En los edificios altos para reducir el bamboleo debido al viento, se colocan amortiguadores ajustados a resonancia cerca de lo alto del edificio. Estos mecanismos incluyen un objeto de gran masa que oscila bajo control de computadora con la misma frecuencia que los edificios, lo que reduce el bamboleo. La gran esfera, en la fotografía de la izquierda, es parte del sistema amortiguador ajustado a resonancia del edificio, en la fotografía de la derecha, llamado Taipei 101, en Taiwán. El edificio, también llamado Taipei Financial Center, se concluyó en 2004, año en el que tenía el récord como el edificio más alto del mundo (izquierda, Cortesía de Motioneering, Inc.; derecha, © Simon Kwang/Reuters/CORBIS).

15 Movimiento oscilatorio

En el *movimiento periódico* el objeto regresa regularmente a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. Al reflexionar es posible identificar muchas clases de movimiento periódico en la vida cotidiana. Su automóvil regresa al camino cada tarde. Usted regresa a la mesa del comedor cada noche para cenar. Si empuja un candelabro lo balancea de atrás para adelante, y regresa a la misma posición con una rapidez uniforme. La Tierra regresa a la misma posición en su órbita alrededor del Sol cada año, lo que resulta en la variación entre las cuatro estaciones.

Además de estos ejemplos cotidianos, muchos otros sistemas exhiben movimiento periódico. Las moléculas en un sólido oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio; las ondas electromagnéticas, como las ondas de luz, radar y ondas de radio, se caracterizan por vectores de campos eléctrico y magnético oscilatorios; y los circuitos eléctricos de corriente alterna, voltaje, corriente y carga eléctrica varían periódicamente con el tiempo.

Una clase especial de movimiento periódico se presenta en sistemas mecánicos cuando la fuerza que actúa en un objeto es proporcional a la posición del objeto relativo con alguna posición de equilibrio. Si esta fuerza siempre se dirige hacia la posición de equilibrio, el movimiento se llama *movimiento armónico simple*, que es el punto central de interés de este capítulo.

15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Como un modelo de movimiento armónico simple considere un bloque de masa m unido al extremo de un resorte, con el bloque libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción (figura 15.1). Cuando el resorte no está estirado ni comprimido, el bloque queda en reposo, en la posición llamada **posición de equilibrio** del sistema, que se identifica como $x = 0$. Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio.

Se puede entender cualitativamente el movimiento oscilatorio del bloque en la figura 15.1 al recordar primero que, cuando el bloque se desplaza a una posición x, el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y se conoce por la **ley de Hooke** (véase la sección 7.4):

$$F_s = -kx \tag{15.1}$$

◀ Ley de Hooke

A F_s se le llama **fuerza restauradora** porque siempre se dirige hacia la posición de equilibrio y, en consecuencia, es *opuesta* al desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Es decir, cuando el bloque se desplaza hacia la derecha de $x = 0$ en la figura 15.1a, la posición es positiva y la fuerza restauradora se dirige hacia la izquierda. La figura 15.1b muestra al bloque en $x = 0$, donde la fuerza en el bloque es cero. Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de $x = 0$, como en la figura 15.1c, la posición es negativa y la fuerza restauradora se dirige hacia la derecha.

Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del bloque, con la ecuación 15.1 que proporciona la fuerza neta en la dirección x, se obtiene

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x \tag{15.2}$$

Es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su posición, y la dirección de la aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Se dice que los sistemas que se comportan de esta forma exhiben **movimiento armónico simple**. Un objeto se mueve con movimiento armónico simple siempre que su aceleración es proporcional a su posición y se dirige en sentido opuesto al desplazamiento desde el equilibrio.

Si el bloque en la figura 15.1 se desplaza a una posición $x = A$ y se libera desde el reposo, su aceleración *inicial* es $-kA/m$. Cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$, su aceleración es cero. En este instante, su rapidez es un máximo porque la aceleración cambia de signo. Por lo tanto el bloque continúa viajando hacia la izquierda del equilibrio con una aceleración positiva y al final llega a $x = -A$, momento en el que su aceleración es $+kA/m$ y su rapidez de nuevo es cero, como se explicó en las secciones 7.4 y 7.9. El bloque termina un ciclo completo de su movimiento cuando regresa a la posición original y una vez más pasa por $x = 0$ con rapidez máxima. En consecuencia, el bloque

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.1

La orientación del resorte

La figura 15.1 muestra un resorte *horizontal*, con un bloque unido que se desliza sobre una superficie sin fricción. Otra posibilidad es un bloque que cuelga de un resorte *vertical*. Todos los resultados que se explican para el resorte horizontal son los mismos para el resorte vertical, con una excepción: cuando el bloque se coloca en el resorte vertical, su peso hace que el resorte se extienda. Si la posición de reposo del bloque se define como $x = 0$, los resultados de este capítulo también se aplican a este sistema vertical.

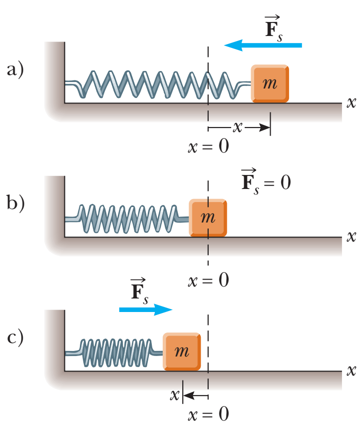


Figura 15.1 Un bloque unido a un resorte móvil sobre una superficie sin fricción. a) Cuando el bloque se desplaza hacia la derecha del equilibrio ($x > 0$), la fuerza que ejerce el resorte actúa hacia la izquierda. b) Cuando el bloque está en su posición de equilibrio ($x = 0$), la fuerza que ejerce el resorte es cero. c) Cuando el bloque se desplaza hacia la izquierda del equilibrio ($x < 0$), la fuerza que ejerce el resorte actúa hacia la derecha.

oscila entre los puntos de retorno $x = \pm A$. En ausencia de fricción, este movimiento idealizado continuará por siempre porque la fuerza que ejerce el resorte es conservativa. Por lo general, los sistemas reales están sujetos a fricción, así que no oscilan por siempre. En la sección 15.6 se explorarán los detalles de la situación con la fricción.

Pregunta rápida 15.1 Un bloque en el extremo de un resorte se jala a la posición $x = A$ y se libera desde el reposo. En un ciclo completo de su movimiento, ¿qué distancia total recorre? a) $A/2$, b) A, c) $2A$, d) $4A$.

15.2 Partícula en movimiento armónico simple

El movimiento descrito en la sección precedente se presenta con tanta frecuencia que se considera el modelo de **partícula en movimiento armónico simple** para representar tales situaciones. Con el fin de elaborar una representación matemática para este modelo, primero se reconoce que el bloque es una partícula bajo una fuerza neta, como se describe en la ecuación 15.1. Por lo general se elegirá x como el eje a lo largo del que se presenta la oscilación; por eso, en esta explicación se eliminará la notación de subíndice x. Recuerde que, por definición, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, y así la ecuación 15.2 se puede expresar como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \textbf{(15.3)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.2
Una aceleración no constante

La aceleración de una partícula en movimiento armónico simple no es constante. La ecuación 15.3 muestra que su aceleración varía con la posición x. Por lo tanto, en esta situación *no se pueden* aplicar las ecuaciones de cinemática del capítulo 2.

Si la relación k/m se indica con el símbolo ω^2 (se elige ω^2 en lugar de ω para que la solución que se desarrolle a continuación sea más simple en forma), en tal caso

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \textbf{(15.4)}$$

y la ecuación 15.3 se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \textbf{(15.5)}$$

Ahora encuentre una solución matemática a la ecuación 15.5, esto es, una función $x(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden y sea una representación matemática de la posición de la partícula como función del tiempo. Se busca una función cuya segunda derivada sea la misma que la función original con un signo negativo y multiplicada por ω^2. Las funciones trigonométricas seno y coseno muestran este comportamiento, así que se puede construir una solución alrededor de una de ellas o de ambas. La función coseno que aparece enseguida es una solución a la ecuación diferencial:

Posición con el tiempo para un objeto en movimiento armónico simple ►

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.6)}$$

donde A, ω y ϕ son constantes. Para mostrar explícitamente que esta solución satisface la ecuación 15.5, note que

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.7)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.8)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.3
¿Dónde está el triángulo?

La ecuación 15.6 incluye una función trigonométrica, una *función matemática* que se puede usar ya sea que se refiera o no a un triángulo. En este caso, sucede que la función coseno tiene el comportamiento correcto para representar la posición de una partícula en movimiento armónico simple.

Al comparar las ecuaciones 15.6 y 15.8, es claro que $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ y se satisface la ecuación 15.5.

Los parámetros A, ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar un significado físico a dichas constantes, es conveniente formar una representación del movimiento al graficar x como función de t como en la figura 15.2a. Primero, A, llamada la **amplitud** del movimiento, es simplemente **el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x**

positiva o negativa. La constante ω se llama **frecuencia angular** y tiene unidades[1] de rad/s. Es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras más oscilaciones por unidad de tiempo haya, más alto es el valor de ω. A partir de la ecuación 15.4, la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.9}$$

El ángulo constante ϕ se llama **constante de fase** (o ángulo de fase inicial) y, junto con la amplitud A, se determina de manera unívoca por la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$. Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\phi = 0$ y la representación gráfica del movimiento es es como se exhibe en la figura 15.2b. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama **fase** del movimiento. Note que la función $x(t)$ es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt aumenta en 2π radianes.

Las ecuaciones 15.1, 15.5 y 15.6 forman la base de la representación matemática de la partícula en el modelo de movimiento armónico simple. Si usted analiza una situación y encuentra que la fuerza sobre una partícula tiene la forma matemática de la ecuación 15.1, usted sabrá que el movimiento es de un oscilador armónico simple y la posición de la partícula la describe la ecuación 15.6. Si analiza un sistema y logra su descripción mediante una ecuación diferencial de la forma de la ecuación 15.5, el movimiento es el de un oscilador armónico simple. Si analiza una situación y ubica la posición de una partícula mediante la ecuación 15.6, sabrá que la partícula se somete a un movimiento armónico simple.

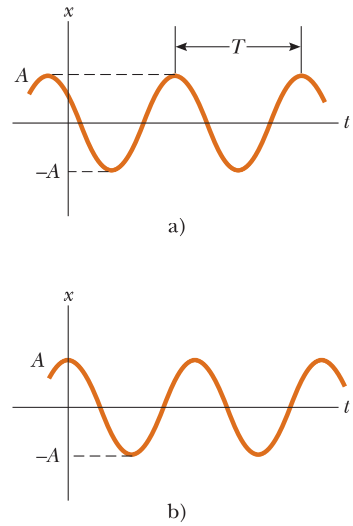


Figura 15.2 a) Gráfica x–t para un objeto que se somete a movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A, el periodo (definido en la ecuación 15.10) es T. b) Gráfica x–t en el caso especial en el que $x = A$ en $t = 0$ y por eso $\phi = 0$.

Pregunta rápida 15.2 Considere una representación gráfica (figura 15.3) de movimiento armónico simple, como se describe matemáticamente en la ecuación 15.6. Cuando el objeto está en el punto Ⓐ de la gráfica, ¿qué puede decir acerca de su posición y velocidad? a) La posición y velocidad son positivas. b) La posición y velocidad son negativas. c) La posición es positiva y su velocidad es cero. d) La posición es negativa y su velocidad es cero. e) La posición es positiva y su velocidad es negativa. f) La posición es negativa y su velocidad es positiva.

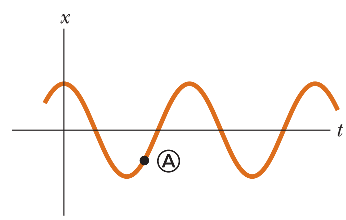


Figura 15.3 (Pregunta rápida 15.2) Gráfica x–t para un objeto sometido a movimiento armónico simple. En un tiempo particular, la posición del objeto se indica mediante Ⓐ en la gráfica.

Pregunta rápida 15.3 La figura 15.4 muestra dos curvas que representan el movimiento armónico simple al que se someten dos objetos. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple del objeto B es, a) de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que el del objeto A, b) de mayor frecuencia angular y menor amplitud que el del objeto A, c) de menor frecuencia angular y mayor amplitud que el del objeto A o d) de menor frecuencia angular y menor amplitud que el del objeto A.

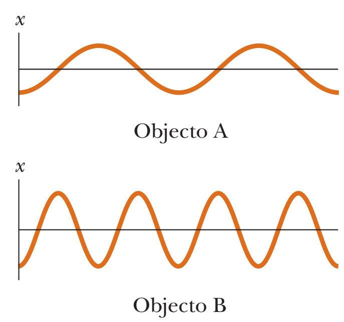


Figura 15.4 (Pregunta rápida 15.3) Dos gráficas x–t para objetos sometidos a movimiento armónico simple. Las amplitudes y frecuencias son diferentes para los dos objetos.

