; en otras palabras, cuando θ es positivo, es un ángulo que se mide contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x positivo. (Algunas calculadoras científicas realizan conversiones entre coordenadas cartesianas y polares en función de estas convenciones estándar.) Si como eje de referencia para el ángulo polar θ se elige otro distinto del eje x positivo o si el sentido de θ creciente se elige de modo diferente, cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas.

EJEMPLO 3.1 Coordenadas polares

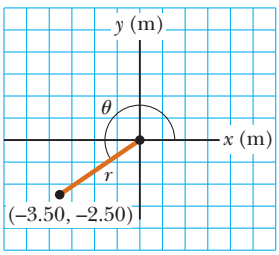

Figura 3.3 (Ejemplo 3.1) Encuentre las coordenadas polares cuando tiene las coordenadas cartesianas.

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se muestra en la figura 3.3. Encuentre las coordenadas polares de este punto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El dibujo de la figura 3.3 ayuda a formar conceptos del problema.

Categorizar A partir del enunciado del problema y de la etapa Conceptualizar, se entiende que simplemente se convierte de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Debido a esto, se considera este ejemplo como un problema de sustitución. Dichos problemas por lo general no tienen una etapa de análisis amplia distinta de la sustitución de números en una ecuación dada. De igual modo, la etapa "Finalizar" consiste principalmente en comprobar las unidades y asegurarse de que la respuesta es razonable. En consecuencia, para problemas de sustitución, no se marcarán las etapas "Analizar" y "Finalizar".

Aplique la ecuación 3.4 para encontrar r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\ \text{m})^2 + (-2.50\ \text{m})^2} = 4.30\ \text{m}$$

Aplique la ecuación 3.3 para hallar θ:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\ \text{m}}{-3.50\ \text{m}} = 0.714$$

$$\theta = 216°$$

Advierta que debe usar los signos de x y y para encontrar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema coordenado. Esto es, $\theta = 216°$, no 35.5°.

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Ahora se describirá formalmente la diferencia entre cantidades escalares y cantidades vectoriales. Cuando quiere saber la temperatura exterior para saber cómo vestirse, la única información que necesita es un número y la unidad "grados C" o "grados F". Así, la temperatura es un ejemplo de *cantidad escalar*.

Una **cantidad escalar** se especifica por completo mediante un valor único con una unidad adecuada y no tiene dirección.

Otros ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, rapidez e intervalos de tiempo. Las reglas de aritmética ordinaria se usan para manipular cantidades escalares.

Si se prepara para pilotear un pequeño avión y necesita saber la velocidad del viento, debe conocer tanto la rapidez del viento como su dirección. Puesto que la dirección es importante para una especificación completa, la velocidad es una *cantidad vectorial*.

Una **cantidad vectorial** se especifica por completo mediante un número y unidades apropiadas más una dirección.

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento, como ya sabe por el capítulo 2. Suponga que una partícula se mueve desde algún punto Ⓐ hasta algún punto Ⓑ a lo largo de una trayectoria recta, como se muestra en la figura 3.4. Tal desplazamiento se representa con el dibujo de una flecha de Ⓐ a Ⓑ, en el que la punta de la flecha apunta alejándose del punto de partida. La dirección de la punta de flecha representa la dirección del desplazamiento y la longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento. Si la partícula viaja a lo largo de alguna otra trayectoria de Ⓐ a Ⓑ, como se muestra mediante la línea discontinua en la figura 3.4, su desplazamiento todavía es la flecha dibujada de Ⓐ a Ⓑ. El desplazamiento sólo depende de las posiciones inicial y final, de modo que el vector desplazamiento es independiente de la trayectoria que toma la partícula entre estos dos puntos.

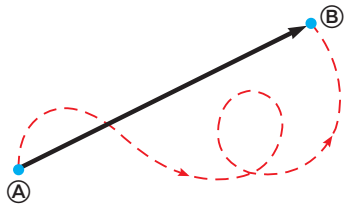

Figura 3.4 Conforme una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ a lo largo de una trayectoria arbitraria representada por la línea discontinua, su desplazamiento es una cantidad vectorial que se muestra mediante la flecha dibujada de Ⓐ a Ⓑ.

En este texto se usa una letra en negrita con una flecha sobre ella, como $\vec{\mathbf{A}}$, para representar un vector. Otra notación común para vectores, con la que se debe familiarizar, es un caracter en negrita: $\mathbf{A}$. La magnitud del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se escribe A o $|\vec{\mathbf{A}}|$. La magnitud de un vector tiene unidades físicas, como metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

Pregunta rápida 3.1 ¿Cuáles de los siguientes son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? a) su edad b) aceleración c) velocidad d) rapidez e) masa

3.3 Algunas propiedades de los vectores

En esta sección se indagarán las propiedades generales de los vectores que representan cantidades físicas. También se discute cómo sumar y restar vectores con el uso de métodos algebraicos y geométricos.

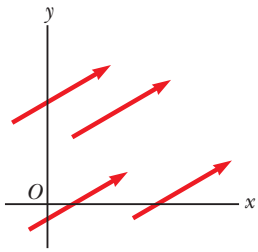

Figura 3.5 Estos cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección.

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos, dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se definen como iguales si tienen la misma magnitud y si apuntan en la misma dirección. Esto es, $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$ sólo si $A = B$ y si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ apuntan en la misma dirección a lo largo de líneas paralelas. Por ejemplo, todos los vectores en la figura 3.5 son iguales aun cuando tengan diferentes puntos de inicio. Dicha propiedad permite mover, en un diagrama, un vector a una posición paralela a sí mismo sin afectar al vector.

Suma de vectores

Una forma conveniente de describir las reglas para sumar vectores es mediante un método gráfico. Para sumar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ al vector $\vec{\mathbf{A}}$, primero dibuje el vector $\vec{\mathbf{A}}$ en papel gráfico, con su magnitud representada mediante una escala de longitud conveniente, y luego dibuje el vector $\vec{\mathbf{B}}$ a la misma escala, con su origen iniciando desde la punta de $\vec{\mathbf{A}}$, como se muestra en la figura 3.6. El **vector resultante** $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ es el vector que se dibuja desde el origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

También se usa una construcción geométrica para sumar más de dos vectores, como se muestra en la figura 3.7 para el caso de cuatro vectores. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}} + \vec{\mathbf{D}}$ es el vector que completa el polígono. En otras palabras, **$\vec{\mathbf{R}}$ es el vector dibujado desde el origen del primer vector a la punta del último vector**. Esta técnica para sumar vectores con frecuencia se llama "método del paralelogramo".

Cuando se suman dos vectores, la suma es independiente del orden de la adición. (Quizás esto parezca trivial, pero como verá en el capítulo 11, el orden es importante cuando se multiplican vectores. Los procedimientos para multiplicar vectores se analizan en los capítulos 7 y 11.) Esta propiedad, que se aprecia en la construcción geométrica de la figura 3.8, se conoce como **ley conmutativa de la suma**:

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \tag{3.5}$$

Cuando se suman tres o más vectores, su suma es independiente de la forma en la cual se agrupan los vectores individuales. En la figura 3.9 se muestra una prueba geométrica de esta regla para tres vectores. Esta propiedad se llama **ley asociativa de la suma**:

$$\vec{\mathbf{A}} + (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) + \vec{\mathbf{C}} \tag{3.6}$$

En resumen, **una cantidad vectorial tiene tanto magnitud como dirección y también obedece las leyes de la suma vectorial** como se describe en las figuras de la 3.6 a la 3.9. Cuando se suman dos o más vectores, todos deben tener las mismas unidades y deben ser del mismo tipo de cantidad. No tiene sentido sumar un vector velocidad (por ejemplo, 60 km/h hacia el este) con un vector desplazamiento (por ejemplo, 200 km al norte) porque

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.1

Suma vectorial con suma escalar

Advierta que $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$ es muy diferente de $A + B = C$. La primera ecuación es una suma vectorial, que se debe manejar con cuidado, con un método gráfico. La segunda ecuación es una simple suma algebraica de números que se manejan con las reglas normales de aritmética.

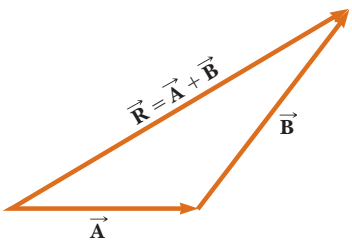

Figura 3.6 Cuando el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es el vector que va del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

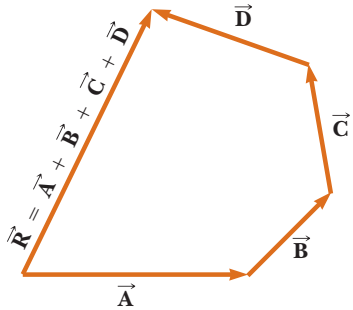

Figura 3.7 Construcción geométrica para sumar cuatro vectores. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es por definición el que completa el polígono.