Investigue un poco más la descripción matemática del movimiento armónico simple. El **periodo** T del movimiento es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento (figura 15.2a). Es decir, los valores de x y v para la partícula en el tiempo t iguala los valores de x y v en el tiempo $t + T$. Porque la fase aumenta en 2π radianes en un intervalo de tiempo de T,

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

Al simplificar esta expresión se obtiene $\omega T = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{15.10}$$

[1]En capítulos anteriores se vieron muchos ejemplos en los que se evalúa una función trigonométrica de un ángulo. El argumento de una función trigonométrica, como seno o coseno, *debe* ser un número puro. El radián es un número puro porque es una relación de longitudes. Los ángulos en grados son números puros porque el grado es una "unidad" artificial; no se relaciona con mediciones de longitudes. El argumento de la función trigonométrica de la función en la ecuación 15.6 debe ser un número puro. Por lo tanto, ω *debe* expresarse en rad/s (y no, por ejemplo, en revoluciones por cada segundo) si t se expresa en segundos. Además, otros tipos de funciones, como las funciones logarítmicas y exponenciales, requieren argumentos que son números puros.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.4
Dos clases de frecuencia

Se identifican dos clases de frecuencia para un oscilador armónico simple: f, llamada simplemente *frecuencia*, se mide en hertz, y ω, la *frecuencia angular*, se mide en radianes por segundo. Asegúrese de tener claridad acerca de cuál frecuencia se discute o solicita en un problema determinado. Las ecuaciones 15.11 y 15.12 muestran la relación entre las dos frecuencias.

El inverso del periodo se llama **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo de tiempo por oscilación, la frecuencia representa el **número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo:**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \textbf{(15.11)}$$

Las unidades de f son ciclos por segundo, o **hertz** (Hz). Reordenar la ecuación 15.11 produce

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \textbf{(15.12)}$$

Las ecuaciones 15.9, 15.10 y 15.11 se usan para expresar el periodo y la frecuencia del movimiento para la partícula en movimiento armónico simple en términos de las características m y k del sistema como

Periodo ▶

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(15.13)}$$

Frecuencia ▶

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(15.14)}$$

De este modo el periodo y la frecuencia dependen *solamente* de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y *no* de los parámetros del movimiento, como A o ϕ. Como es de esperar, la frecuencia es mayor para un resorte más rígido (mayor valor de k) y disminuye con la masa creciente de la partícula.

Es posible obtener la velocidad y la aceleración[2] de una partícula sometida a movimiento armónico simple a partir de las ecuaciones 15.7 y 15.8:

Velocidad de un objeto en movimiento armónico simple ▶

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.15)}$$

Aceleración de un objeto en movimiento armónico simple ▶

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.16)}$$

A partir de la ecuación 15.15 se ve que, puesto que las funciones seno y coseno oscilan entre ± 1, los valores extremos de la velocidad v son $\pm\omega A$. Del mismo modo, la ecuación 15.16 muestra que los valores extremos de la aceleración a son $\pm\omega^2 A$. En consecuencia, los valores *máximos* de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

Magnitudes máximas de velocidad y aceleración en movimiento armónico simple ▶

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A \qquad \textbf{(15.17)}$$

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m}\,A \qquad \textbf{(15.18)}$$

.

La figura 15.5a grafica la posición con el tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. En las figuras 15.5b y 15.5c se ilustran las curvas asociadas velocidad–tiempo y aceleración–tiempo. Las cuales muestran que la fase de la velocidad difiere de la fase de la posición en $\pi/2$ rad, o 90°. Es decir: cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. Del mismo modo, cuando x es cero, la rapidez es un máximo. Además, note que la fase de la aceleración difiere de la fase de la posición en π radianes, o 180°. Por ejemplo, cuando x es un máximo, a tiene una magnitud máxima en la dirección opuesta.

Pregunta rápida 15.4 Un objeto de masa m cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como T. El objeto de masa m se retira y se

[2]Ya que el movimiento de un oscilador armónico simple tiene lugar en una dimensión, la velocidad se indica como v y la aceleración como a, con la dirección indicada mediante un signo positivo o negativo, como en el capítulo 2.

sustituye con un objeto de masa $2m$. Cuando este objeto se pone en oscilación, ¿cuál es el periodo del movimiento? a) $2T$, b) $\sqrt{2}T$, c) T, d) $T/\sqrt{2}$, e) $T/2$.

La ecuación 15.6 describe el movimiento armónico simple de una partícula en general. Ahora vea cómo evaluar las constantes del movimiento. La frecuencia angular ω se evalúa con la ecuación 15.9. Las constantes A y ϕ se evalúan a partir de las condiciones iniciales, es decir, del estado del oscilador en $t = 0$.

Suponga que la partícula se pone en movimiento al jalarla desde el equilibrio una distancia A y liberarla desde el reposo en $t = 0$, como en la figura 15.6. Después se deben requerir soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ (ecuaciones 15.6 y 15.15) para obedecer las condiciones iniciales $x(0) = A$ y $v(0) = 0$:

$$x(0) = A\cos\phi = A$$

$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = 0$$

Estas condiciones se satisfacen si $\phi = 0$, lo que da $x = A\cos\omega t$ como solución. Si busca comprobar esta solución, advierta que satisface la condición $x(0) = A$ porque $\cos 0 = 1$.

La posición, velocidad y aceleración con el tiempo se grafican en la figura 15.7a para este caso especial. La aceleración alcanza valores extremos de $\mp\omega^2 A$ cuando la posición tiene valores extremos de $\pm A$. Además, la velocidad tiene valores extremos de $\pm\omega A$, que se presentan en $x = 0$. Por lo tanto, la solución cuantitativa concuerda con la descripción cualitativa de este sistema.

Considere otra posibilidad. Suponga que el sistema oscila y se define $t = 0$ como el instante cuando la partícula pasa a través de la posición no estirada del resorte mientras se mueve a la derecha (figura 15.8). En este caso, las soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ deben obedecer las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$:

$$x(0) = A\cos\phi = 0$$

$$v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = v_i$$

La primera de estas condiciones dice que $\phi = \pm\pi/2$. Con estas opciones para ϕ, la segunda condición dice que $A = \mp v_i/\omega$. Porque la velocidad inicial es positiva y la amplitud es positiva, se debe tener $\phi = -\pi/2$. En consecuencia, la solución es

$$x = \frac{v_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración con el tiempo para esta opción de $t = 0$ se muestran en la figura 15.7b. Note que estas curvas son las mismas que en la figura 15.7a, pero desplazadas a la derecha en un cuarto de ciclo. Este corrimiento se describe matemáticamente por la constante de fase $\phi = -\pi/2$, que es un cuarto de un ciclo completo de 2π.

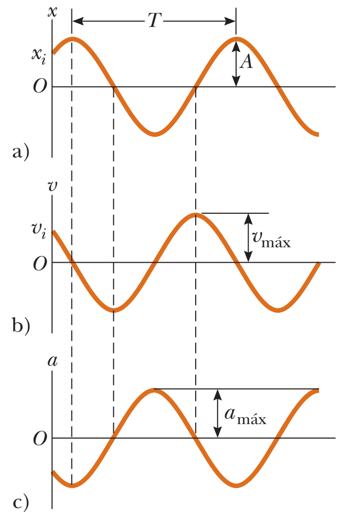


Figura 15.5 Representación gráfica de movimiento armónico simple. a) Posición con tiempo. b) Velocidad con tiempo. c) Aceleración con tiempo. Note que en cualquier tiempo especificado la velocidad está 90° fuera de fase con la posición y la aceleración está 180° fuera de fase con la posición.

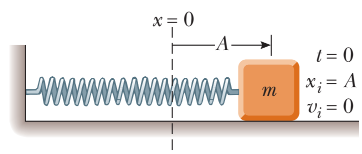


Figura 15.6 Un sistema bloque–resorte que inicia su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$. En este caso, $\phi = 0$; por lo tanto, $x = A\cos\omega t$.

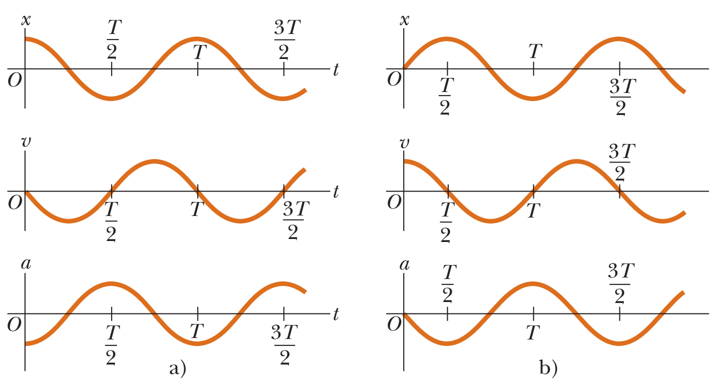


Figura 15.7 a) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para un bloque sometido a movimiento armónico simple bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = A$ y $v(0) = 0$. b) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para un bloque sometido a movimiento armónico simple bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$.

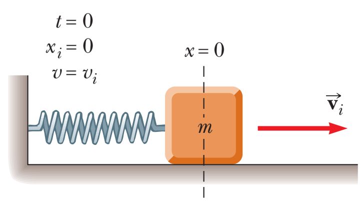


Figura 15.8 El sistema bloque–resorte sometido a oscilación y $t = 0$ se define en un instante cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con rapidez v_i.

EJEMPLO 15.1 Un sistema bloque–resorte

Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura 15.6.

A) Hallar el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 15.6 e imagine el bloque que se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple una vez que se libera. Establezca un modelo experimental en la dirección vertical al colgar un objeto pesado, como una engrapadora, de una banda de hule resistente.

Categorizar El bloque se modela como una partícula en movimiento armónico simple. Los valores se buscan a partir de las ecuaciones desarrolladas en esta sección para el modelo de partícula en movimiento armónico simple, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 15.9 para hallar la frecuencia angular del sistema bloque–resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

Use la ecuación 15.13 para encontrar el periodo del sistema:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00 \text{ rad/s}} = \boxed{1.26 \text{ s}}$$

B) Determine la rapidez máxima del bloque.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.17 para hallar $v_{\text{máx}}$:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = \boxed{0.250 \text{ m/s}}$$

C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.18 para hallar $a_{\text{máx}}$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = \boxed{1.25 \text{ m/s}^2}$$

D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

SOLUCIÓN

Encuentre la constante de fase a partir de la condición inicial de que $x = A$ en $t = 0$:

$$x(0) = A \cos \phi = A \quad \rightarrow \quad \phi = 0$$

Aplique la ecuación 15.6 para escribir una expresión para $x(t)$:

$$x = A \cos (\omega t + \phi) = \boxed{(0.050\,0 \text{ m}) \cos 5.00t}$$

Use la ecuación 15.15 para escribir una expresión para $v(t)$:

$$v = -\omega A \text{ sen } (\omega t + \phi) = \boxed{-(0.250 \text{ m/s}) \text{ sen } 5.00t}$$

Aplique la ecuación 15.16 para escribir una expresión para $a(t)$:

$$a = -\omega^2 A \cos (\omega t + \phi) = \boxed{-(1.25 \text{ m/s}^2) \cos 5.00t}$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si el bloque se libera desde la misma posición inicial, $x_i = 5.00$ cm, pero con una velocidad inicial de $v_i = -0.100$ m/s? ¿Qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas para éstas?

Respuestas La parte A) no cambia porque el periodo es independiente de cómo se pone en movimiento el oscilador. Los incisos B), C) y D) cambiarán.

Escriba las expresiones de posición y velocidad para las condiciones iniciales:

1) $x(0) = A \cos \phi = x_i$

2) $v(0) = -\omega A \text{ sen } \phi = v_i$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) para encontrar la constante de fase:

$$\frac{-\omega A \operatorname{sen} \phi}{A \cos \phi} = \frac{v_i}{x_i}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{-0.100 \text{ m/s}}{(5.00 \text{ rad/s})(0.050\,0 \text{ m})} = 0.400$$

$$\phi = 0.127\pi$$

Use la ecuación 1) para hallar A:

$$A = \frac{x_i}{\cos \phi} = \frac{0.050\,0 \text{ m}}{\cos (0.127\pi)} = 0.054\,3 \text{ m}$$

Encuentre la nueva rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.43 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.271 \text{ m/s}$$

Encuentre la nueva magnitud de la aceleración máxima:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (5.43 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.36 \text{ m/s}^2$$

Encuentre nuevas expresiones para posición, velocidad y aceleración:

$$x = (0.054\,3 \text{ m}) \cos (5.00t + 0.127\pi)$$

$$v = -(0.271 \text{ m/s}) \operatorname{sen} (5.00t + 0.127\pi)$$

$$a = -(1.36 \text{ m/s}^2) \cos (5.00t + 0.127\pi)$$

Como aprendió en los capítulos 7 y 8, muchos problemas son más fáciles de resolver al aplicar una aproximación energética en lugar de usar uno en función de variables de movimiento. La condicional **¿Qué pasaría si?** es más fácil de resolver a partir de una aproximación energética. Por lo tanto, en la siguiente sección se investigará la energía del oscilador armónico simple.

EJEMPLO 15.2 ¡Cuidado con los baches!

Un automóvil con una masa de 1 300 kg se construye de modo que su chasis está sostenido mediante cuatro amortiguadores. Cada amortiguador tiene una constante de fuerza de 20 000 N/m. Dos personas que viajan en el automóvil tienen una masa combinada de 160 kg. Encuentre la frecuencia de vibración del automóvil después de que pasa sobre un bache en el camino.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en sus experiencias con los automóviles. Cuando se sienta en un automóvil, se mueve hacia abajo una distancia pequeña porque su peso comprime aún más los amortiguadores. Si usted presiona la defensa frontal y la libera, el frente del automóvil oscila algunas veces.

Categorizar Imagine que el automóvil está sostenido mediante un solo amortiguador y modele al automóvil como una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar Primero determine la constante de resorte efectiva de los cuatro amortiguadores combinados. Para una cierta extensión x de los amortiguadores, la fuerza combinada sobre el automóvil es la suma de las fuerzas de los amortiguadores individuales.

Encuentre una expresión para la fuerza total sobre el automóvil:

$$F_{\text{total}} = \sum (-kx) = -\left(\sum k\right)x$$

En esta expresión, x se factorizó de la suma porque es la misma para los cuatro amortiguadores. La constante de resorte efectiva para los amortiguadores combinados es la suma de las constantes del amortiguador individual.

Evalúe la constante de resorte efectiva:

$$k_{\text{ef}} = \sum k = 4 \times 20\,000 \text{ N/m} = 80\,000 \text{ N/m}$$

Use la ecuación 15.14 para encontrar la frecuencia de vibración:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{ef}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\,000 \text{ N/m}}{1\,460 \text{ kg}}} = 1.18 \text{ Hz}$$

Finalizar La masa que se usa en este caso es la del automóvil más las personas, porque es la masa total que oscila. Advierta también que sólo se exploró el movimiento hacia arriba y hacia abajo del automóvil. Si se establece una oscilación en la que el automóvil se mece de atrás para adelante tal que el extremo frontal sube cuando el extremo posterior baja, la frecuencia será diferente.

¿Qué pasaría si? Suponga que el automóvil se detiene al lado del camino y las dos personas salen del auto. Una de ellas presiona hacia abajo el automóvil y lo libera de modo que oscile en la vertical. ¿La frecuencia de la oscilación es la misma que el valor recién calculado?

Respuesta El sistema de suspensión del automóvil es el mismo, pero la masa que oscila es menor: ya no incluye la masa de las dos personas. Por lo tanto, la frecuencia debe ser mayor. Calcule la nueva frecuencia considerando la masa como 1 300 kg:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{ef}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{80\,000\text{ N/m}}{1\,300\text{ kg}}} = 1.25\text{ Hz}$$

Como se predijo, la nueva frecuencia es un poco mayor.

15.3 Energía del oscilador armónico simple

Examine la energía mecánica del sistema bloque–resorte que se ilustra en la figura 15.1. Ya que la superficie no tiene fricción, el sistema está aislado y es de esperar que la energía mecánica total del sistema sea constante. Ahora suponga un resorte sin masa, de modo que la energía cinética del sistema sólo corresponde a la del bloque; puede usar la ecuación 15.15 para expresar la energía cinética del bloque como

Energía cinética de un oscilador armónico simple ▶

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\,\text{sen}^2\,(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.19)}$$

La energía potencial elástica almacenada en el resorte para cualquier elongación x se conoce por $\frac{1}{2}kx^2$ (véase la ecuación 7.22). Si usa la ecuación 15.6 produce

Energía potencial de un oscilador armónico simple ▶

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2\,(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.20)}$$

Se ve que K y U *siempre* son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = k/m$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2[\text{sen}^2\,(\omega t + \phi) + \cos^2\,(\omega t + \phi)]$$

A partir de la identidad $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$, se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad. En consecuencia, esta ecuación se reduce a

Energía total de un oscilador armónico simple ▶

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \textbf{(15.21)}$$

Esto es: **la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud**. La energía mecánica total es igual a la energía potencial máxima almacenada en el resorte cuando $x = \pm A$ porque $v = 0$ en estos puntos y no hay energía cinética. En la posición de equilibrio, donde $U = 0$ porque $x = 0$, la energía total, toda en forma de energía cinética, de nuevo es $\frac{1}{2}kA^2$.

En la figura 15.9a aparecen gráficas de las energías cinética y potencial en función del tiempo, donde se consideró $\phi = 0$. En todo momento, la suma de las energías cinética y potencial es una constante igual a $\frac{1}{2}kA^2$, la energía total del sistema.

Las variaciones de K y U con la posición x del bloque se grafican en la figura 15.9b. La energía se transforma continuamente entre energía potencial almacenada en el resorte y energía cinética del bloque.

La figura 15.10 ilustra la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial del sistema bloque–resorte para un periodo completo del movimiento. La mayoría de las ideas explicadas hasta el momento se incorpora en esta importante figura. Estúdiela cuidadosamente.

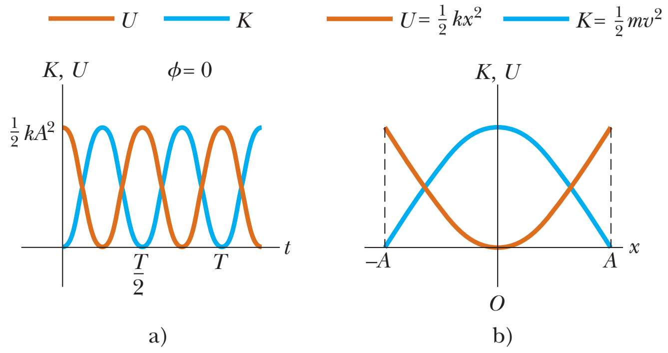


Figura 15.9 a) Energía cinética y energía potencial en función del tiempo para un oscilador armónico simple con $\phi = 0$. b) Energía cinética y energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple. En cualquier gráfica, note que $K + U =$ constante.

Por último, la velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene al expresar la energía total del sistema en alguna posición arbitraria x como

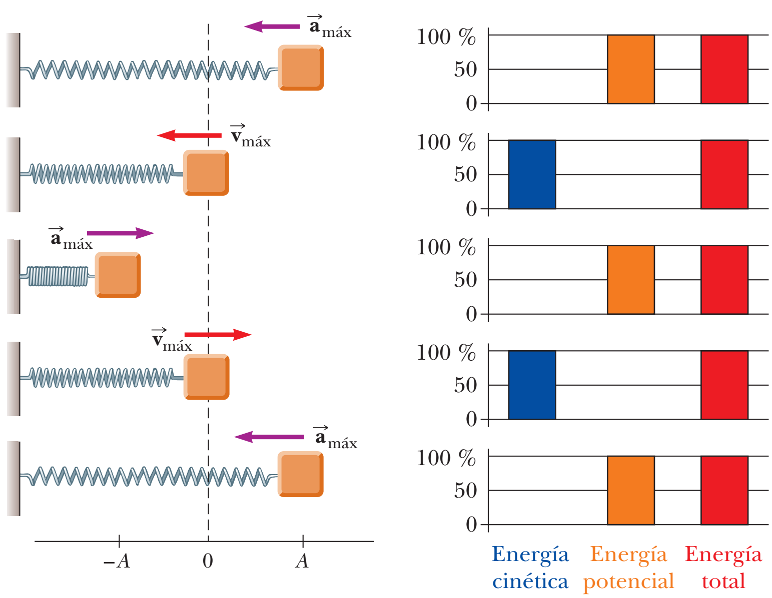
$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\,\omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad \textbf{(15.22)}$$

◀ Velocidad como función de la posición para un oscilador armónico simple

Al comprobar la ecuación 15.22 para ver si concuerda con casos conocidos, se encuentra que verifica que la rapidez es un máximo en $x = 0$ y es cero en los puntos de retorno $x = \pm A$.

Es posible que se pregunte por qué se pasa tanto tiempo en el estudio de los osciladores armónicos simples. La respuesta es porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, recuerde el potencial Lennard–Jones explicado en el ejemplo 7.9. Esta complicada función describe las fuerzas que mantienen unidos a los átomos. La figura 15.11a muestra que, para pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, la curva de energía potencial para esta función se aproxima a una parábola, que representa la función de energía potencial para un oscilador armónico simple. Por lo tanto, las fuerzas complejas de enlace atómico se modelan como debida a pequeños resortes, como se bosqueja en la figura 15.11b.



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Figura 15.10 Varios instantes en el movimiento armónico simple para un sistema bloque–resorte. Las gráficas de barras de energía muestran la distribución de la energía del sistema en cada instante. Los parámetros en la tabla de la derecha se refieren al sistema bloque–resorte, si supone que en $t = 0$, $x = A$; por eso, $x = A \cos \omega t$.

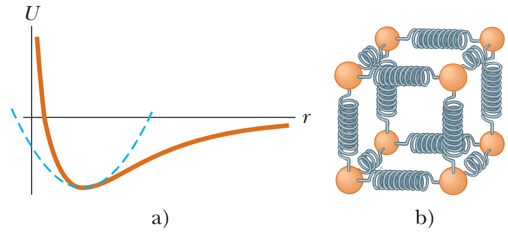


Figura 15.11 a) Si los átomos en una molécula no se mueven demasiado de sus posiciones de equilibrio, una gráfica de energía potencial con la distancia de separación entre átomos es similar a la gráfica de energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple (curva azul discontinua). b) Las fuerzas entre los átomos en un sólido se pueden modelar al imaginar resortes entre átomos vecinos.

Las ideas presentadas en este capítulo no sólo se aplican a sistemas bloque–resorte y átomos, también funcionan con una amplia gama de situaciones que incluyen el salto *bungee*, la sintonía en una estación de televisión y la visión de la luz emitida por un láser. Usted verá más ejemplos de osciladores armónicos simples mientras trabaja a lo largo de este libro.

EJEMPLO 15.3 Oscilaciones sobre una superficie horizontal

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el que la constante de fuerza es 20.0 N/m oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción.

A) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sistema oscila exactamente en la misma forma que el bloque de la figura 15.10.

Categorizar El carro se modela como una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar Use la ecuación 15.21 para encontrar la energía del oscilador:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(3.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$$
$$= \boxed{9.00 \times 10^{-3}\ \text{J}}$$

Cuando el carro está en $x = 0$, la energía del oscilador es completamente cinética, así que se establece $E = \tfrac{1}{2}mv^2_{\text{máx}}$:

$$\tfrac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = 9.00 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2(9.00 \times 10^{-3}\ \text{J})}{0.500\ \text{kg}}} = \boxed{0.190\ \ \text{m/s}}$$

B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.22 para evaluar la velocidad:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{20.0\ \text{N/m}}{0.500\ \text{kg}}[(0.030\ 0\ \text{m})^2 - (0.020\ 0\ \text{m})^2]}$$
$$= \boxed{\pm 0.141\ \text{m/s}}$$

Los signos positivo y negativo indican que el carro podría moverse hacia la derecha o a la izquierda en este instante.

C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición es 2.00 cm.

SOLUCIÓN

Use el resultado del inciso B) para evaluar la energía cinética en $x = 0.020\ 0$ m:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(0.141 \text{ m/s})^2 = \boxed{5.00 \times 10^{-3} \text{ J}}$$

Evalúe la energía potencial elástica en $x = 0.020\ 0$ m:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.020\,0 \text{ m})^2 = \boxed{4.00 \times 10^{-3} \text{ J}}$$

Finalizar Advierta que la suma de las energías cinética y potencial en el inciso C) es igual a la energía total que se encontró en el inciso A). Esto debe ser cierto para *cualquier* posición del carro.

¿Qué pasaría si? El carro en este ejemplo pudo haberse puesto en movimiento al liberarlo desde el reposo en $x = 3.00$ cm. ¿Y si el carro se libera desde la misma posición, pero con una velocidad inicial de $v = -0.100$ m/s? ¿Cuáles son las nuevas amplitud y rapidez máxima del carro?

Respuesta Esta pregunta es del mismo tipo que se planteó al final del ejemplo 15.1, pero en este caso se aplica a una aproximación energética.

Primero calcule la energía total del sistema en $t = 0$:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(-0.100 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.030\ 0 \text{ m})^2$$
$$= 1.15 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Iguale esta energía total con la energía potencial cuando el carro está en el punto final del movimiento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Resuelva para la amplitud A:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{20.0 \text{ N/m}}} = 0.033\ 9 \text{ m}$$

Encuentre la nueva rapidez máxima al igualar la energía total con la energía cinética cuando el carro esté en la posición de equilibrio:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{0.500 \text{ kg}}} = 0.214 \text{ m/s}$$

La amplitud y velocidad máxima son mayores que los valores previos porque al carro se le dio una velocidad inicial en $t = 0$.

15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

Algunos dispositivos comunes en la vida cotidiana muestran una correspondencia entre movimiento oscilatorio y movimiento circular. Por ejemplo, el pistón en el motor de un automóvil (figura 15.12a) sube y baja (movimiento oscilatorio) aunque el resultado neto de este movimiento es el movimiento circular de las ruedas. En una locomotora antigua (figura 15.12b), el eje impulsor va de atrás para adelante en movimiento oscilatorio, lo que provoca un movimiento circular de las ruedas. En esta sección se explora esta interesante relación entre estos dos tipos de movimiento.

La figura 15.13 muestra esta correspondencia en una implementación experimental. Una bola se une al borde de una tornamesa de radio A, que está iluminada desde el lado por una lámpara. La bola proyecta una sombra sobre una pantalla. **A medida que la tornamesa da vueltas con rapidez angular constante, la sombra de la bola se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple**.

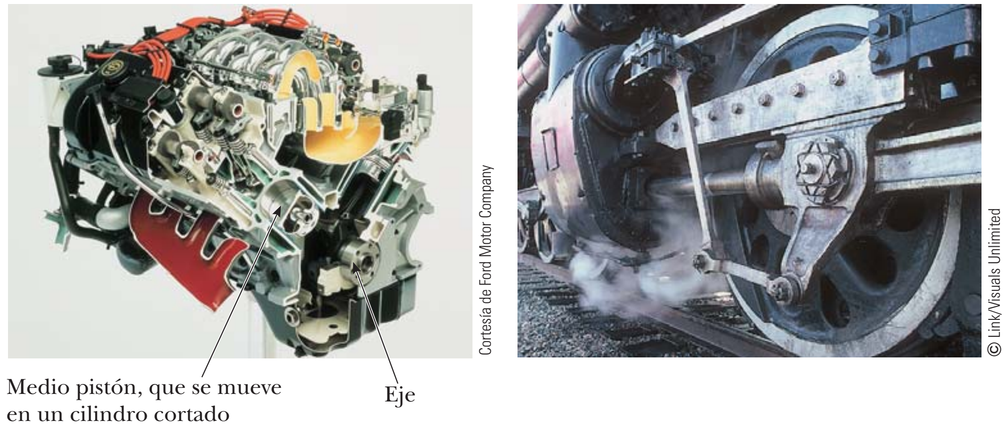


Figura 15.12 (*Izquierda*) Los pistones del motor de un automóvil se mueven en movimiento periódico a lo largo de una sola dimensión, como se muestra en este corte transversal de dos pistones. Este movimiento se convierte en el movimiento circular del cigüeñal, abajo a la derecha, y a final de cuentas de las ruedas del automóvil. (*Derecha*) El movimiento de atrás para adelante de los pistones (en la carcaza curva a la izquierda) en una locomotora antigua se convierte en movimiento circular de las ruedas.