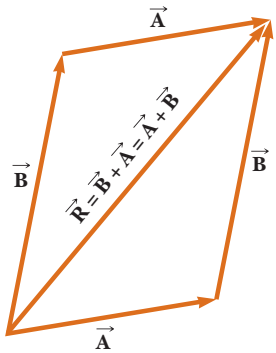

Figura 3.8 Esta construcción muestra que $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$ o, en otras palabras, que la suma vectorial es conmutativa.

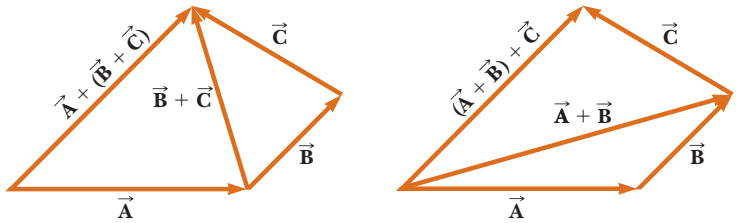

Figura 3.9 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la suma.

estos vectores representan diferentes cantidades físicas. La misma regla se aplica a los escalares. Por ejemplo, no tiene sentido sumar intervalos de tiempo con temperaturas.

Negativo de un vector

El negativo del vector $\vec{\mathbf{A}}$ se define como el vector que, cuando se suma con $\vec{\mathbf{A}}$, da cero para la suma vectorial. Esto es: $\vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{A}}) = 0$. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $-\vec{\mathbf{A}}$ tienen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas.

Resta de vectores

La operación de resta vectorial utiliza la definición del negativo de un vector. Se define la operación $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ como el vector $-\vec{\mathbf{B}}$ que se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$:

$$\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}}) \tag{3.7}$$

En la figura 3.10a se ilustra la construcción geométrica para restar dos vectores de esta forma.

Otra forma de observar la resta vectorial es notar que la diferencia $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ entre dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es lo que debe sumar al segundo vector para obtener el primero. En este caso, como muestra la figura 3.10b, el vector $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ apunta desde la punta del segundo vector a la punta del primero.

Multiplicación de un vector por un escalar

Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar positiva m, el producto $m\vec{\mathbf{A}}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$ y magnitud mA. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$, el producto $-m\vec{\mathbf{A}}$ tiene una dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$. Por ejemplo, el vector $5\vec{\mathbf{A}}$ es cinco veces tan largo como $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$; el vector $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{A}}$ es un tercio la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y apunta en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{A}}$.

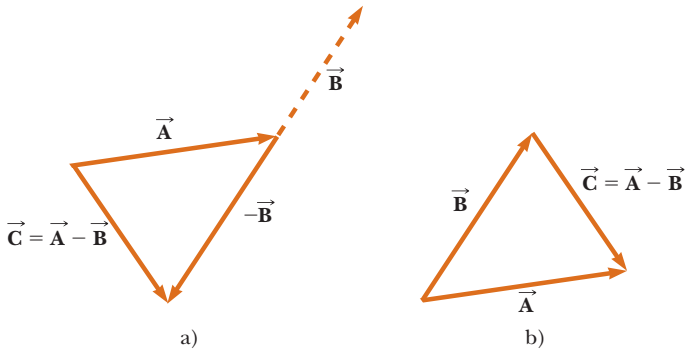

Figura 3.10 a) Esta construcción muestra cómo restar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ del vector $\vec{\mathbf{A}}$. El vector $-\vec{\mathbf{B}}$ es igual en magnitud al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y apunta en la dirección opuesta. Para restar $\vec{\mathbf{B}}$ de $\vec{\mathbf{A}}$, aplique la regla de suma vectorial a la combinación de $\vec{\mathbf{A}}$ y $-\vec{\mathbf{B}}$: primero dibuje $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de algún eje conveniente y luego coloque el origen de $-\vec{\mathbf{B}}$ en la punta de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{C}$ es la diferencia $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$. b) Una segunda forma de observar la resta vectorial. El vector diferencia $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ es el vector que se debe sumar a $\vec{\mathbf{B}}$ para obtener $\vec{\mathbf{A}}$.

Pregunta rápida 3.2 Las magnitudes de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son $A = 12$ unidades y $B = 8$ unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los valores *más grandes* y *más pequeños* posibles para la magnitud del vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$? a) 14.4 unidades, 4 unidades, b) 12 unidades, 8 unidades, c) 20 unidades, 4 unidades, d) ninguna de estas respuestas.

Pregunta rápida 3.3 Si el vector $\vec{\mathbf{B}}$ se suma al vector $\vec{\mathbf{A}}$, ¿cuáles *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero? a) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos y en la misma dirección. b) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son paralelos y en direcciones opuestas. c) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen la misma magnitud. d) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son perpendiculares.

EJEMPLO 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

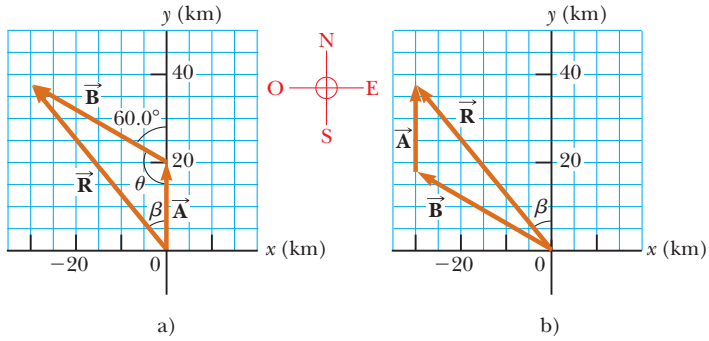

Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. b) Sumar los vectores en orden inverso ($\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}$) da el mismo resultado para $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ dibujados en la figura 3.11a ayudan a formar conceptos del problema.

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento $\vec{\mathbf{R}}$ es la resultante cuando se suman los dos desplazamientos individuales $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Incluso se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos.

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con el álgebra. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo (véase el apéndice B.4).

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$ de la ley de cosenos para encontrar R:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

Sustituya valores numéricos y advierta que $\theta = 180° - 60° = 120°$:

$$R = \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$
$$= 48.2\text{ km}$$

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ medida desde la dirección norte:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen}120° = 0.629$$

$$\beta = 38.9°$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

Finalizar ¿El ángulo β, que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo real medido del diagrama con el uso del método gráfico? ¿Es razonable que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ sea mayor que la de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$? ¿Las unidades de $\vec{\mathbf{R}}$ son correctas?

Aunque el método gráfico de sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, un triángulo sólo resulta si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿Qué pasaría si? Considere que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores sumados en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

El método gráfico de suma de vectores no se recomienda cuando se requiere gran precisión o en problemas tridimensionales. En esta sección se describe un método de suma de vectores que utiliza las proyecciones de los vectores a lo largo de los ejes coordenados. Dichas proyecciones se llaman **componentes** del vector o sus **componentes rectangulares**. Cualquier vector se puede describir por completo mediante sus componentes.

Considere un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano xy y forma un ángulo arbitrario θ con el eje positivo x, como se muestra en la figura 3.12a. Este vector se puede expresar como la suma de otros dos *vectores componentes* $\vec{\mathbf{A}}_x$, que es paralelo al eje x, y $\vec{\mathbf{A}}_y$, que es paralelo al eje y. De la figura 3.12b se ve que los tres vectores forman un triángulo rectángulo y que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{A}}_x + \vec{\mathbf{A}}_y$. Con frecuencia se hará alusión a las "componentes de un vector $\vec{\mathbf{A}}$", escritas A_x y A_y (la notación es sin negritas). La componente A_x representa la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje x, y la componente A_y representa la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje y. Estas componentes pueden ser positivas o negativas. La componente A_x es positiva si el vector componente $\vec{\mathbf{A}}_x$ apunta en la dirección x positiva y es negativa si $\vec{\mathbf{A}}_x$ apunta en la dirección x negativa. Lo mismo es cierto para la componente A_y.

De la figura 3.12 y de la definición de seno y coseno, es claro que $\cos\theta = A_x/A$ y que $\operatorname{sen}\theta = A_y/A$. Por tanto, las componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ son

$$A_x = A\cos\theta \tag{3.8}$$

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{3.9}$$

◀ Componentes del vector $\vec{\mathbf{A}}$

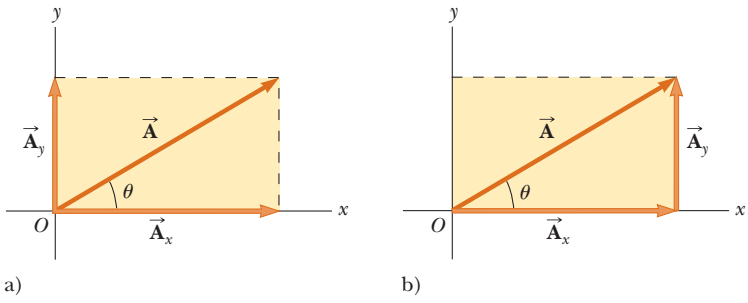

Figura 3.12 a) Un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano xy se representa mediante sus vectores componentes $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$. b) El vector componente y $\vec{\mathbf{A}}_y$ se puede mover hacia la derecha de modo que se sume a $\vec{\mathbf{A}}_x$. La suma vectorial de los vectores componentes es $\vec{\mathbf{A}}$. Estos tres vectores forman un triángulo rectángulo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.2

Vectores componentes con componentes

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}_x$ y $\vec{\mathbf{A}}_y$ son los *vectores componentes* de $\vec{\mathbf{A}}$. No debe confundirlos con las cantidades A_x y A_y, que siempre se referirán como las *componentes* de $\vec{\mathbf{A}}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.3

Componentes *x* y *y*

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 asocian el coseno del ángulo con la componente x y el seno del ángulo con la componente y. Tal asociación es verdadera *sólo* porque el ángulo θ se midió respecto del eje x, así que no memorice estas ecuaciones. Si θ se mide en relación con el eje y (como en algunos problemas), estas ecuaciones serán incorrectas. Piense acerca de cuál lado del triángulo, que contiene las componentes, es adyacente al ángulo y cuál lado es opuesto y luego asigne el coseno y el seno en concordancia.

y	
A_x negativo A_y positivo	A_x positivo A_y positivo
A_x negativo A_y negativo	A_x positivo A_y negativo

x

Figura 3.13 Los signos de las componentes de un vector dependen del cuadrante en el que se ubica el vector.

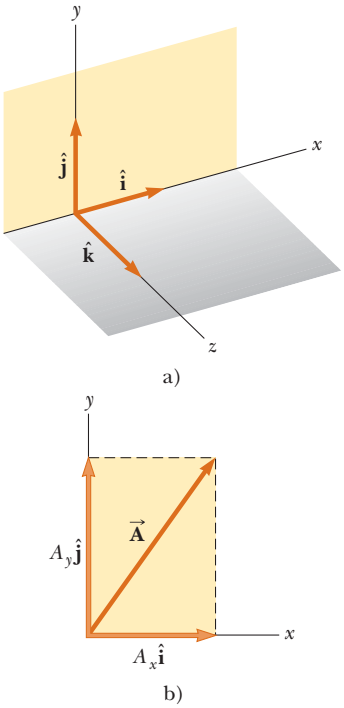

Figura 3.14 a) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ se dirigen a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente. b) El vector $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$ que se encuentra en el plano xy tiene componentes A_x y A_y.

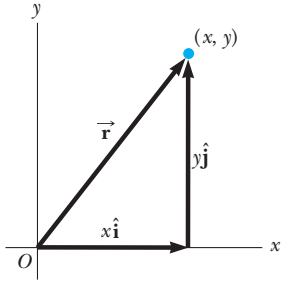

Figura 3.15 El punto cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) se representa mediante el vector posición $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.

Las magnitudes de estas componentes son las longitudes de los dos lados de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de longitud A. Debido a esto, la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$ se relacionan con sus componentes mediante las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.10}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{3.11}$$

Observe que **los signos de las componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ.** Por ejemplo, si $\theta = 120°$, A_x es negativa y A_y positiva. Si $\theta = 225°$, tanto A_x como A_y son negativas. La figura 3.13 resume los signos de las componentes cuando $\vec{\mathbf{A}}$ se encuentra en varios cuadrantes.

Cuando resuelva problemas, especifique un vector $\vec{\mathbf{A}}$ con sus componentes A_x y A_y o con su magnitud y dirección A y θ.

Suponga que trabaja un problema físico que requiere descomponer un vector en sus componentes. En muchas aplicaciones, es conveniente expresar las componentes en un sistema coordenado que tenga ejes que no sean horizontales ni verticales, pero que sean mutuamente perpendiculares. Por ejemplo, se considerará el movimiento de los objetos que se deslizan por planos inclinados. Para tales ejemplos, conviene orientar el eje x paralelo al plano y el eje y perpendicular al plano.

Pregunta rápida 3.4 Elija la respuesta correcta para hacer verdadera la oración: Una componente de un vector es a) siempre, b) nunca o c) a veces mayor que la magnitud del vector.

Vectores unitarios

Las cantidades vectoriales con frecuencia se expresan en términos de vectores unitarios. **Un vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1.** Los vectores unitarios se usan para especificar una dirección conocida y no tienen otro significado físico. Son útiles exclusivamente como una convención para describir una dirección en el espacio. Se usarán los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ para representar los vectores unitarios que apuntan en las direcciones x, y y z positivas, respectivamente. (Los "sombreros", o circunflejos, sobre los símbolos son una notación estándar para vectores unitarios.) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares en un sistema coordenado de mano derecha, como se muestra en la figura 3.14a. La magnitud de cada vector unitario es igual a 1; esto es, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$.

Considere un vector $\vec{\mathbf{A}}$ que se encuentra en el plano xy, como se muestra en la figura 3.14b. El producto de la componente A_x y el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es el vector componente $\vec{\mathbf{A}}_x = A_x\hat{\mathbf{i}}$, que se encuentra en el eje x y tiene magnitud $|A_x|$. Del mismo modo, $\vec{\mathbf{A}}_y = A_y\hat{\mathbf{j}}$ es el vector componente de magnitud $|A_y|$ que se encuentra en el eje y. Por tanto, la notación del vector unitario para el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.12}$$

Por ejemplo, considere un punto que se encuentra en el plano xy y tiene coordenadas cartesianas (x, y), como en la figura 3.15. El punto se especifica mediante el **vector posición** $\vec{\mathbf{r}}$, que en forma de vector unitario está dado por

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.13}$$

Esta notación indica que las componentes de $\vec{\mathbf{r}}$ son las coordenadas x y y.

Ahora, ¿cómo usar las componentes para sumar vectores cuando el método gráfico no es suficientemente preciso? Suponga que quiere sumar el vector $\vec{\mathbf{B}}$ al vector $\vec{\mathbf{A}}$ en la ecuación 3.12, donde el vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes B_x y B_y. Debido a la conveniencia contable de los vectores unitarios, todo lo que se hace es sumar las componentes x y y por separado. El vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x\hat{} + A_y\hat{}) + (B_x\hat{} + B_y\hat{})$$

o

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\,\hat{\mathbf{j}} \tag{3.14}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, se ve que las componentes del vector resultante son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \tag{3.15}$$

La magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y el ángulo que forma con el eje x de sus componentes se obtienen con las correspondencias

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \tag{3.16}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \tag{3.17}$$

Esta suma por componentes se comprueba con una construcción geométrica similar a la que se muestra en la figura 3.16. Recuerde los signos de las componentes cuando use el método algebraico o el gráfico.

En ocasiones es necesario considerar situaciones que implican movimiento en tres componentes de dirección. La extensión de los métodos a vectores tridimensionales es directa. Si $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen componentes x, y y z, se expresan en la forma

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.18}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.19}$$

La suma de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es

$$\vec{\mathbf{R}} = (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.20}$$

Distinga la ecuación 3.20 de la ecuación 3.14: en la ecuación 3.20, el vector resultante también tiene una componente z, $R_z = A_z + B_z$. Si un vector $\vec{\mathbf{R}}$ tiene componentes x, y y z, la magnitud del vector es $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. El ángulo θ_x que $\vec{\mathbf{R}}$ forma con el eje x se encuentra de la expresión $\theta_x = R_x/R$, con expresiones similares para los ángulos respecto de los ejes y y z.

Pregunta rápida 3.5 ¿Para cuáles de los siguientes vectores la magnitud del vector es igual a una de las componentes del vector? a) $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$, b) $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{j}}$, c) $\vec{\mathbf{C}} = +5\hat{\mathbf{k}}$.

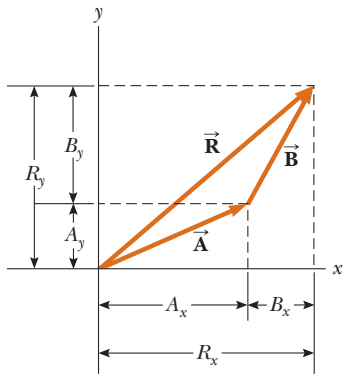

Figura 3.16 Esta construcción geométrica para la suma de dos vectores muestra la relación entre las componentes del resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y las componentes de los vectores individuales.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.4

Tangentes en calculadoras

La ecuación 3.17 involucra el cálculo de un ángulo mediante una función tangente. Por lo general, la función tangente inversa en las calculadoras proporciona un ángulo entre $-90°$ y $+90°$. En consecuencia, si el vector que estudia se encuentra en el segundo o tercer cuadrantes, el ángulo medido desde el eje x positivo será el ángulo que dé su calculadora más 180°.

EJEMPLO 3.3 La suma de dos vectores

Encuentre la suma de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se encuentran en el plano xy y está dada por

$$\vec{\mathbf{A}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{B}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0\hat{\mathbf{j}})\ \text{m}$$

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede formar conceptos de la situación al dibujar los vectores en papel gráfico.

Categorizar Clasifique este ejemplo como un simple problema de sustitución. Al comparar esta expresión para $\vec{\mathbf{A}}$ con la expresión general $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$, es claro que $A_x = 2.0$ m y $A_y = 2.0$ m. Del mismo modo, $B_x = 2.0$ m y $B_y = -4.0$ m.