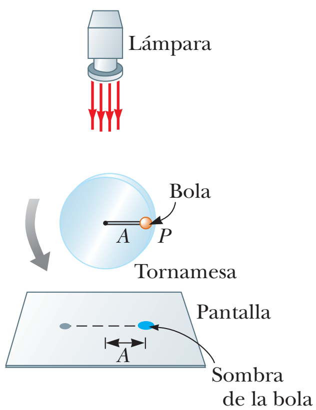


Figura 15.13 Un arreglo experimental para demostrar la conexión entre movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme. Conforme la bola da vueltas sobre la tornamesa con rapidez angular constante, su sombra sobre la pantalla se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple.

Considere una partícula ubicada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A, como en la figura 15.14a, con la línea OP que forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. A este círculo se le llama *círculo de referencia* para comparar el movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme, y se elige la posición de P en $t = 0$ como la posición de referencia. Si la partícula se mueve a lo largo del círculo con rapidez angular constante ω hasta que OP forma un ángulo θ con el eje x, como en la figura 15.14b, en algún tiempo $t > 0$ el ángulo entre OP y el eje x es $\theta = \omega t + \phi$. Conforme la partícula se mueve a lo largo del círculo, la proyección de P sobre el eje x, punto etiquetado Q, se mueve de atrás para adelante a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$.

Advierta que los puntos P y Q siempre tienen la misma coordenada x. A partir del triángulo rectángulo OPQ se ve que esta coordenada x es

$$x(t) = A \cos (\omega t + \phi) \tag{15.23}$$

Esta expresión es la misma que la ecuación 15.6 y muestra que el punto Q se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Por lo tanto, **el movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta se puede representar mediante la proyección de movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro de un círculo de referencia.**

Esta interpretación geométrica muestra que el intervalo de tiempo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo de movimiento T para movimiento armónico simple entre $x = \pm A$. Es decir, la rapidez angular ω de P es la

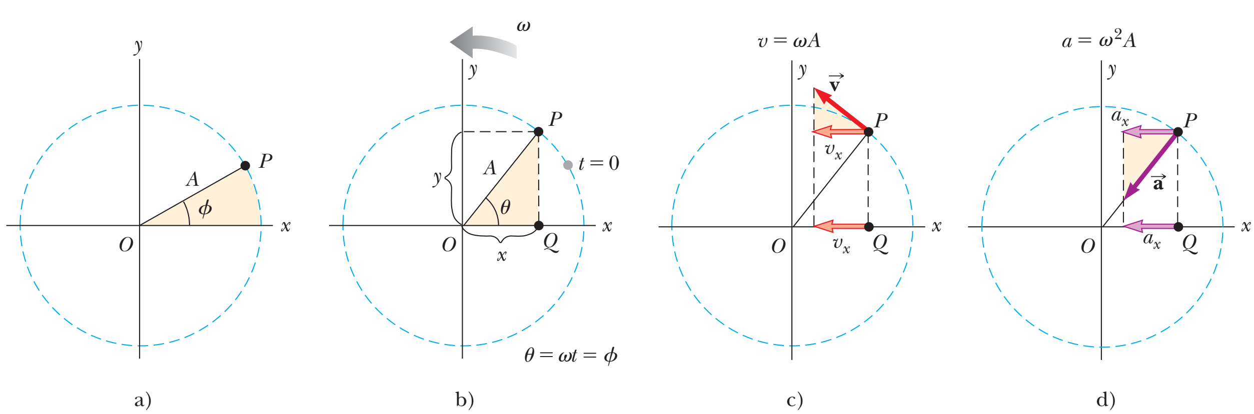


Figura 15.14 Correspondencia entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q. Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω. a) Un círculo de referencia que muestra la posición de P en $t = 0$. b) Las coordenadas x de los puntos P y Q son iguales y varían en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = A \cos(\omega t + \phi)$. c) La componente x de la velocidad de P es igual a la velocidad de Q. d) La componente x de la aceleración de P es igual a la aceleración de Q.

misma que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje x (que es por lo que se usa el mismo símbolo). La constante de fase ϕ para movimiento armónico simple corresponde al ángulo inicial OP que forma con el eje x. El radio A del círculo de referencia es igual a la amplitud del movimiento armónico simple.

Ya que la correspondencia entre rapidez lineal y angular para el movimiento circular es $v = r\omega$ (véase la ecuación 10.10), la partícula móvil en el círculo de referencia de radio A tiene una velocidad de magnitud ωA. A partir de la geometría en la figura 15.14c, se ve que la componente x de esta velocidad es $-\omega A$ sen $(\omega t + \phi)$. Por definición, el punto Q tiene una velocidad conocida por dx/dt. Derivando la ecuación 15.23 respecto al tiempo, se encuentra que la velocidad de Q es la misma que la componente x de la velocidad de P.

La aceleración de P en el círculo de referencia se dirige radialmente hacia adentro, hacia O, y tiene magnitud $v^2/A = \omega^2 A$. A partir de la geometría de la figura 15.14d, se ve que la componente x de esta aceleración es $-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$. Este valor también es la aceleración del punto proyectado Q a lo largo del eje x, como puede verificar al tomar la segunda derivada de la ecuación 15.23.

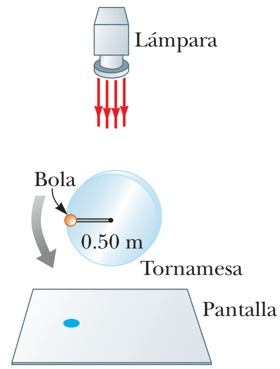


Figura 15.15 (Pregunta rápida 15.5) Un objeto se mueve en movimiento circular y proyecta una sombra sobre la pantalla abajo. Se muestra su posición en un instante de tiempo.

Pregunta rápida 15.5 La figura 15.15 muestra la posición de un objeto en movimiento circular uniforme en $t = 0$. Una luz brilla desde arriba y proyecta una sombra del objeto sobre una pantalla abajo del movimiento circular. ¿Cuáles son los valores correctos para la *amplitud* y la *constante de fase* (en relación con un eje x a la derecha) del movimiento armónico simple de la sombra? a) 0.50 m y 0, b) 1.00 m y 0, c) 0.50 y π, d) 1.00 m y π.

EJEMPLO 15.4 Movimiento circular con rapidez angular constante

Una partícula da vueltas en contra las manecillas del reloj en un círculo de 3.00 m de radio, con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, la partícula tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve hacia la derecha.

A) Determine la coordenada x de la partícula como función del tiempo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Asegúrese de que comprende la correspondencia entre movimiento circular de una partícula y el movimiento armónico simple de su sombra, como se describe en la figura 15.13.

Categorizar La partícula sobre el círculo es una partícula bajo rapidez angular constante. La sombra es una partícula en movimiento armónico simple.

Analizar Use la ecuación 15.23 para escribir una expresión para la coordenada x de la partícula en rotación con $\omega = 8.00$ rad/s:

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = (3.00 \text{ m})\cos(8.00t + \phi)$$

Evalúe ϕ, use la condición inicial $x = 2.00$ m en $t = 0$:

$$2.00 \text{ m} = (3.00 \text{ m})\cos(0 + \phi)$$

Resuelva para ϕ:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00 \text{ m}}{3.00 \text{ m}}\right) = \cos^{-1}(0.667) = \pm 48.2° = \pm 0.841 \text{ rad}$$

Si se considera $\phi = +0.841$ rad como la respuesta, la partícula es móvil hacia la izquierda en $t = 0$. Ya que la partícula se mueve hacia la derecha en $t = 0$, se debe elegir $\phi = -0.841$ rad.

Escriba la coordenada x como función del tiempo:

$$x = \boxed{(3.00 \text{ m})\cos(8.00t - 0.841)}$$

B) Encuentre las componentes x de velocidad y aceleración de la partícula en cualquier tiempo t.

SOLUCIÓN

Derivando la coordenada x respecto al tiempo para encontrar la velocidad en cualquier tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-3.00 \text{ m})(8.00 \text{ rad/s}) \text{ sen } (8.00t - 0.841)$$

$$= \boxed{-(24.0 \text{ m/s}) \text{ sen } (8.00t - 0.841)}$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo para encontrar la aceleración en cualquier tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = (-24.0 \text{ m/s})(8.00 \text{ rad/s}) \cos (8.00t - 0.841)$$

$$= \boxed{-(192 \text{ m/s}^2) \cos (8.00t - 0.841)}$$

Finalizar Aunque estos resultados se evaluaron para la partícula móvil en el círculo, recuerde que estos mismos resultados se aplican a la sombra, que se mueve en movimiento armónico simple.

15.5 El péndulo

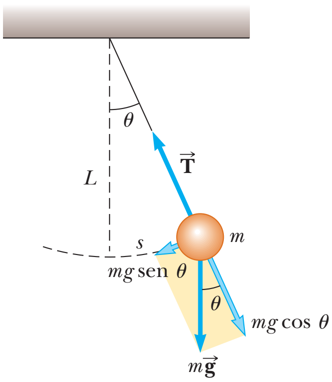


Figura 15.16 La fuerza restauradora es $-mg \text{ sen } \theta$, la componente de la fuerza gravitacional tangente al arco. Cuando θ es pequeño, un péndulo simple oscila en movimiento armónico simple en torno a la posición de equilibrio $\theta = 0$.

El **péndulo simple** es otro sistema mecánico que muestra movimiento periódico. Consiste en una plomada parecida a una partícula de masa m suspendida de una cuerda ligera de longitud L que está fija en el extremo superior, como se muestra en la figura 15.16. El movimiento se presenta en el plano vertical y es impulsado por la fuerza gravitacional. Se demostrará que, siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor que aproximadamente 10°), el movimiento es muy cercano al de un oscilador armónico simple.

Las fuerzas que actúan en la plomada son la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$. La componente tangencial $mg \text{ sen } \theta$ de la fuerza gravitacional siempre actúa hacia $\theta = 0$, opuesta al desplazamiento de la plomada desde la posición más baja. Por lo tanto, la componente tangencial es una fuerza restauradora y se puede aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = -mg \text{ sen } \theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

donde s es la posición de la plomada medida a lo largo del arco y el signo negativo indica que la fuerza tangencial actúa hacia la posición de equilibrio (vertical). Ya que $s = L\theta$ (ecuación 10.1a) y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \text{ sen } \theta$$

Al considerar θ como la posición, compare esta ecuación con la ecuación 15.3. ¿Tiene la misma forma matemática? El lado derecho es proporcional a sen θ en vez de θ; por eso, no se esperaría movimiento armónico simple porque esta expresión no tiene la forma de la ecuación 15.3. Sin embargo, si se supone que θ es *pequeño* (menor que aproximadamente 10° o 0.2 rad), se puede usar la **aproximación de ángulo pequeño**, en la que sen $\theta \approx \theta$, donde θ se mide en radianes. La tabla 15.1 muestra ángulos en grados y radianes y los senos de estos ángulos. En tanto θ sea menor que aproximadamente 10°, el ángulo en radianes y su seno son los mismos hasta dentro de una precisión menor de 1.0 por ciento.

Por lo tanto, para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad \text{(para valores pequeños de } \theta) \qquad \textbf{(15.24)}$$

La ecuación 15.24 tiene la misma forma que la ecuación 15.3, así se concluye que el movimiento para amplitudes de oscilación pequeñas se puede modelar como movimiento armónico simple. En consecuencia, la solución de la ecuación 15.24 es $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos (\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la *posición angular máxima* y la frecuencia angular ω es

Frecuencia angular para un péndulo simple ►

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \textbf{(15.25)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.5

Movimiento armónico simple no verdadero

El péndulo *no* muestra movimiento armónico simple verdadero para *cualquier* ángulo. Si el ángulo es menor que aproximadamente 10°, el movimiento está cerca de, y se puede, *modelar* como armónico simple.

TABLA 15.1

Ángulos y senos de ángulos

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno de ángulo	Porcentaje de diferencia
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%

El periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{15.26}$$

◀ Periodo de un péndulo simple

En otras palabras, **el periodo y la frecuencia de un péndulo simple sólo dependen de la longitud de la cuerda y de la aceleración debida a la gravedad**. Ya que el periodo es independiente de la masa, se concluye que todos los péndulos simples que son de igual longitud y están en la misma ubicación (de modo que g es constante) oscilan con el mismo periodo.

El péndulo simple se puede usar como cronómetro porque su periodo sólo depende de su longitud y del valor local de g. También es un dispositivo conveniente para hacer mediciones precisas de la aceleración en caída libre. Tales mediciones son importantes porque las variaciones en los valores locales de g pueden proporcionar información acerca de la ubicación de petróleo y otros recursos subterráneos valiosos.