Aplique la ecuación 3.14 para obtener el vector resultante $\vec{\mathbf{R}}$: $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (2.0 + 2.0)\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{m} + (2.0 - 4.0)\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m}$

Evalúe los componentes de $\vec{\mathbf{R}}$: $R_x = 4.0$ m $\qquad R_y = -2.0$ m

Aplique la ecuación 3.16 para encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0\text{ m})^2 + (-2.0\text{ m})^2} = \sqrt{20}\text{ m} = 4.5\text{ m}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ a partir de la ecuación 3.17:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0\text{ m}}{4.0\text{ m}} = -0.50$$

Es probable que su calculadora dé la respuesta $-27°$ para $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. Esta respuesta es correcta si se le interpreta como 27° en el sentido de las manecillas del reloj desde el eje x. La forma estándar es citar los ángulos medidos contra el sentido de las manecillas del reloj desde el eje $+x$, y que el ángulo para este vector es $\theta = 333°$

EJEMPLO 3.4 El desplazamiento resultante

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 = (15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}})$ cm, $\Delta\vec{\mathbf{r}}_2 = (23\hat{\mathbf{i}} + 14\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}})$ cm y $\Delta\vec{\mathbf{r}}_3 = (-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}})$ cm. Encuentre las componentes del desplazamiento resultante y su magnitud.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque x es suficiente para ubicar un punto en una dimensión, es necesario un vector $\vec{\mathbf{r}}$ para ubicar un punto en dos o tres dimensiones. La notación $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es una generalización del desplazamiento unidimensional Δx en la ecuación 2.1. Los desplazamientos tridimensionales son más difíciles de conceptualizar que los de dos dimensiones, porque éstos se pueden dibujar en papel.

Para este problema, imagine que traza con su lápiz, en un papel gráfico en el que ya dibujó los ejes x y y, el origen. Mueva su lápiz 15 cm a la derecha a lo largo del eje x, luego 30 cm hacia arriba a lo largo del eje y y luego 12 cm en dirección *perpendicular hacia usted*. Este procedimiento proporciona el desplazamiento descrito por $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1$. Desde este punto, mueva su lápiz 23 cm a la derecha, paralelo al eje x, luego 14 cm paralelo al papel en la dirección $-y$ y luego 5.0 cm en dirección perpendicular, alejándose de usted, hacia el papel. Ahora está en el desplazamiento desde el origen descrito por $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2$. Desde este punto, mueva su lápiz 13 cm a la izquierda en la dirección $-x$ y (¡finalmente!) 15 cm paralelo al papel gráfico, a lo largo del eje y. Su posición final está a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3$ desde el origen.

Categorizar A pesar de la difícil conceptualización en tres dimensiones, se puede clasificar este problema como un problema de sustitución debido a los cuidadosos métodos contables desarrollados para vectores. La manipulación matemática sigue la pista de este movimiento a lo largo de tres ejes perpendiculares en una forma organizada y compacta, como se aprecia a continuación.

Para encontrar el desplazamiento resultante y los tres vectores:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{\mathbf{r}} &= \Delta\vec{\mathbf{r}}_1 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2 + \Delta\vec{\mathbf{r}}_3\\ &= (15 + 23 - 13)\,\hat{\mathbf{i}}\text{ cm} + (30 - 14 + 15)\,\hat{\mathbf{j}}\text{ cm} + (12 - 5.0 + 0)\,\hat{\mathbf{k}}\text{ cm}\\ &= (25\hat{\mathbf{i}} + 31\hat{\mathbf{j}} + 7.0\hat{\mathbf{k}})\text{ cm}\end{aligned}$$

Encuentre la magnitud del vector resultante:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\\ &= \sqrt{(25\text{ cm})^2 + (31\text{ cm})^2 + (7.0\text{ cm})^2} = 40\text{ cm}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.5 De paseo

Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25.0 km hacia el sureste desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40.0 km en una dirección 60.0° al noreste, punto en el que descubre una torre de guardabosque.

A) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

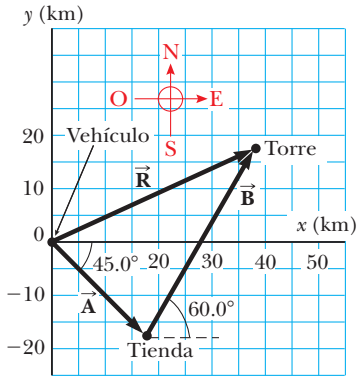

Figura 3.17 (Ejemplo 3.5) El desplazamiento total de la excursionista es el vector $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Forme conceptos del problema mediante el dibujo de un bosquejo como el de la figura 3.17. Si los vectores desplazamiento del primero y segundo días se denotan como $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, respectivamente, y se usa el vehículo como el origen de las coordenadas, se obtienen los vectores que se muestran en la figura 3.17.

Categorizar Al dibujar el resultante $\vec{\mathbf{R}}$, se clasifica este problema como uno que antes se resolvió: una suma de dos vectores. Ahora debe entender el poder de la categorización: muchos problemas nuevos son muy similares a problemas que ya se han resuelto, si se tiene cuidado al conceptualizarlos. Una vez dibujados los vectores desplazamiento y clasificado el problema, ya no se trata sólo de una excursionista, una caminata, un vehículo, una tienda o una torre. Es un problema acerca de suma vectorial, que ya ha resuelto.

Analizar El desplazamiento $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 25.0 km y se dirige 45.0° abajo del eje x positivo.

Encuentre las componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$A_x = A\cos(-45.0^\circ) = (25.0\text{ km})(0.707) = 17.7\text{ km}$$

$$A_y = A\,\text{sen}(-45.0^\circ) = (25.0\text{ km})(-0.707) = -17.7\text{ km}$$

El valor negativo de A_y indica que la excursionista camina en la dirección y negativa durante el primer día. Los signos de A_x y A_y también son evidentes en la figura 3.17.

Halle las componentes de $\vec{\mathbf{B}}$ con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$B_x = B\cos 60.0^\circ = (40.0\text{ km})(0.500) = 20.0\text{ km}$$

$$B_y = B\,\text{sen}\,60.0^\circ = (40.0\text{ km})(0.866) = 34.6\text{ km}$$

B) Determine las componentes del desplazamiento resultante de la excursionista $\vec{\mathbf{R}}$ para el viaje. Encuentre una expresión para $\vec{\mathbf{R}}$ en términos de vectores unitarios.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 3.15 para encontrar las componentes del desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7\text{ km} + 20.0\text{ km} = 37.7\text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7\text{ km} + 34.6\text{ km} = 16.9\text{ km}$$

Escriba el desplazamiento total en forma de vector unitario:

$$\vec{\mathbf{R}} = (37.7\hat{\mathbf{i}} + 16.9\hat{\mathbf{j}})\text{ km}$$

Finalizar Al observar la representación gráfica de la figura 3.17, se estima que la posición de la torre es aproximadamente (38 km, 17 km), que es consistente con las componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ en el resultado de la posición final de la excursionista. Además, ambas componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ son positivas, lo que coloca la posición final en el primer cuadrante del sistema coordenado, lo que también es consistente con la figura 3.17.

¿Qué pasaría si? Después de llegar a la torre, la excursionista quiere regresar a su vehículo a lo largo de una sola línea recta. ¿Cuáles son las componentes del vector que representa esta caminata? ¿Cuál debe ser la dirección de la caminata?

Respuesta El vector deseado $\vec{\mathbf{R}}_{\text{vehículo}}$ es el negativo del vector $\vec{\mathbf{R}}$:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{vehículo}} = -\vec{\mathbf{R}} = (-37.7\hat{\mathbf{i}} - 16.9\hat{\mathbf{j}})\text{ km}$$

La dirección se encuentra al calcular el ángulo que el vector forma con el eje x:

$$\tan\theta = \frac{R_{\text{vehículo},y}}{R_{\text{vehículo},x}} = \frac{-16.9\text{ km}}{-37.7\text{ km}} = 0.448$$

que da un ángulo de $\theta = 204.1^\circ$, o 24.1° al suroeste.

Resumen

DEFINICIONES

Las **cantidades escalares** son las que sólo tienen un valor numérico y no tienen dirección asociada. Las **cantidades vectoriales** tienen tanto magnitud como dirección y obedecen las leyes de la suma vectorial. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Cuando se suman dos o más vectores, deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. Se pueden sumar gráficamente dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En este método (figura 3.6), el vector resultante $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ corre del origen de $\vec{\mathbf{A}}$ a la punta de $\vec{\mathbf{B}}$.

Un segundo método de suma de vectores involucra las **componentes** de los vectores. La componente x A_x del vector $\vec{\mathbf{A}}$ es igual a la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje x de un sistema coordenado, donde $A_x = A \cos \theta$. La componente y A_y de $\vec{\mathbf{A}}$ es la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo del eje y, donde $A_y = A \operatorname{sen} \theta$.

Si un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una componente x A_x y una componente y A_y, el vector se expresa en forma de vector unitario como $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$. En esta notación, $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva y $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Puesto que $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$.