Pregunta rápida 15.6 Un reloj de péndulo depende del periodo de un péndulo para mantener el tiempo correcto. **i)** Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente y luego un niño travieso desliza la plomada del péndulo hacia abajo sobre la barra oscilante. ¿El reloj se mueve a) lento, b) rápido, o c) correctamente? **ii)** Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente a nivel del mar y luego se lleva a lo alto de una montaña muy alta. El reloj ahora se mueve, ¿a) lento, b) rápido, o c) correctamente?.

EJEMPLO 15.5 Conexión entre longitud y tiempo

Christian Huygens (1629−1695), el mayor relojero de la historia, sugirió que se podía definir una unidad internacional de longitud como la longitud de un péndulo simple que tiene un periodo de exactamente 1 s. ¿Cuánta más corta sería la unidad de longitud actual si se hubiese seguido su sugerencia?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un péndulo que se balancee de atrás para adelante en exactamente un segundo. De acuerdo con su experiencia al observar objetos que se balancean, ¿puede hacer una estimación de la longitud requerida? Cuelgue un objeto pequeño de una cuerda y simule el péndulo de 1 s.

Categorizar Este ejemplo es sobre un péndulo simple, así que se clasifica como una aplicación de los conceptos introducidos en esta sección.

Analizar Resuelva la ecuación 15.26 para la longitud y sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00\text{ s})^2(9.80\text{ m/s}^2)}{4\pi^2} = \boxed{0.248\text{ m}}$$

Finalizar La longitud del metro sería ligeramente menor que un cuarto de su longitud actual. Además, el número de cifras significativas sólo depende de como se conoce exactamente g, porque el tiempo se definió exactamente como 1 s.

¿Qué pasaría si? ¿Y si Huygens hubiera nacido en otro planeta? ¿Cuál tendría que ser el valor de g en dicho planeta para que el metro en función del péndulo de Huygens tuviera el mismo valor que el metro actual?

Respuesta Resuelva la ecuación 15.26 para g:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.00\text{ m})}{(1.00\text{ s})^2} = 4\pi^2\text{ m/s}^2 = 39.5\text{ m/s}^2$$

Ningún planeta en el sistema solar tiene una aceleración tan grande debida a la gravedad.

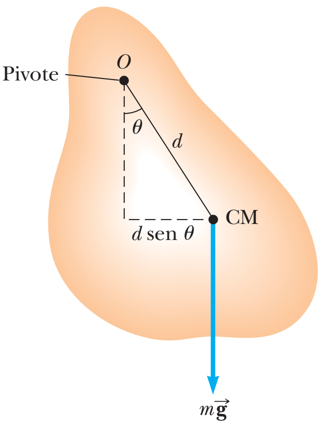


Figura 15.17 Un péndulo físico con centro de eje en O.

Péndulo físico

Suponga que usted equilibra un gancho de alambre de modo que la punta esté sostenida por su dedo índice extendido. Cuando usted da al gancho un pequeño desplazamiento angular (con su otra mano) y luego lo libera, oscila. Si un objeto que cuelga oscila en torno a un eje fijo que no pasa a través de su centro de masa y el objeto no se puede aproximar como una masa puntual, no se puede tratar al sistema como un péndulo simple. En este caso, el sistema se llama **péndulo físico**.

Considere un objeto rígido con centro de eje en un punto O que está a una distancia d del centro de masa (figura 15.17). La fuerza gravitacional proporciona un momento de torsión en torno a un eje a través de O, y la magnitud de dicho momento de torsión es mgd sen θ, donde θ es como se muestra en la figura 15.17. El objeto se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto y usa la forma rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma\, \tau = I\alpha$, donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje a través de O. El resultado es

$$-mgd\,\text{sen}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo negativo indica que el momento de torsión en torno a O tiende a disminuir θ. Es decir, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión restaurador. Si de nuevo se supone que θ es pequeño, la aproximación sen $\theta \approx \theta$ es válido y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta \qquad \textbf{(15.27)}$$

Ya que esta ecuación es de la misma forma que la ecuación 15.3, su solución es la del oscilador armónico simple. Es decir: la solución de la ecuación 15.27 se conoce por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la máxima posición angular y

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo es

Periodo de un péndulo físico ▶

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}} \qquad \textbf{(15.28)}$$

Este resultado se puede usar para medir el momento de inercia de un objeto rígido plano. Si se conoce la posición del centro de masa y, por lo tanto, el valor de d, se obtiene el momento de inercia al medir el periodo. Por último, advierta que la ecuación 15.28 se reduce al periodo de un péndulo simple (ecuación 15.26) cuando $I = md^2$, es decir, cuando toda la masa se concentra en el centro de masa.

EJEMPLO 15.6 **Una barra que se balancea**

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.18). Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

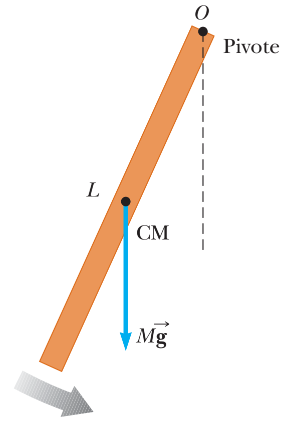


Figura 15.18 (Ejemplo 15.6) Una barra rígida que oscila en torno a un eje a través de un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$ y, de la tabla 10.2, $\frac{1}{3}ML^2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una barra que se balancea de atrás para adelante cuando se articula en un extremo. Inténtelo con una regleta o una pieza de madera.

Categorizar Ya que la barra no es una partícula puntual, se le clasifica como un péndulo físico.

Analizar En el capítulo 10 se encontró que el momento de inercia de una barra uniforme en torno a un eje a través de un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d desde el eje al centro de masa de la barra es $L/2$.

Sustituya estas cantidades en la ecuación 15.28:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(L/2)}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$

Finalizar En uno de los alunizajes, un astronauta que caminaba sobre la superficie de la Luna tenía un cinturón que colgaba de su traje espacial, y el cinturón osciló como un péndulo físico. Un científico en la Tierra observó este movimiento en televisión y lo usó para estimar la aceleración de caída libre en la Luna. ¿Cómo hizo este cálculo el científico?

Péndulo de torsión

La figura 15.19 muestra un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a lo alto de un soporte fijo. Cuando el objeto gira a través de cierto ángulo θ, el alambre que gira ejerce sobre el objeto un momento de torsión restaurador que es proporcional a la posición angular. Es decir,

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ (letra griega kappa) se llama *constante de torsión* del alambre de soporte. El valor de κ se puede obtener al aplicar un momento de torsión conocido para girar el alambre a través de un ángulo mensurable θ. Al aplicar la segunda ley de Newton para movimiento rotacional, se encuentra que

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta \qquad \textbf{(15.29)}$$

De nuevo, este resultado es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple, con $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad \textbf{(15.30)}$$

◄ Periodo de un péndulo de torsión

Este sistema se llama *péndulo de torsión*. En esta situación no hay restricción de ángulo pequeño, en tanto no se supere el límite elástico del alambre.

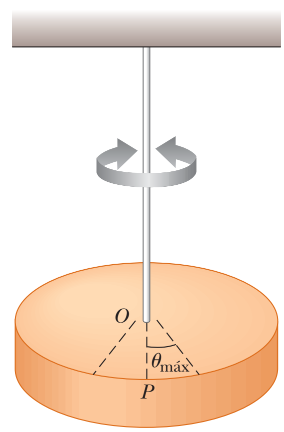


Figura 15.19 Un péndulo de torsión consiste en un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a un soporte rígido. El objeto oscila en torno a la línea OP con una amplitud $\theta_{\text{máx}}$.

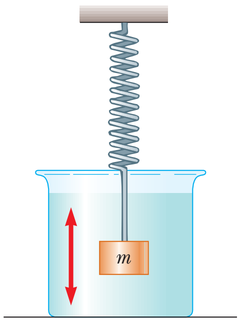


Figura 15.20 Un ejemplo de un oscilador amortiguado es un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

15.6 Oscilaciones amortiguadas

Los movimientos oscilatorios considerados hasta el momento han sido para sistemas ideales: sistemas que oscilan indefinidamente sólo bajo la acción de una fuerza, una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción retardan el movimiento. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está *amortiguado*. La energía mecánica perdida se transforma en energía interna en el objeto y el medio retardador. La figura 15.20 bosqueja uno de tales sistemas: un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Un tipo común de fuerza retardadora es la que se explicó en la sección 6.4, donde la fuerza es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento y actúa en la dirección opuesta a la velocidad del objeto respecto al medio. Con frecuencia, esta fuerza retardadora se observa cuando un objeto se mueve a través de aire, por ejemplo. Ya que la fuerza retardadora se puede expresar como $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ (donde b es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*) y la fuerza restauradora del sistema es $-kx$, se puede escribir la segunda ley de Newton como

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \textbf{(15.31)}$$

La solución a esta ecuación requiere matemática que tal vez no le sea familiar; en este caso simplemente se establece sin prueba. Cuando la fuerza retardadora es pequeña en comparación con la fuerza restauradora máxima (es decir, cuando b es pequeña), la solución a la ecuación 15.31 es

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.32)}$$

donde la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \textbf{(15.33)}$$

Este resultado se puede verificar al sustituir la ecuación 15.32 en la ecuación 15.31. Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama **frecuencia natural** del sistema.

La figura 15.21 muestra la posición como función del tiempo para un objeto que oscila en presencia de una fuerza retardadora. **Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa.** Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**. Las líneas azules discontinuas en la figura 15.21, que definen la *cubierta* de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación 15.32. Esta cubierta muestra que **la amplitud decae exponencialmente con el tiempo**. Para movimiento con una constante de resorte y masa de cierto objeto, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente para valores más grandes de la fuerza retardadora.

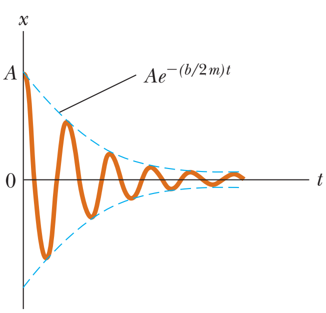


Figura 15.21 Gráfica de posición en función del tiempo para un oscilador amortiguado. Note la disminución en amplitud con el tiempo.

Cuando la magnitud de la fuerza retardadora es pequeña, tal que $b/2m < \omega_0$, se dice que el sistema está **subamortiguado**. El movimiento resultante se representa mediante la curva azul de la figura 15.22. Conforme el valor de b aumenta, la amplitud de las oscilaciones disminuye más y más rápidamente. Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está **críticamente amortiguado**. En este caso, el sistema, una vez liberado del reposo en alguna posición de no equilibrio, se aproxima pero no pasa a través de la posición de equilibrio. La gráfica de posición frente a tiempo para este caso es la curva roja en la figura 15.22.

Si el medio es tan viscoso que la fuerza retardadora es grande en comparación con la fuerza restauradora (es decir, si $b/2m > \omega_0$), el sistema está **sobreamortiguado.** De nuevo, el sistema desplazado, cuando tiene libertad para moverse, no oscila sino simplemente regresa a la posición de equilibrio. Conforme el amortiguamiento aumenta, el intervalo de tiempo requerido para que el sistema se aproxime al equilibrio también aumenta, como indica la curva negra en la figura 15.22. Para sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no hay frecuencia angular ω y la solución en la ecuación 15.32 no es válida.

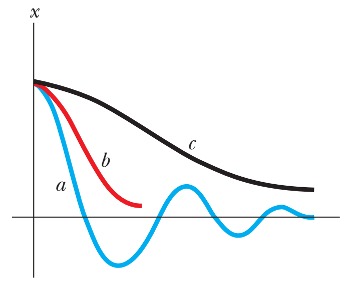


Figura 15.22 Gráficas de posición en función del tiempo para un oscilador subamortiguado (azul, curva a), un oscilador críticamente amortiguado (rojo, curva b) y un oscilador sobreamortiguado (negro, curva c).

15.7 Oscilaciones forzadas

Se ha visto que la energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza resistiva. Es posible compensar esta disminución de energía al aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo en el sistema. En cualquier instante, se puede transferir energía al sistema mediante una fuerza aplicada que actúe en la dirección de movimiento del oscilador. Por ejemplo, un niño en un columpio se puede mantener en movimiento mediante "empujones" adecuadamente cronometrados. La amplitud del movimiento permanece constante si la entrada de energía por cada ciclo de movimiento iguala exactamente la disminución en energía mecánica en cada ciclo que resulta de las fuerzas resistivas.

Un ejemplo común de un oscilador forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía periódicamente, como $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, donde F_0 es una constante y ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. En general, la frecuencia ω de la fuerza impulsora es variable, mientras que la frecuencia natural ω_0 del oscilador es fija por los valores de k y m. La segunda ley de Newton en esta situación produce

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad F_0 \operatorname{sen} \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \textbf{(15.34)}$$

De nuevo, la solución de esta ecuación es más bien larga y no se presentará. Después de que comienza a actuar la fuerza impulsora en un objeto inicialmente estable, la amplitud de la oscilación aumentará. Después de un periodo de tiempo suficientemente largo, cuando la entrada de energía por cada ciclo de la fuerza impulsora sea igual a la cantidad de energía mecánica transformada a energía interna por cada ciclo, se alcanza una condición de estado estacionario en que las oscilaciones proceden con amplitud constante. En esta situación, la solución de la ecuación 15.34 es

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(15.35)}$$

donde

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad \textbf{(15.36)}$$

◄ Amplitud de un oscilador impulsado

y donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador subamortiguado ($b = 0$).