El resultante de dos o más vectores se encuentra al descomponer todos los vectores en sus componentes x y y, sumar sus componentes resultantes x y y, y luego usar el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud del vector resultante. Se puede encontrar el ángulo que forma el vector resultante respecto del eje x al usar una función trigonométrica adecuada.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Sí o no: ¿Cada una de las siguientes cantidades es un vector? a) fuerza, b) temperatura, c) el volumen de agua en una lata, d) las calificaciones de un programa de televisión, e) la altura de un edificio, f) la velocidad de un automóvil deportivo, g) la edad del Universo.
2. Un libro se mueve una vez alrededor del perímetro de una mesa con dimensiones 1.0 m × 2.0 m. Si el libro termina en su posición inicial, ¿cuál es su desplazamiento? ¿Cuál es la distancia recorrida?
3. **O** La figura P3.3 muestra dos vectores, $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$. ¿Cuál de las posibilidades de la a) a la d) es el vector $\vec{\mathbf{D}}_2 - 2\vec{\mathbf{D}}_1$, o e) no es ninguna de ellas?

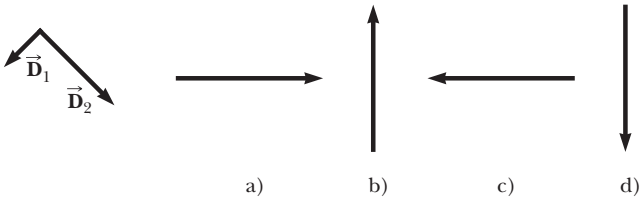

Figura P3.3

4. **O** La herramienta de corte en un torno está dada por dos desplazamientos, uno de 4 cm de magnitud y otro de 3 cm de magnitud, en cada una de las cinco situaciones de la a) a la e), diagramadas en la figura P3.4. Ordene estas situaciones de acuerdo con la magnitud del desplazamiento total de la herramienta, poniendo primero la situación con la mayor magnitud resultante. Si el desplazamiento total es del mismo tamaño en dos situaciones, dé a dichas letras igual disposición.

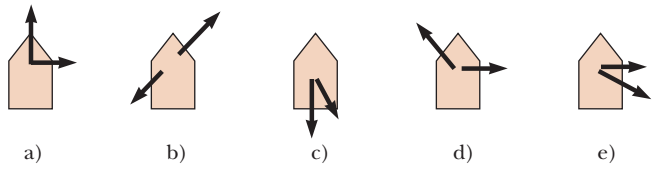

Figura P3.4

5. **O** Sea $\vec{\mathbf{A}}$ la representación de un vector velocidad que apunta desde el origen en el segundo cuadrante. a) ¿Su componente x es positiva, negativa o cero? b) ¿Su componente y es positiva, negativa o cero? Sea $\vec{\mathbf{B}}$ la representación de un vector veloci-

dad que apunta desde el origen en el cuarto cuadrante. c) ¿Su componente x es positiva, negativa o cero? d) ¿Su componente y es positiva, negativa o cero? e) Considere el vector $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$. ¿Qué concluye acerca de los cuadrantes en los que puede o no estar? f) Ahora considere el vector $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$. ¿Qué concluye acerca de los cuadrantes en los que puede o no estar?

6. **O i)** ¿Cuál es la magnitud del vector $(10\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{k}})$ m/s) a) 0, b) 10 m/s, c) −10 m/s, d) 10, e) −10, f) 14.1 m/s, g) indefinido. **ii)** ¿Cuál es la componente y de este vector? (Elija de entre las mismas respuestas.)

7. **O** Un submarino se sumerge desde la superficie del agua en un ángulo de 30° bajo la horizontal, siguiendo una trayectoria recta de 50 m de largo. ¿Por tanto, a qué distancia está el submarino de la superficie del agua? a) 50 m, b) sen 30°, c) cos 30°, d) tan 30°, e) (50 m)/sen 30°, f) (50 m)/cos 30°, g) (50 m)/tan 30°, h) (50 m) sen 30°, i) (50 m)cos 30°, j) (50 m)tan 30°, k) (sen 30°)/50 m, l) (cos 30°)/50 m, m) (tan 30°)/50 m, n) 30 m, o) 0, p) ninguna de estas respuestas.

8. **O i)** ¿Cuál es la componente x del vector que se muestra en la figura P3.8? a) 1 cm, b) 2 cm, c) 3 cm, d) 4 cm, e) 6 cm, f) −1 cm, g) −2 cm, h) −3 cm, i) −4 cm, j) −6 cm, k) ninguna de estas respuestas. **ii)** ¿Cuál es la componente y de este vector? (Elija de entre las mismas respuestas.)

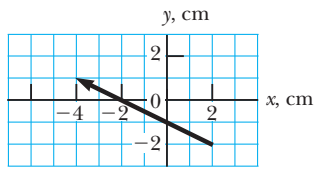

Figura P3.8

9. **O** El vector $\vec{\mathbf{A}}$ se encuentra en el plano xy. **i)** ¿Sus dos componentes serán negativas si se encuentra en cuál(es) cuadrante(s)? elija todo lo que aplique. a) el primer cuadrante, b) el segundo cuadrante, c) el tercer cuadrante, d) el cuarto cuadrante. **ii)** ¿Hacia qué orientación sus componentes tendrán signos opuestos? Elija de entre las mismas posibilidades.

10. Si el componente del vector $\vec{\mathbf{A}}$ a lo largo de la dirección del vector $\vec{\mathbf{B}}$ es cero, ¿qué puede concluir acerca de los dos vectores?

11. ¿La magnitud de un vector puede tener un valor negativo? Explique.

12. ¿Es posible sumar una cantidad vectorial a una cantidad escalar? Explique.

Problemas

Sección 3.1 Sistemas coordenados

1. Las coordenadas polares de un punto son $r = 5.50$ m y $\theta = 240°$. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

2. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares (2.50 m, 30.0°) y (3.80 m, 120.0°). Determine a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y b) la distancia entre ellos.

3. Una mosca aterriza en la pared de una habitación. La esquina inferior izquierda de la pared se selecciona como el origen de un sistema coordenado cartesiano bidimensional. Si la mosca se ubica en el punto que tiene coordenadas (2.00, 1.00) m, a) ¿A qué distancia está de la esquina de la habitación? b) ¿Cuál es su posición en coordenadas polares?

4. Las coordenadas rectangulares de un punto están dadas por $(2, y)$, y sus coordenadas polares son $(r, 30°)$. Determine y y r.

5. Sean (r, θ) las coordenadas polares del punto (x, y). Determine las coordenadas polares para los puntos a) $(-x, y)$, b) $(-2x, -2y)$ y c) $(3x, -3y)$.

Sección 3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Sección 3.3 Algunas propiedades de los vectores

6. Un avión vuela desde el campo base al lago A, a 280 km de distancia en la dirección 20.0° al noreste. Después de soltar suministros vuela al lago B, que está a 190 km a 30.0° al noroeste del lago A. Determine gráficamente la distancia y dirección desde el lago B al campo base.

7. Una topógrafa mide la distancia a través de un río recto con el siguiente método: partiendo directamente a través de un árbol en la orilla opuesta, camina 100 m a lo largo del margen del río para establecer una línea base. Luego observa hacia el árbol. El ángulo de su línea base al árbol es de 35.0°. ¿Qué tan ancho es el río?

8. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ de 6.00 unidades de magnitud actúa sobre un objeto en el origen en una dirección 30.0° sobre el eje x positivo. Una segunda fuerza $\vec{\mathbf{F}}_2$ de 5.00 unidades de magnitud actúa sobre el objeto en la dirección del eje y positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2$.

9. Un patinador se desliza a lo largo de una trayectoria circular de 5.00 m de radio. Si realiza medio círculo, encuentre a) la magnitud del vector desplazamiento y b) que distancia ha patinado. c) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento si patina alrededor de todo el círculo?

10. Defina arbitrariamente el "vector instantáneo altura" de una persona como el vector desplazamiento desde el punto medio entre sus pies y lo alto de su cabeza. Realice una estimación del orden de magnitud del vector total altura de todas las personas en una ciudad de 100 000 habitantes a) a las 10 en punto de la mañana del martes y b) a las 5 en punto de la mañana del sábado. Explique sus razonamientos.

11. Cada uno de los vectores desplazamientos $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se muestran en la figura P3.11 tiene una magnitud de 3.00 m. Encuentre gráficamente a) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, b) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, c) $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$ y d) $\vec{\mathbf{A}} - 2\vec{\mathbf{B}}$. Reporte todos los ángulos en sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x positivo.

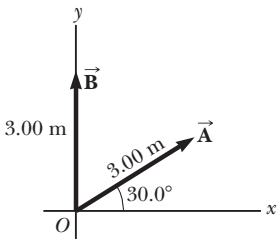

Figura P3.11 Problemas 11 y 32.

12. ● Tres desplazamientos son $\vec{A}$ = 200 m al sur, $\vec{B}$ = 250 m al oeste y $\vec{C}$ = 150 m a 30.0° al noreste. Construya un diagrama separado para cada una de las siguientes posibles formas de sumar estos vectores: $\vec{R}_1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$; $\vec{R}_2 = \vec{B} + \vec{C} + \vec{A}$; $\vec{R}_3 = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A}$. Explique qué puede concluir al comparar los diagramas.

13. Un carro de montaña rusa se mueve 200 pies horizontalmente y luego se eleva 135 pies a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. A continuación viaja 135 pies a un ángulo de 40.0° hacia abajo. ¿Cuál es su desplazamiento desde su punto de partida? Use técnicas gráficas.

14. ● Un comprador que empuja un carrito a lo largo de una tienda se mueve 40.0 m por un pasillo, luego da una vuelta de 90.0° y se mueve 15.0 m. Luego da otra vuelta de 90.0° y se mueve 20.0 m. a) ¿A qué distancia está el comprador de su posición original? b) ¿Qué ángulo forma su desplazamiento total con su dirección original? Advierta que no se especificó si el comprador da vuelta a derecha o izquierda. Explique cuántas respuestas son posibles para los incisos a) y b) y dé las posibles respuestas.

Sección 3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

15. Un vector tiene una componente x de −25.0 unidades y otra componente y de 40.0 unidades. Encuentre la magnitud y dirección de este vector.

16. Una persona camina 25.0° al noreste durante 3.10 km. ¿Qué distancia tendría que caminar hacia el norte y hacia el este para llegar a la misma posición?

17. ● Una minivan viaja recto al norte en el carril derecho de una autopista a 28.0 m/s. Un camper pasa a la minivan y luego cambia del carril izquierdo al derecho. Mientras lo hace, la trayectoria del camper sobre el camino es un desplazamiento recto a 8.50° al noreste. Para evitar chocar con la minivan, la distancia norte–sur entre la defensa trasera del camper y la defensa delantera de la minivan no deben disminuir. ¿El camper puede conducirse para satisfacer este requisito? Explique su respuesta.

18. Una chica que entrega periódicos cubre su ruta al viajar 3.00 cuadras al oeste, 4.00 cuadras al norte y luego 6.00 cuadras al este. a) ¿Cuál es su desplazamiento resultante? b) ¿Cuál es la distancia total que recorre?

19. Obtenga expresiones en forma de componentes para los vectores de posición que tienen las siguientes coordenadas polares: a) 12.8 m, 150°, b) 3.30 cm, 60.0°, c) 22.0 pulg, 215°.

20. Un vector desplazamiento que se encuentra en el plano xy tiene una magnitud de 50.0 m y se dirige en un ángulo de 120° al eje x positivo. ¿Cuáles son las componentes rectangulares de este vector?

21. Mientras explora una cueva, un espeleólogo comienza en la entrada y se mueve las siguientes distancias. Va 75.0 m al norte, 250 m al este, 125 m a un ángulo de 30.0° al noreste y 150 m al sur. Encuentre su desplazamiento resultante desde la entrada de la cueva.

22. Un mapa sugiere que Atlanta está a 730 millas en una dirección de 5.00° al noreste desde Dallas. El mismo mapa muestra que Chicago está a 560 millas en una dirección de 21.0° al noroeste desde Atlanta. Represente la Tierra como plana y use esta información para encontrar el desplazamiento de Dallas a Chicago.

23. Un hombre que empuja una podadora por el suelo hace que experimente dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120° con el eje x positivo. El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35.0° con el eje x positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

24. Dados los vectores $\vec{A} = 2.00\hat{i} + 6.00\hat{j}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{i} - 2.00\hat{j}$, a) dibuje la suma vectorial $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y la diferencia vectorial $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. b) Calcule $\vec{C}$ y $\vec{D}$, primero en términos de vectores unitarios y luego en términos de coordenadas polares, con ángulos medidos respecto del eje $+x$.

25. Considere los dos vectores $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j}$. Calcule a) $\vec{A} + \vec{B}$, b) $\vec{A} - \vec{B}$, c) $|\vec{A} + \vec{B}|$, d) $|\vec{A} - \vec{B}|$, y e) las direcciones de $\vec{A} + \vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$.

26. Una pendiente de esquiar cubierta de nieve forma un ángulo de 35.0° con la horizontal. Cuando un esquiador cae a plomo por la colina, una porción de nieve salpicada se proyecta a una posición máxima de 5.00 m a 20.0° de la vertical en dirección arriba de la colina, como se muestra en la figura P3.26. Encuentre las componentes de su posición máxima a) paralela a la superficie y b) perpendicular a la superficie.

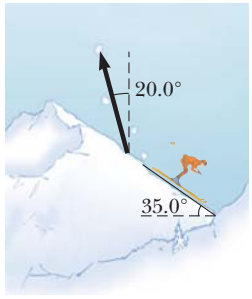

Figura P3.26

27. Una partícula se somete a los siguientes desplazamientos consecutivos: 3.50 m al sur, 8.20 m al noreste y 15.0 m al oeste. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

28. En un juego de futbol americano, un mariscal de campo toma el balón desde la línea de golpeo, corre hacia atrás una distancia de 10.0 yardas y luego corre de manera lateral paralelo a la línea de golpeo 15.0 yardas. En este punto, lanza un pase recto hacia adelante 50.0 yardas perpendicular a la línea de golpeo. ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento resultante del balón?

29. Un golfista novato necesita tres golpes para meter la bola. Los desplazamientos sucesivos de la bola son: 4.00 m al norte,

2.00 m al noreste y 1.00 m a 30.0° al suroeste. Si parte del mismo punto inicial, ¿cuál sería el desplazamiento más sencillo que un golfista experto necesitaría para hacer el hoyo?

30. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes x y y de −8.70 cm y 15.0 cm, respectivamente; el vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes x y y de 13.2 cm y −6.60 cm, respectivamente. Si $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + 3\vec{\mathbf{C}} = 0$, ¿cuáles son las componentes de $\vec{\mathbf{C}}$?

31. La vista desde el helicóptero en la figura P3.31 muestra a dos personas jalando una mula terca. Encuentre a) la fuerza única que es equivalente a las dos fuerzas que se muestran y b) la fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para hacer la fuerza resultante igual a cero. Las fuerzas se miden en unidades de newtons (representada por N).

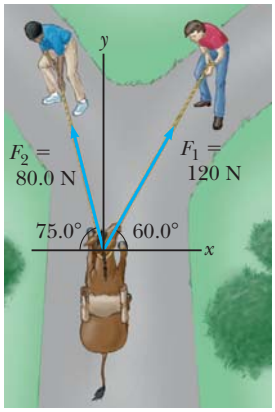

Figura P3.31

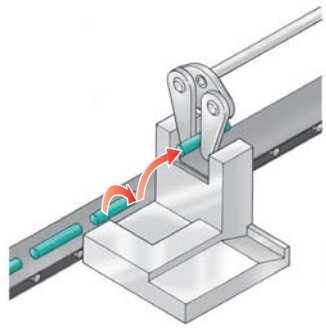

Figura P3.36

32. Use el método de componentes para sumar los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se muestran en la figura P3.11. Exprese la resultante $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ en notación de vector unitario.

33. El vector $\vec{\mathbf{B}}$ tiene componentes x, y y z de 4.00, 6.00 y 3.00 unidades, respectivamente. Calcule la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y los ángulos que $\vec{\mathbf{B}}$ forma con los ejes coordenados.

34. Considere los tres vectores desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})$ m, $\vec{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$ m y $\vec{\mathbf{C}} = (-2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}})$ m. Use el método de componentes para determinar a) la magnitud y dirección del vector $\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$ y b) la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$.

35. Dados los vectores desplazamiento $\vec{\mathbf{A}} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}})$ m y $\vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}})$ m, encuentre las magnitudes de los vectores a) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ y b) $\vec{\mathbf{D}} = 2\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, y también exprese cada uno en términos de sus componentes rectangulares.

36. En la operación de ensamblado que se ilustra en la figura P3.36, un robot primero mueve un objeto en recta hacia arriba con esto también al este, alrededor de un arco que forma un cuarto de círculo de 4.80 cm de radio que se encuentra en un plano vertical este–oeste. Luego el robot mueve el objeto hacia arriba y al norte, a través de un cuarto de círculo de 3.70 cm de radio que se encuentra en un plano vertical norte–sur. Encuentre a) la magnitud del desplazamiento total del objeto y b) el ángulo que el desplazamiento total forma con la vertical.

37. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene componentes x, y y z de 8.00, 12.0 y −4.00 unidades, respectivamente. a) Escriba una expresión vectorial para $\vec{\mathbf{A}}$ en notación de vector unitario. b) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector $\vec{\mathbf{B}}$ de un cuarto de longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ que apunte en la misma dirección que $\vec{\mathbf{A}}$. c) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector $\vec{\mathbf{C}}$ tres veces la longitud de $\vec{\mathbf{A}}$ que apunte en la dirección opuesta a la dirección de $\vec{\mathbf{A}}$.