Las ecuaciones 15.35 y 15.36 muestran que el oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora y que la amplitud del oscilador es constante para una fuerza impulsora determinada porque se impulsa en estado estacionario mediante una fuerza externa. Para amortiguamiento pequeño, la amplitud es grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está cerca de la frecuencia natural de oscilación, o cuando $\omega \approx \omega_0$. El dramático aumento en amplitud cerca de la frecuencia natural se llama **resonancia**, y la frecuencia natural ω_0 también se llama la **frecuencia de resonancia** del sistema.

La explicación para oscilaciones de gran amplitud en la frecuencia de resonancia es que la energía se transfiere al sistema bajo las condiciones más favorables. Este concepto se comprende mejor si se considera la primera derivada de x en el tiempo en la ecuación 15.35, que produce una expresión para la velocidad del oscilador. Se encuentra que v es proporcional a $\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, que es la misma función trigonométrica que la descrita por la fuerza impulsora. Por lo tanto, la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ está en fase con la velocidad. La rapidez a la que $\vec{\mathbf{F}}$ realiza trabajo sobre el oscilador es igual al producto punto $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$; esta cantidad

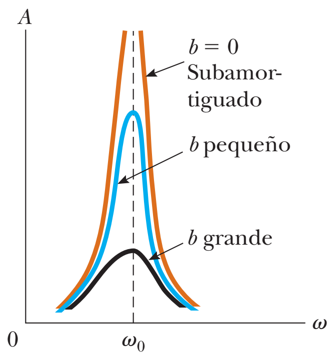


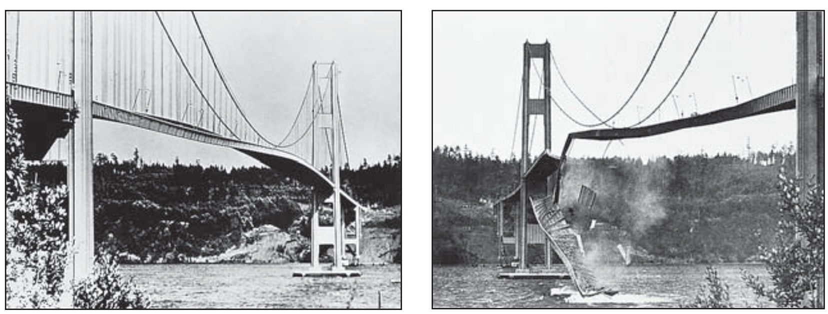
Figura 15.23 Gráfica de amplitud en función de la frecuencia para un oscilador amortiguado cuando está presente una fuerza impulsora periódica. Cuando la frecuencia ω de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural ω_0 del oscilador, presenta resonancia. Advierta que la forma de la curva de resonancia depende del tamaño del coeficiente de amortiguamiento b.

es la potencia entregada al oscilador. Ya que el producto $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ es un máximo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ están en fase, se concluye que, **en resonancia, la fuerza aplicada está en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es un máximo**.

La figura 15.23 es una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin amortiguamiento. Advierta que la amplitud aumenta con amortiguamiento decreciente ($b \rightarrow 0$) y que la curva de resonancia se ensancha a medida que aumenta el amortiguamiento. En ausencia de una fuerza de amortiguamiento ($b = 0$), se ve por la ecuación 15.36 que la amplitud en estado estacionario tiende a infinito conforme ω tiende a ω_0. En otras palabras, si no hay pérdidas en el sistema y se continúa impulsando un oscilador inicialmente sin movimiento con una fuerza periódica que está en fase con la velocidad, la amplitud del movimiento se acumula sin límite (véase la curva café de la figura 15.23). Esta acumulación sin límite no se presenta en la práctica porque en realidad siempre hay presente algún amortiguamiento.

Más adelante en este libro se verá que la resonancia aparece en otras áreas de la física. Por ejemplo, ciertos circuitos eléctricos tienen frecuencias naturales. Un puente tiene frecuencias naturales que se pueden poner en resonancia mediante una fuerza impulsora adecuada. Un ejemplo dramático de tal resonancia se presentó en 1940, cuando el puente Tacoma Narrows, en el estado de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el "aleteo" del viento a través del camino (piense en el "aleteo" de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia emparejó con la del puente. Las oscilaciones del puente resultantes hicieron que a final de cuentas colapsara (figura 15.24) porque el diseño del puente tenía características inadecuadas de seguridad interna.

Muchos otros ejemplos de vibraciones resonantes se pueden citar. Una vibración resonante que puede haber experimentado el lector es el "canturreo" de los cables de teléfono en el viento. Las máquinas se rompen con frecuencia si una parte en vibración está en resonancia con alguna otra parte móvil. Se ha sabido de soldados que, al marchar en cadencia por un puente, establecieron vibraciones resonantes en la estructura y por ello causaron su colapso. Siempre que cualquier sistema físico real sea impulsado cerca de su frecuencia de resonancia, es posible esperar oscilaciones de amplitudes muy grandes.



a) b)

Figura 15.24 a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (*UPI/Bettmann Newsphotos*)

Resumen

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Las energías cinética y potencial de un objeto de masa m que oscila en el extremo de un resorte con constante de fuerza k varían con el tiempo y se conoce por

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.19)}$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.20)}$$

La energía total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y se conoce por

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 \quad \textbf{(15.21)}$$

Un **péndulo simple** de longitud L se mueve en movimiento armónico simple para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical. Su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \textbf{(15.26)}$$

Para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical, un **péndulo físico** se mueve en movimiento armónico simple en torno a un perno que no pasa a través del centro de masa. El periodo de este movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \textbf{(15.28)}$$

donde I es el momento de inercia en torno a un eje a través del eje y d es la distancia desde el eje al centro de masa.

Si un oscilador experimenta una fuerza amortiguadora $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$, su posición para amortiguamiento pequeño está descrita por

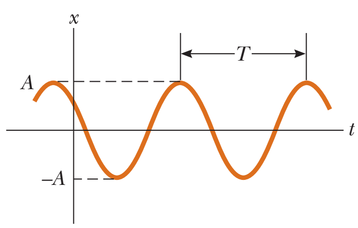
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.32)}$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad \textbf{(15.33)}$$

Si un oscilador está sujeto a una fuerza impulsora sinusoidal $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, muestra **resonancia**, en la cual la amplitud es mayor cuando la frecuencia impulsora ω coincide con la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ del oscilador.

MODELOS DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Partícula en movimiento armónico simple Si una partícula se somete a una fuerza de la forma de la ley de Hooke, $F = -kx$, la partícula muestra **movimiento armónico simple**. Su posición se describe mediante

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \textbf{(15.6)}$$

donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. El valor de ϕ depende de la posición y velocidad iniciales del oscilador.

El **periodo** de la oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \textbf{(15.13)}$$

y el inverso del periodo es la **frecuencia**.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. ¿Una pelota que rebota es un ejemplo de movimiento armónico simple? ¿El movimiento diario de un estudiante desde su casa a la escuela y de regreso es un movimiento armónico simple? ¿Por qué sí o por qué no?

2. **O** Una partícula en un resorte se mueve en movimiento armónico simple a lo largo del eje x entre los puntos de retorno en $x_1 = 100$ cm y $x_2 = 140$ cm. **i)** ¿En cuál de las siguientes posiciones la partícula tiene rapidez máxima? a) 100 cm, b) 110 cm, c) 120 cm, d) alguna otra posición, e) El mismo valor mayor se presenta en múltiples puntos. **ii)** ¿En cuál posición tiene aceleración máxima? Escoja de las mismas posibilidades. **iii)** ¿En cuál posición se ejerce la mayor fuerza neta sobre la partícula? **iv)** ¿En cuál posición la partícula tiene la mayor magnitud de cantidad de movimiento? **v)** ¿En cuál posición la partícula tiene mayor energía cinética? **vi)** ¿En cuál posición el sistema partícula–resorte tiene la mayor energía total?

3. Si la coordenada de una partícula varía como $x = -A \cos \omega t$, ¿cuál es la constante de fase en la ecuación 15.6? ¿En qué posición la partícula está en $t = 0$?

4. **O** Clasifique los periodos de los siguientes sistemas oscilatorios, de mayor a menor. Si algunos periodos son iguales, muestre su igualdad en su clasificación. Cada sistema difiere sólo en una forma del sistema a), que es un deslizador de 0.1 kg sobre una superficie horizontal sin fricción que oscila con 0.1 m de amplitud sobre un resorte con constante de fuerza de 10 N/m. En la situación b), la amplitud es de 0.2 m. En la situación c), la masa es de 0.2 kg. En la situación d), el resorte tiene constante de rigidez de 20 N/m. La situación e) es como la situación a), excepto por estar en un campo gravitacional de 4.9 m/s^2 en lugar de 9.8 m/s^2. La situación f) es como la situación a), excepto que el objeto rebota en movimiento armónico simple sobre el extremo inferior del resorte que cuelga verticalmente. La situación g) es como la situación a), excepto que una pequeña fuerza resistiva hace subamortiguado al movimiento.

5. **O** Para un oscilador armónico simple, la posición se mide como el desplazamiento desde el equilibrio. a) ¿Las cantidades posición y velocidad pueden estar en la misma dirección? b) ¿La velocidad y la aceleración pueden estar en la misma dirección? c) ¿La posición y la aceleración pueden estar en la misma dirección?

6. **O** La parte superior de un resorte se mantiene fija. Un bloque cuelga en el extremo inferior y se mide la frecuencia f de la oscilación del sistema. El bloque, un segundo bloque idéntico y el resorte se llevan al trasbordador espacial para orbitar la Tierra. Los dos bloques se unen a los extremos del resorte. El resorte se comprime, sin hacer que espiras adyacentes se toquen, y el sistema se libera para oscilar mientras flota dentro de la cabina del trasbordador. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación para este sistema en términos de f? a) $f/4$, b) $f/2$, c) $f/\sqrt{2}$, d) f, e) $\sqrt{2}f$, f) $2f$, g) $4f$.

7. **O** Usted une un bloque al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente. Deja que el bloque se mueva despacio hacia abajo y encuentra que cuelga en reposo con el resorte estirado 15.0 cm. A continuación, levanta el bloque de nuevo y lo libera desde el reposo con el resorte no estirado. ¿Qué distancia máxima se mueve hacia abajo? a) 7.5 cm, b) 15.0 cm, c) 30.0 cm, d) 60.0 cm, e) No se puede determinar la distancia sin conocer la masa y la constante del resorte.

8. Las ecuaciones que se mencionan en la tabla 2.2 dan la posición como una función del tiempo, la velocidad como una función del tiempo y la velocidad como función de la posición para un objeto que se mueve en línea recta con aceleración constante. La cantidad v_{xi} aparece en cada ecuación. ¿Alguna de estas ecuaciones se aplica a un objeto que se mueve en línea recta con movimiento armónico simple? Con un formato similar, haga una tabla de ecuaciones que describan el movimiento armónico simple. Incluya ecuaciones que den la aceleración como una función del tiempo y la aceleración como una función de la posición. Establezca las ecuaciones en tal forma que se apliquen igualmente a un sistema bloque–resorte, a un péndulo y a otros sistemas en vibración. ¿Qué cantidad aparece en cada ecuación?

9. **O** Un péndulo simple tiene un periodo de 2.5 s. **i)** ¿Cuál es su periodo, si su longitud se hace cuatro veces más grande? a) 0.625 s, b) 1.25 s, c) 2.5 s, d) 3.54 s, e) 5 s, f) 10 s. **ii)** ¿Cuál es su periodo si, en lugar de cambiar su longitud, la masa de la plomada suspendida se hace cuatro veces más grande? Elija entre las mismas posibilidades.

10. **O** Un péndulo simple está suspendido del techo de un elevador estable y se determina el periodo. **i)** Cuando el elevador acelera hacia arriba, ¿el periodo es a) mayor, b) menor o c) no cambia? **ii)** Cuando el elevador tiene aceleración hacia abajo, ¿el periodo es a) mayor, b) menor o c) no cambia? **iii)** Cuando el elevador se mueve con velocidad constante hacia arriba, ¿el periodo del péndulo es a) mayor, b) menor o c) no cambia?

11. La figura P15.11 muestra gráficas de la energía potencial de cuatro sistemas diferentes en función de la posición de una partícula en cada sistema. Cada partícula se pone en movimiento con un empujón en una ubicación elegida arbitrariamente. Describa su movimiento posterior en cada caso a), b), c) y d).

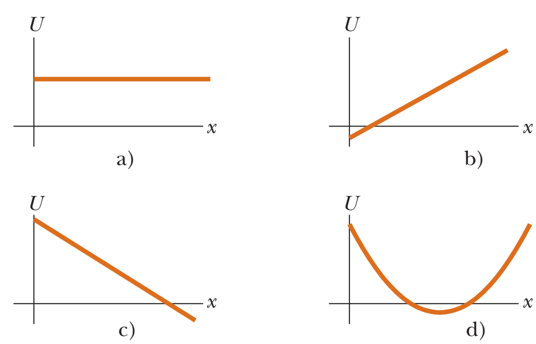


Figura P15.11

12. Un péndulo simple se puede modelar como uno de movimiento armónico simple cuando θ es pequeño. ¿El movimiento es periódico cuando θ es grande? ¿Cómo varía el periodo del movimiento conforme θ aumenta?

13. La energía mecánica de un sistema bloque–resorte no amortiguado es constante a medida que la energía cinética se transforma en energía potencial elástica y viceversa. Para comparar,

explique en los mismos términos qué sucede a la energía de un oscilador amortiguado.