38. Usted está de pie sobre el suelo en el origen de un sistema coordenado. Un avión vuela sobre usted con velocidad constante paralela al eje x y a una altura fija de 7.60×10^3 m. En el tiempo $t = 0$ el avión está directamente arriba de usted de modo que el vector que va de usted a él es $\vec{\mathbf{P}}_0 = (7.60 \times 10^3 \text{ m})\,\hat{\mathbf{j}}$. En $t = 30.0$ s, el vector de posición que va de usted al avión es $\vec{\mathbf{P}}_{30} = (8.04 \times 10^3 \text{ m})\,\hat{\mathbf{i}} + (7.60 \times 10^3 \text{ m})\,\hat{\mathbf{j}}$. Determine la magnitud y orientación del vector de posición del avión en $t = 45.0$ s.

39. Una estación de radar ubica un barco hundido en un intervalo de 17.3 km y orientación 136° en sentido de las manecillas del reloj desde el norte. Desde la misma estación, un avión de rescate está en un intervalo horizontal de 19.6 km, 153° en sentido de las manecillas del reloj desde el norte, con elevación de 2.20 km. a) Escriba el vector de posición para el barco en relación con el avión, con $\hat{\mathbf{i}}$ que representa el este, $\hat{\mathbf{j}}$ el norte y $\hat{\mathbf{k}}$ hacia arriba. b) ¿Qué tan separados están el avión y el barco?

40. a) El vector $\vec{\mathbf{E}}$ tiene 17.0 cm de magnitud y se dirige 27.0° contra las manecillas el reloj desde el eje $+x$. Expréselo en notación de vectores unitarios. b) El vector $\vec{\mathbf{F}}$ tiene 17.0 cm de magnitud y se dirige 27.0° contra las manecillas del reloj desde el eje $+y$. Expréselo en notación de vectores unitarios. c) El vector $\vec{\mathbf{G}}$ tiene 17.0 cm de magnitud y se dirige 27.0° en sentido de las manecillas del reloj desde el eje $-y$. Expréselo en notación de vectores unitarios.

41. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene un componente x negativo de 3.00 unidades de longitud y un componente y positivo de 2.00 unidades de longitud. a) Determine una expresión para $\vec{\mathbf{A}}$ en notación de vectores unitarios. b) Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{A}}$. c) ¿Qué vector $\vec{\mathbf{B}}$, cuando se suma a $\vec{\mathbf{A}}$, da un vector resultante sin componente x y una componente y negativa de 4.00 unidades de longitud?

42. Conforme pasa sobre la isla Gran Bahamas, el ojo de un huracán se mueve en una dirección 60.0° al noroeste con una rapidez de 41.0 km/h. Tres horas después el curso del huracán cambia súbitamente al norte y su rapidez baja a 25.0 km/h. ¿A qué distancia de Gran Bahamas está el ojo 4.50 h después de que pasa sobre la isla?

43. En la figura P3.43 se muestran tres vectores desplazamiento de una pelota de croquet, donde $|\vec{\mathbf{A}}| = 20.0$ unidades, $|\vec{\mathbf{B}}| = 40.0$ unidades y $|\vec{\mathbf{C}}| = 30.0$ unidades. Encuentre a) el resultante en

notación de vectores unitarios y b) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante.

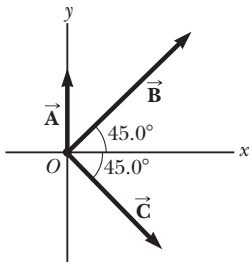

Figura P3.43

44. ● a) Con $\vec{\mathbf{A}} = (6.00\,\hat{\mathbf{i}} - 8.00\,\hat{\mathbf{j}})$ unidades, $\vec{\mathbf{B}} = (-8.00\,\hat{\mathbf{i}} + 3.00\,\hat{\mathbf{j}})$ unidades y $\vec{\mathbf{C}} = (26.0\,\hat{\mathbf{i}} + 19.0\,\hat{\mathbf{j}})$ unidades, determine a y b tal que $a\vec{\mathbf{A}} + b\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$. b) Un estudiante aprendió que una sola ecuación no se puede resolver para determinar valores para más de una incógnita en ella. ¿Cómo podría explicarle que tanto a como b se pueden determinar a partir de la ecuación que se usó en el inciso a)?

45. ● *¿Todavía está ahí?* En la figura P3.45, el segmento de línea representa una trayectoria desde el punto con vector de posición $(5\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\hat{\mathbf{j}})$ m al punto con posición $(16\,\hat{\mathbf{i}} + 12\,\hat{\mathbf{j}})$ m. El punto A está en dicha trayectoria, a una fracción f del camino hacia el destino. a) Encuentre el vector de posición del punto A en términos de f. b) Evalúe la expresión del inciso a) en el caso $f = 0$. Explique si el resultado es razonable. c) Evalúe la expresión para $f = 1$. Explique si el resultado es razonable.

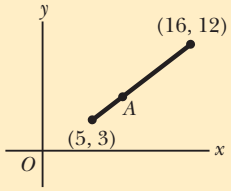

Figura P3.45 El punto A está a una fracción f de la distancia desde el punto inicial (5, 3) al punto final (16, 12).

Problemas adicionales

46. El 1 de diciembre de 1955, Rosa Parks (1913–2005), un icono del inicio del movimiento de los derechos civiles, permaneció sentada en su asiento de autobús cuando un hombre blanco la demandó. La policía de Montgomery, Alabama, la arrestó. El 5 de diciembre, los afroamericanos comenzaron a rechazar el uso de todos los autobuses de la ciudad. Bajo el liderazgo de la Montgomery Improvement Association, surgió de inmediato un eficiente sistema de transporte alternativo, proporcionado por afroamericanos con aproximadamente 35 000 viajes por día mediante voluntarios, taxis privados, uso compartido del automóvil y de viajes. Los autobuses permanecieron vacíos hasta que se integraron bajo orden de la corte del 21 de diciembre de 1956. Al recoger a sus pasajeros, suponga que un conductor en el centro de Montgomery pasa por cuatro desplazamientos sucesivos representados por la expresión

$$(-6.30b)\,\hat{\mathbf{i}} - (4.00b\cos 40°)\,\hat{\mathbf{i}} - (4.00b\,\text{sen}\,40°)\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$+ (3.00b\cos 50°)\,\hat{\mathbf{i}} - (3.00b\,\text{sen}\,50°)\,\hat{\mathbf{j}} - (5.00b)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Aquí b representa una cuadra de la ciudad, una conveniente unidad de distancia de tamaño uniforme; $\hat{\mathbf{i}}$ es este y $\hat{\mathbf{j}}$ es norte. a) Dibuje un mapa de los desplazamientos sucesivos. b) ¿Qué distancia total recorrió? c) Calcule la magnitud y dirección de su desplazamiento total. La estructura lógica de este problema y de muchos problemas en capítulos posteriores la sugirieron Alan van Heuvelen y David Maloney, *American Journal of Physics*, **67**(3) pp. 252–256, marzo de 1999.

47. Dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ sea 100 veces mayor que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

48. Dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ sea mayor que la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ por el factor n, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

49. Un controlador de tráfico aéreo observa dos aeronaves en la pantalla de su radar. La primera está a una altitud de 800 m, 19.2 km de distancia horizontal y 25.0° al suroeste. La segunda está a una altitud de 1 100 m, 17.6 km de distancia horizontal y 20.0° al suroeste. ¿Cuál es la distancia entre las dos aeronaves? (Coloque el eje x al oeste, el eje y al sur y el eje z vertical.)

50. El animal de peluche más grande del mundo es una víbora de 420 m de largo, construida por niños noruegos. Suponga que la víbora se encuentra en un parque, como se muestra en la figura P3.50, y forma dos lados rectos de un ángulo de 105°, con un lado de 240 m de largo. Olaf e Inge corren una competencia que inventan. Inge corre directamente desde la cola de la víbora a su cabeza, y Olaf parte del mismo lugar en el mismo momento pero corre a lo largo de la víbora. Si ambos niños corren uniformemente a 12.0 km/h, ¿cuánto tiempo antes que Olaf, Inge llega a la cabeza de la víbora?

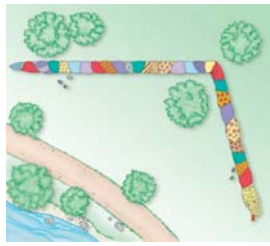

Figura P3.50

51. Un barco transbordador lleva turistas entre tres islas. Navega de la primera isla a la segunda isla, a 4.76 km de distancia, en una dirección 37.0° al noreste. Luego navega de la segunda isla a la tercera en una dirección de 69.0° al noroeste. Por último, regresa a la primera isla y navega en una dirección 28.0° al sureste. Calcule la distancia entre a) la segunda y tercera islas y b) la primera y tercera islas.

52. Un vector está dado por $\vec{\mathbf{R}} = 2\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\,\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre a) las magnitudes de los componentes x, y y z, b) la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y c) los ángulos entre $\vec{\mathbf{R}}$ y los ejes x, y y z.

53. Un avión jet, que al inicio se mueve a 300 mi/h al este, súbitamente entra a una región donde el viento sopla a 100 mi/h hacia la dirección de 30.0° al noreste. ¿Cuáles son la nueva rapidez y dirección del avión en relación con el nivel de la tierra?