14. Un estudiante cree que cualquier vibración real debe ser amortiguada. ¿El estudiante tiene razón? Si es así, proporcione un razonamiento convincente. Si no, dé un ejemplo de una vibración real que mantenga amplitud constante por siempre, si el sistema está aislado.

15. ¿Se presentarían oscilaciones amortiguadas para cualquier valor de b y k? Explique.

16. ¿Es posible tener oscilaciones amortiguadas cuando un sistema está en resonancia? Explique.

17. Usted está de pie en el borde de un trampolín y rebota para ponerlo en oscilación. Encuentra una respuesta máxima, en términos de la amplitud de oscilación del borde del trampolín, cuando rebote a la frecuencia f. Ahora se mueve a la mitad del trampolín y repite el experimento. ¿La frecuencia de resonancia para oscilaciones forzadas en este punto es mayor, menor o la misma que f? ¿Por qué?

18. Usted observa un pequeño árbol frondoso. No nota brisa y la mayoría de las hojas en el árbol están sin movimiento. Sin embargo, una hoja se agita salvajemente de atrás para adelante. Después de un rato, la hoja deja de moverse y usted nota que una hoja diferente se mueve mucho más que todas las demás. Explique qué podría causar el gran movimiento de una hoja particular.

19. La plomada de cierto péndulo es una esfera llena con agua. ¿Qué ocurriría a la frecuencia de vibración de este péndulo si hubiera un orificio en la esfera que permitiera al agua salir lentamente?

Problemas

Nota: Ignore la masa de cada resorte, excepto en los problemas 62 y 64.

Sección 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Los problemas 16, 17, 18, 26 y 60 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

1. ● Se deja caer una bola desde una altura de 4.00 m que realiza una colisión elástica con el suelo. Si supone que no hay pérdida de energía mecánica debida a resistencia del aire, a) demuestre que el movimiento resultante es periódico y b) determine el periodo del movimiento. c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.

Sección 15.2 Partícula en movimiento armónico simple

2. En un motor, un pistón oscila con movimiento armónico simple de modo que su posición varía de acuerdo con la expresión

$$x = (5.00 \text{ cm}) \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

donde x está en centímetros y t en segundos. En $t = 0$, encuentre a) la posición de la partícula, b) su velocidad y c) su aceleración. d) Encuentre el periodo y amplitud del movimiento.

3. La posición de una partícula se conoce por la expresión $x = (4.00 \text{ m}) \cos(3.00\pi t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine: a) la frecuencia y periodo del movimiento, b) la amplitud del movimiento, c) la constante de fase y d) la posición de la partícula en $t = 0.250$ s.

4. ● a) Un resorte que cuelga se estira 35.0 cm cuando un objeto de 450 g de masa se cuelga de él en reposo. En esta situación se define su posición como $x = 0$. El objeto se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. ¿Cuál es su posición x en un momento 84.4 s más tarde? b) **¿Qué pasaría si?** Otro resorte que cuelga se estira 35.5 cm cuando un objeto de 440 g de masa se cuelga de él en reposo. Esta nueva posición se define como $x = 0$. Dicho objeto también se jala hacia abajo 18.0 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. Encuentre su posición 84.4 s más tarde. c) ¿Por qué las respuestas a los incisos a) y b) son diferentes en un porcentaje tan grande cuando los datos son tan similares? ¿Esta circunstancia revela una dificultad fundamental para calcular el futuro? d) Encuentre la distancia recorrida por el objeto en vibración del inciso a). e) Encuentre la distancia recorrida por el objeto en el inciso b).

5. Una partícula que se mueve a lo largo del eje x en movimiento armónico simple parte de su posición de equilibrio, el origen, en $t = 0$ y se mueve a la derecha. La amplitud de su movimiento es de 2.00 cm y la frecuencia de 1.50 Hz. a) Demuestre que la posición de la partícula se conoce por

$$x = (2.00 \text{ cm}) \operatorname{sen}(3.00\pi t)$$

Determine b) la rapidez máxima y el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta rapidez, c) la aceleración máxima y el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta aceleración, y d) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.

6. Un oscilador armónico simple tarda 12.0 s en someterse a cinco vibraciones completas. Encuentre a) el periodo de su movimiento, b) la frecuencia en hertz y c) la frecuencia angular en radianes por segundo.

7. Un objeto de 7.00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical amarrado a una viga. El objeto se pone a oscilar verticalmente con un periodo de 2.60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.

8. **Problema de repaso.** Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Al inicio está en la posición 0.270 m, y se mueve con velocidad de 0.140 m/s y aceleración de -0.320 m/s^2. Suponga que se mueve con aceleración constante durante 4.50 s. Encuentre a) su posición y b) su velocidad al final de este intervalo de tiempo. A continuación, suponga que se mueve con movimiento armónico simple durante 4.50 s y $x = 0$ es su posición de equilibrio. Encuentre c) su posición y d) su velocidad al final de este intervalo de tiempo.

9. Un pistón en un motor a gasolina está en movimiento armónico simple. Si considera los extremos de su posición relativa con su punto central como ± 5.00 cm, encuentre la velocidad máxima y la aceleración del pistón cuando el motor está funcionando a 3 600 rev/min.

10. Un deslizador de 1.00 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 25.0 N/m, oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. En $t = 0$, el deslizador se libera desde el reposo en $x = -3.00$ cm. (Es decir: el resorte se comprime 3.00 cm.) Encuentre a) el periodo de su movimiento, b) los valores máximos de su rapidez y aceleración, y c) la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

11. Un objeto de 0.500 kg, unido a un resorte con constante de fuerza de 8.0 N/m, vibra en movimiento armónico simple con una amplitud de 10.0 cm. Calcule a) el máximo valor de su rapidez y aceleración, b) la rapidez y aceleración cuando el objeto está a 6.00 cm de la posición de equilibrio, y c) el intervalo de tiempo requerido para que el objeto se mueva de $x = 0$ a $x = 8.00$ cm.

12. ● Usted une un objeto al extremo inferior de un resorte vertical que cuelga en reposo después de extender el resorte 18.3 cm. Luego pone el objeto a vibrar. ¿Tiene suficiente información para encontrar su periodo? Explique su respuesta y establezca lo que pueda acerca de su periodo.

13. Un objeto de 1.00 kg se une a un resorte horizontal. El resorte inicialmente se estira 0.100 m y ahí se libera el objeto desde el reposo. Éste comienza a moverse sin fricción. La siguiente vez que la rapidez del objeto es cero es 0.500 s después. ¿Cuál es la rapidez máxima del objeto?

Sección 15.3 Energía del oscilador armónico simple

14. Un bloque de 200 g se une a un resorte horizontal y ejecuta movimiento armónico simple con un periodo de 0.250 s. La energía total del sistema es de 2.00 J. Encuentre a) la constante de fuerza del resorte y b) la amplitud del movimiento.

15. Un automóvil que tiene 1 000 kg de masa se conduce hacia una pared de ladrillo en una prueba de seguridad. La defensa del automóvil se comporta como un resorte con constante de 5.00×10^6 N/m y se comprime 3.16 cm mientras el auto se lleva al reposo. ¿Cuál fue la rapidez del automóvil antes del impacto, si supone que no hay pérdida de energía mecánica durante el impacto con la pared?

16. Un sistema bloque–resorte oscila con una amplitud de 3.50 cm. La constante de resorte es 250 N/m y la masa del bloque es 0.500 kg. Determine a) la energía mecánica del sistema, b) la rapidez máxima del bloque y c) la aceleración máxima.

17. Un objeto de 50.0 g, conectado a un resorte con una constante de fuerza de 35.0 N/m, oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 4.00 cm. Encuentre a) la energía total del sistema y b) la rapidez del objeto cuando la posición es de 1.00 cm. Encuentre c) la energía cinética y d) la energía potencial cuando la posición es de 3.00 cm.

18. Un objeto de 2.00 kg se une a un resorte y se coloca sobre una superficie horizontal uniforme. Se requiere una fuerza horizontal de 20.0 N para mantener al objeto en reposo cuando se jala 0.200 m desde su posición de equilibrio (el origen del eje x). Ahora el objeto se libera desde el reposo con una posición inicial $x_i = 0.200$ m y se somete a sucesivas oscilaciones armónicas simples. Encuentre a) la constante de fuerza del resorte, b) la frecuencia de las oscilaciones y c) la rapidez máxima del objeto. ¿Dónde se presenta la rapidez máxima? d) Encuentre la aceleración máxima del objeto. ¿Dónde se presenta? e) Encuentre la energía total del sistema oscilante. Encuentre f) la rapidez y g) la aceleración del objeto cuando su posición es igual a un tercio del valor máximo.

19. Una partícula ejecuta movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿En qué posición su rapidez es igual a la mitad de su rapidez máxima?

20. Una saltadora de *bungee* de 65.00 kg salta de un puente con una cuerda ligera amarrada a ella y al puente (figura P15.20). La longitud no estirada de la cuerda es de 11.0 m. La saltadora alcanza el fondo de su movimiento 36.0 m abajo del puente antes de rebotar de regreso. Su movimiento se puede separar en una caída libre de 11.0 m y una sección de 25.0 m de oscilación armónica simple. a) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en caída libre? b) Use el principio de conservación de la energía para hallar la constante de resorte de la cuerda *bungee*. c) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza del resorte equilibra la fuerza gravitacional ejercida sobre la saltadora? Este punto se considera como el origen de la descripción matemática de la oscilación armónica simple. d) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? e) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la cuerda se estire 25.0 m? f) ¿Cuál es el intervalo de tiempo total para todo el salto de 36.0 m?

Telegraph Colour Library/FPG International

Figura P15.20 Problemas 20 y 54.

21. Un carro unido a un resorte con constante de 3.24 N/m vibra de tal modo que su posición se conoce por la función $x = (5.00 \text{ cm}) \cos (3.60t \text{ rad/s})$. a) Durante el primer ciclo, para $0 < t < 1.75$ s, ¿a qué valor de t cambia más rápidamente la energía potencial del sistema en energía cinética? b) ¿Cuál es la rapidez máxima de transformación de energía?

Sección 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

22. ● Considere el motor simplificado de un solo pistón de la figura P15.22. Si supone que la rueda da vueltas con rapidez angular constante, explique por qué la barra del pistón oscila en movimiento armónico simple.

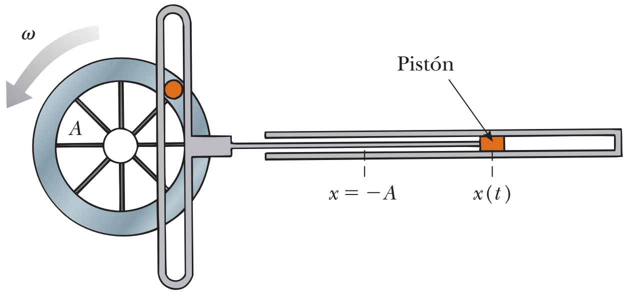


Figura P15.22

23. ● Mientras viaja detrás de un automóvil a 3.00 m/s, advierte que una de las llantas del automóvil tiene un pequeño chichón en el borde, como se muestra en la figura P15.23. a) Explique por qué el chichón, desde su punto de vista detrás del automóvil, ejecuta movimiento armónico simple. b) Si el radio de la llanta del automóvil es de 0.300 m, ¿cuál es el periodo de oscilación del chichón?

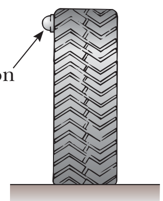


Figura P15.23

Sección 15.5 El péndulo

El problema 52 del capítulo 1 también se puede asignar en esta sección.

24. Un "péndulo segundero" es aquel que se mueve a través de su posición de equilibrio una vez cada segundo. (El periodo del péndulo es precisamente 2 s.) La longitud de un péndulo segundero es de 0.992 7 m en Tokyo, Japón, y de 0.994 2 m en Cambridge, Inglaterra. ¿Cuál es la relación de las aceleraciones en caída libre en estas dos ubicaciones?

25. ● Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Se desplaza a través de un ángulo de 15.0° y luego se libera. ¿Cuáles son a) la rapidez máxima, b) la aceleración angular máxima y c) la fuerza restauradora máxima? **¿Qué pasaría si?** Resuelva este problema mediante el modelo de movimiento armónico simple para el movimiento del péndulo y luego resuelva el problema con principios más generales. Compare las respuestas.

26. La posición angular de un péndulo se representa mediante la ecuación $\theta = (0.032\,0 \text{ rad}) \cos \omega t$, donde θ está en radianes y $\omega = 4.43$ rad/s. Determine el periodo y la longitud del péndulo.

27. Una partícula de masa m se desliza sin fricción dentro de un tazón hemisférico de radio R. Demuestre que, si la partícula parte del reposo con un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual al de un péndulo simple de longitud R. Es decir, $\omega = \sqrt{g/R}$.

28. **Problema de repaso.** Un péndulo simple tiene 5.00 m de longitud. a) ¿Cuál es el periodo de oscilaciones pequeñas para este péndulo, si se ubica en un elevador que acelera hacia arriba a 5.00 m/s^2? b) ¿Cuál es su periodo si el elevador acelera hacia abajo a 5.00 m/s^2? c) ¿Cuál es el periodo de este péndulo si se coloca en un camión que acelera horizontalmente a 5.00 m/s^2?

29. Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 0.450 Hz. El péndulo tiene una masa de 2.20 kg y el eje se ubica a 0.350 m del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.