54. ● Sea $\vec{\mathbf{A}}$ = 60.0 cm a 270° medido desde la horizontal. Sea $\vec{\mathbf{B}}$ = 80.0 cm a cierto ángulo θ. a) Encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ como función de θ. b) De la respuesta del inciso a), ¿para qué valor de θ $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ toma su valor máximo? ¿Cuál es dicho valor máximo? c) A partir de la respuesta del inciso a), ¿para qué valor de θ $|\vec{\mathbf{A}}| + |\vec{\mathbf{B}}|$ toma su valor mínimo? ¿Cuál es

este valor mínimo? d) Sin referencia a la respuesta del inciso a), argumente si las respuestas a los incisos b) y c) tienen o no sentido.

55. Después de que una pelota rueda por el borde de una mesa horizontal en el tiempo $t = 0$, su velocidad como función del tiempo se conoce por

$$\vec{\mathbf{v}} = 1.2\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s} - 9.8t\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

El desplazamiento de la bola al caer del borde de la mesa, mientras el intervalo de tiempo de 0.380 s durante el cual está en vuelo, se proporciona por

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{0.380\ \text{s}} \vec{\mathbf{v}}\, dt$$

Para realizar la integral, puede usar el teorema del cálculo

$$\int (A + Bf(x))\, dx = \int A\, dx + B\int f(x)\, dx$$

Considere las unidades y los vectores unitarios como constantes, representados por A y B. Haga la integración para calcular el desplazamiento de la pelota.

56. ● Encuentre la suma de estas cuatro fuerzas vectoriales: 12.0 N a la derecha a 35.0° sobre la horizontal, 31.0 N a la izquierda a 55.0° arriba de la horizontal, 8.40 N a la izquierda a 35.0° abajo de la horizontal y 24.0 N a la derecha a 55.0° abajo de la horizontal. Siga estos pasos. Como guía haga un bosquejo de esta situación, explique cómo puede simplificar los cálculos al realizar una elección particular para las direcciones de los ejes x y y. ¿Cuál es su elección? Después sume los vectores por el método de componentes.

57. Una persona que sale a caminar sigue la trayectoria que se muestra en la figura P3.57. El viaje total consiste en cuatro trayectorias en línea recta. Al final de la caminata, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona, medido desde el punto de partida?

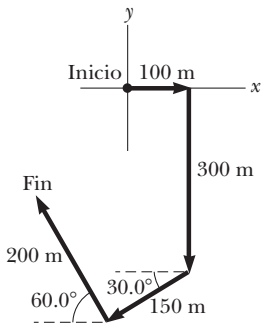

Figura P3.57

58. ● La posición instantánea de un objeto se especifica por su vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ dirigido desde un origen fijo a la posición del objeto, representado como partícula. Suponga para cierto objeto que el vector de posición es una función de tiempo dado por $\vec{\mathbf{r}} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 2t\hat{\mathbf{k}}$, donde r está en metros y t en segundos. Evalúe $d\mathbf{r}/dt$. ¿Qué representa respecto al objeto?

59. ● Long John Silver, un pirata, enterró su tesoro en una isla con cinco árboles, ubicados en los puntos (30.0 m, −20.0 m), (60.0 m, 80.0 m), (−10 m, −10 m), (40.0 m, −30.0 m) y (−70.0 m, 60.0 m), todos medidos en relación con algún origen, como se muestra en la figura P3.59. La bitácora del barco indica comenzar en el árbol A y moverse hacia el árbol B, pero sólo cubrir la mitad de la distancia entre A y B. Luego moverse hacia el árbol C, cubrir un tercio de la distancia entre su ubicación actual y C. A continuación debe moverse hacia el árbol D y cubrir un cuarto de la distancia entre donde está y D. Por último, moverse hacia el árbol E y cubrir un quinto de la distancia entre usted y E, detenerse y cavar. a) Suponga que determinó correctamente el orden en que el pirata etiquetó los árboles como A, B, C, D y E, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde está enterrado su tesoro? b) **¿Qué pasaría si?,** ¿Y si no sabe la forma en que el pirata marcó los árboles? ¿Qué ocurriría con la respuesta si reordena los árboles, por ejemplo a B(30 m, −20 m), A(60 m, 80 m), E(−10 m, −10 m), C(40 m, −30 m) y D(−70 m, 60 m)? Establezca su razonamiento para mostrar que la respuesta no depende del orden en el que los árboles se marcaron.

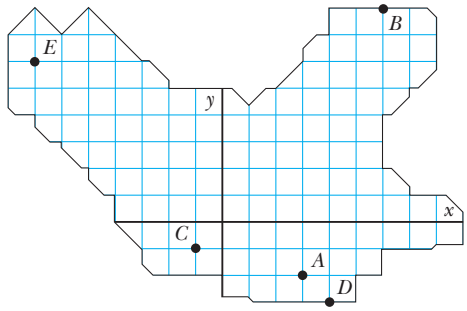

Figura P3.59

60. ● Considere un juego en el que N niños se colocan a distancias iguales alrededor de un círculo. En el centro del círculo hay una llanta de hule. Cada niño sostiene una cuerda unida a la llanta y, a una señal, jalan su cuerda. Todos los niños ejercen fuerzas de la misma magnitud F. En el caso $N = 2$, es fácil ver que la fuerza neta sobre la llanta será cero porque los dos vectores fuerza dirigidos en sentidos opuestos suman cero. De igual modo, si $N = 4$, 6 o cualquier entero par, la fuerza resultante sobre la llanta debe ser cero porque las fuerzas ejercidas por cada par de niños ubicados en posiciones opuestas se cancelarán. Cuando alrededor del círculo hay un número impar de niños, no es tan obvio si la fuerza total sobre la llanta central será cero. a) Calcule la fuerza neta sobre la llanta en el caso $N = 3$ al sumar las componentes de los tres vectores fuerza. Elija el eje x sobre una de las cuerdas. b) **¿Qué pasaría si?** Establezca el razonamiento que determinará la fuerza neta para el caso general donde N es cualquier entero, par o impar, mayor que uno. Proceda del modo siguiente. Suponga que la fuerza total no es cero. Luego debe apuntar en alguna dirección particular. Haga que cada niño se mueva una posición en sentido de las manecillas del reloj. Dé una razón de que la fuerza total debe tener una dirección girada en sentido de las manecillas del reloj por $360°/N$. No obstante argumente que la fuerza total debe ser la misma que antes. Explique qué prueba la contradicción acerca de la magnitud de la fuerza. Este problema ilustra una técnica muy útil de probar un resultado "por simetría", al usar un poco de matemáticas de *teoría de grupos*. La situación particular en realidad se encuentra en física y química cuando

un arreglo de cargas eléctricas (iones) ejerce fuerzas eléctricas sobre un átomo en una posición central en una molécula o en un cristal.

61. Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ tienen iguales magnitudes de 5.00. La suma de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es el vector $6.00\,\hat{\mathbf{j}}$. Determine el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

62. Un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a, b y c como se muestra en la figura P3.62. a) Obtenga una expresión vectorial para el vector de la cara diagonal $\vec{\mathbf{R}}_1$. ¿Cuál es la magnitud de este vector? b) Obtenga una expresión vectorial para el vector de cuerpo diagonal $\vec{\mathbf{R}}_2$. Advierta que $\vec{\mathbf{R}}_1$, $c\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{R}}_2$ forman un triángulo rectángulo. Pruebe que la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}_2$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

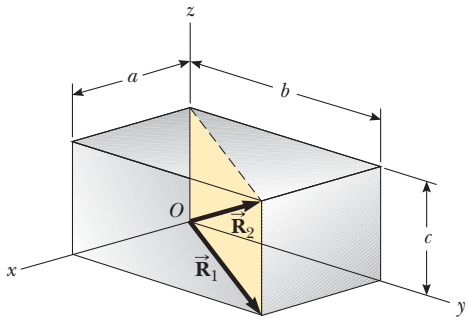

Figura P3.62

Respuestas a preguntas rápidas

3.1 Escalares: a), d), e). Ninguna de estas cantidades tiene una dirección. Vectores: b), c). Para estas cantidades, es necesaria la dirección para especificar completamente la cantidad.

3.2 c). El resultante tiene su magnitud máxima $A + B = 12 + 8 = 20$ unidades cuando el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se orienta en la misma dirección que el vector $\vec{\mathbf{B}}$. El vector resultante tiene su magnitud mínima $A - B = 12 - 8 = 4$ unidades cuando el vector $\vec{\mathbf{A}}$ se orienta en la dirección opuesta al vector $\vec{\mathbf{B}}$.

3.3 b) y c). Para que sumen cero, los vectores deben apuntar en direcciones opuestas y tener la misma magnitud.

3.4 b). Del teorema de Pitágoras, la magnitud de un vector siempre es mayor que el valor absoluto de cada componente, a menos que sólo haya un componente distinto de cero, en cuyo caso la magnitud del vector es igual al valor absoluto de dicho componente.

3.5 c). La magnitud de $\vec{\mathbf{C}}$ es 5 unidades, la misma que la componente z. La respuesta b) no es correcta porque la magnitud de cualquier vector siempre es un número positivo, mientras que la componente y de $\vec{\mathbf{B}}$ es negativa.