30. Un objeto pequeño se une al extremo de un resorte para formar un péndulo simple. El periodo de su movimiento armónico se mide para pequeños desplazamientos angulares y tres longitudes. Para cada longitud, el intervalo de tiempo para 500 oscilaciones se mide con un cronómetro. Para longitudes de 1.000 m, 0.750 m y 0.500 m, se miden los intervalos de tiempo total de 99.8 s, 86.6 s y 71.1 s para 50 oscilaciones. a) Determine el periodo de movimiento para cada longitud. b) Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelas con el valor aceptado. c) Grafique T^2 con L y obtenga un valor para g a partir de la pendiente de su gráfica de línea recta de mejor ajuste. Compare este valor con el obtenido en el inciso b).

31. Considere el péndulo físico de la figura 15.17. a) Represente su momento de inercia en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa y paralelo al eje que pasa a través de su punto de giro como I_{CM}. Demuestre que su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$$

donde d es la distancia entre el punto de giro y el centro de masa. b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{CM}$.

32. Una barra rígida muy ligera con una longitud de 0.500 m se extiende recta desde un extremo de una regleta. La regleta está suspendida de un eje en el extremo lejano de la barra y se pone en oscilación. a) Determine el periodo de oscilación. *Sugerencia:* Use el teorema de ejes paralelos de la sección 10.5. b) ¿En qué porcentaje difiere del periodo de un péndulo simple de 1.00 m de largo?

33. El volante de un reloj (figura P15.33) tiene un periodo de oscilación de 0.250 s. La rueda está construida de modo que su masa de 20.0 g se concentra alrededor de un borde de 0.500 cm de radio. ¿Cuáles son a) el momento de inercia del volante y b) la constante de torsión del resorte unido?

George Semple

Figura P15.33

Sección 15.6 Oscilaciones amortiguadas

34. Demuestre que la relación de cambio con el tiempo de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no impulsado se conoce por $dE/dt = -bv^2$ y por eso siempre es negativa. Para hacerlo, derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, y use la ecuación 15.31.
35. Un péndulo con una longitud de 1.00 m se libera desde un ángulo inicial de 15.0°. Después de 1 000 s, su amplitud se reduce por fricción a 5.50°. ¿Cuál es el valor de $b/2m$?
36. Demuestre que la ecuación 15.32 es una solución de la ecuación 15.31 siempre que $b^2 < 4mk$.
37. Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de 2.05×10^4 N/m. El efecto de la resistencia del aire se representa mediante el coeficiente de amortiguamiento $b = 3.00$ N · s/m. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? c) Encuentre el intervalo de tiempo que transcurre mientras la energía del sistema cae a 5.00% de su valor inicial.

Sección 15.7 Oscilaciones forzadas

38. Un bebé se regocija durante el día haciendo sonidos y rebotando arriba y abajo en su cuna. Su masa es de 12.5 kg y el colchón de la cuna se modela como un resorte ligero con constante de fuerza de 4.30 kN/m. a) La bebé pronto aprende a rebotar con máxima amplitud y mínimo esfuerzo al doblar sus rodillas, ¿a qué frecuencia? b) Ella aprende a usar el colchón como trampolín y pierde contacto con él durante parte de cada ciclo, ¿cuándo su amplitud supera qué valor?
39. Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción y es impulsado por una fuerza externa conocida por $F = (3.00 \text{ N})$ sen $(2\pi t)$. La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine a) el periodo y b) la amplitud del movimiento.
40. Si considera un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), demuestre que la ecuación 15.35 es una solución de la ecuación 15.34, con una amplitud conocida por la ecuación 15.36.
41. Un bloque que pesa 40.0 N está suspendido de un resorte que tiene una constante de fuerza de 200 N/m. El sistema no está amortiguado y está sujeto a una fuerza impulsora armónica de 10.0 Hz de frecuencia, lo que resulta en una amplitud de movimiento forzado de 2.00 cm. Determine el valor máximo de la fuerza impulsora.
42. El amortiguamiento es despreciable para un objeto de 0.150 kg que cuelga de un resorte ligero de 6.30 N/m. Una fuerza sinusoidal, con una amplitud de 1.70 N, impulsa al sistema. ¿A qué frecuencia la fuerza hará vibrar al objeto con una amplitud de 0.440 m?
43. Usted es un biólogo investigador. Aun cuando las baterías de emergencia del localizador están bajas, lleva el localizador a un fino restaurante. Configura el pequeño localizador para que vibre en lugar de sonar y lo coloca en un bolsillo lateral de su abrigo. El brazo de su silla presiona la ligera ropa contra su cuerpo en un punto. El tejido, con una longitud de 8.21 cm, cuelga libremente bajo dicho punto, con el localizador en el fondo. Un colaborador necesita urgentemente instrucciones y le marca desde el laboratorio. El movimiento del localizador hace que la parte colgante de su abrigo se balancee de atrás para adelante con una amplitud notablemente grande. El mesero, el capitán, el catador y los comensales cercanos lo notan inmediatamente y quedan en silencio. Su hija, con voz chillona, dice, con suficiente precisión, "¡Papi, mira! ¡Tus cucarachas debieron salirse otra vez!" Encuentre la frecuencia a la que vibra su localizador.

Problemas adicionales

44. ● **Problema de repaso.** El problema extiende el razonamiento del problema 54 del capítulo 9. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. El deslizador uno tiene masa $m_1 = 0.240$ kg y velocidad $0.740\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Tendrá una colisión posterior con el deslizador numero dos, de masa $m_2 = 0.360$ kg, que tiene velocidad original $0.120\hat{\mathbf{i}}$ m/s. Un resorte ligero con constante de fuerza de 45.0 N/m se une al extremo posterior del deslizador dos, como se muestra en la figura P9.54. Cuando el deslizador uno toca el resorte, un súper pegamento hace que instantánea e inmediatamente se pegue a su extremo del resorte. a) Encuentre la velocidad común que tienen los dos deslizadores cuando la compresión del resorte es un máximo. b) Encuentre la distancia máxima de compresión de resorte. c) Argumente que el movimiento después de que los deslizadores quedan unidos consiste en el centro de masa del sistema de dos deslizadores que se mueven con la velocidad constante encontrada en el inciso a) mientras ambos deslizadores oscilan en movimiento armónico simple relativo con el centro de masa. d) Encuentre la energía del movimiento del centro de masa. e) Encuentre la energía de la oscilación.
45. ● Un objeto de masa m se mueve en movimiento armónico simple con 12.0 cm de amplitud en un resorte ligero. Su aceleración máxima es 108 cm/s^2. Considere m como variable. a) Encuentre el periodo T del objeto. b) Encuentre su frecuencia f. c) Halle la rapidez máxima $v_{\text{máx}}$ del objeto. d) Localice la energía E de la vibración. e) Encuentre la constante de fuerza k del resorte. f) Describa el patrón de dependencia de cada una de las cantidades T, F, $v_{\text{máx}}$, E y k en m.
46. ● **Problema de repaso.** Una roca descansa sobre una acera de concreto. Se presenta un terremoto, que mueve al suelo verticalmente en movimiento armónico con una frecuencia constante de 2.40 Hz y con amplitud gradualmente creciente. a) ¿Con qué amplitud vibra el suelo cuando la roca comienza a perder contacto con la acera? Otra roca está asentada sobre el concreto en el fondo de una alberca llena con agua. El terremoto sólo produce movimiento vertical, así que el agua no salpica de lado a lado. b) Presente un argumento convincente de que, cuando el suelo vibra con la amplitud encontrada en el inciso a), la roca sumergida también apenas pierde contacto con el suelo de la alberca.
47. Una bola pequeña de masa M está unida al extremo de una barra uniforme de igual masa M y longitud L que está articulada en la parte superior (figura P15.47). a) Determine las tensiones en la barra en el eje y en el punto P cuando el sistema es estable. b) Calcule el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos desde el equilibrio y determine este periodo para $L = 2.00$ m. *Sugerencia:* Modele el objeto en el extremo de la barra como una partícula y use la ecuación 15.28.

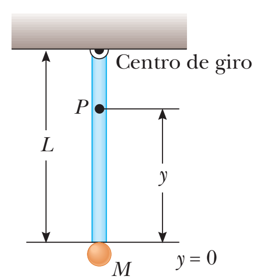


Figura P15.47

48. Un objeto de masa $m_1 = 9.00$ kg está en equilibrio, conectado a un resorte ligero de constante $k = 100$ N/m que está sujeto a una pared como se muestra en la figura P15.48a. Un segundo objeto, $m_2 = 7.00$ kg, se empuja lentamente contra m_1, lo que comprime al resorte la cantidad $A = 0.200$ m (véase la figura P15.48b). Luego el sistema se libera y ambos objetos comienzan a moverse hacia la derecha sobre la superficie sin fricción. a) Cuando m_1 alcanza el punto de equilibrio, m_2 pierde contacto con m_1 (véase la figura P15.48c) y se mueve hacia la derecha con rapidez v. Determine el valor de v. b) ¿Qué tan separado están los objetos cuando el resorte se estira completamente por primera vez (D en la figura P15.48d)? *Sugerencia:* Primero determine el periodo de oscilación y la amplitud del sistema m_1–resorte, después de que m_2 pierde contacto con m_1.

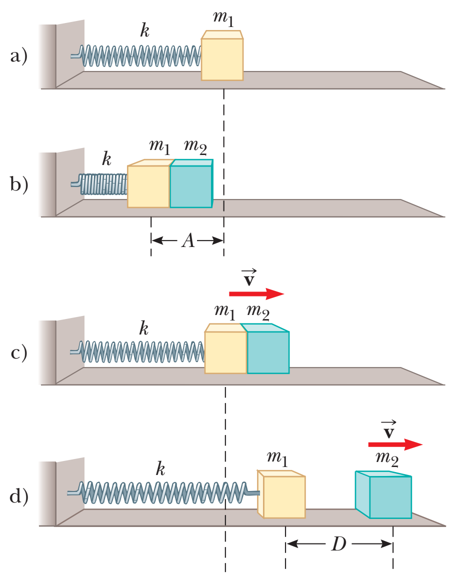


Figura P15.48

49. Un gran bloque P realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción, con una frecuencia $f = 1.50$ Hz. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.49, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es $\mu_s = 0.600$. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque B no se desliza?

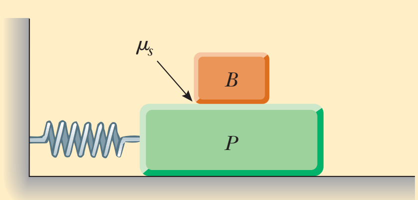


Figura P15.49 Problemas 49 y 50.

50. Un gran bloque P realiza movimiento armónico simple horizontal mientras se desliza a través de una superficie sin fricción con una frecuencia f. El bloque B descansa sobre él, como se muestra en la figura P15.49, y el coeficiente de fricción estática entre los dos es μ_s. ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener si el bloque superior no se desliza?

51. La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la de la molécula de hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de vibración del H_2 es 1.30×10^{14} Hz, ¿cuál es la frecuencia de vibración del D_2? Suponga que la "constante de resorte" de las fuerzas atractivas es la misma para las dos moléculas.

52. ● *Ahora puede analizar más completamente la situación del problema 54 del capítulo 7.* Dos bolas de acero, cada una de 25.4 cm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5.00 m/s. Chocan de manera frontal y rebotan elásticamente. a) ¿Su interacción dura sólo un instante o un intervalo de tiempo distinto de cero? Establezca su evidencia. b) Una de las bolas se aprieta en un tornillo de banco mientras se realizan mediciones precisas de la cantidad de compresión resultante. Suponga que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la bola. Como dato, una fuerza de 16.0 kN que ejerce cada mandíbula del tornillo reduce el diámetro en 0.200 mm. Al modelar la bola como un resorte, encuentre su constante de resorte. c) Suponga que las bolas tienen la densidad del hierro. Calcule la energía cinética de cada bola antes de que las bolas choquen. d) Modele cada bola como una partícula con un resorte sin masa como su defensa frontal. Sea que la partícula tiene la energía cinética encontrada en el inciso c) y que la defensa tiene la constante de resorte encontrada en el inciso b). Calcule la cantidad de compresión máxima que cada bola experimenta cuando las bolas chocan. e) Modele el movimiento de cada bola, mientras las bolas están en contacto, como la mitad de un ciclo de movimiento armónico simple. Calcule el intervalo de tiempo durante el que las bolas están en contacto.

53. Un contenedor cúbico ligero de volumen a^3 al inicio está lleno con un líquido de densidad de masa ρ. El cubo inicialmente está soportado por un resorte ligero para formar un péndulo simple de longitud L_i, medida desde el centro de masa del contenedor lleno, donde $L_i >> a$. Al líquido se le permite fluir desde el fondo del contenedor a una rapidez constante (dM/dt). En cualquier tiempo t, el nivel del fluido en el contenedor es h y la longitud del péndulo es L (medida relativa con el centro de masa instantáneo). a) Bosqueje el aparato y etiquete las dimensiones a, h, L_i y L. b) Encuentre la rapidez de cambio en el tiempo del periodo como función del tiempo t. c) Encuentre el periodo como función del tiempo.

54. Después de una caída emocionante, los saltadores *bungee* rebotan libremente en la cuerda durante muchos ciclos (figura P15.20). Después de los primeros ciclos, la cuerda no queda floja. Su hermano menor se puede convertir en plaga si calcula la masa de cada persona al usar una proporción que usted establece para resolver este problema: un objeto de masa m oscila libremente en un resorte vertical con un periodo T. Otro objeto de masa desconocida m' en el mismo resorte oscila con un periodo T'. Determine a) la constante de resorte y b) la masa desconocida.

55. Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte con constante de fuerza k conectado a él a una distancia h bajo su punto de suspensión (figura P15.55). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para pequeños valores de la amplitud (θ pequeño). Suponga que la barra de suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.

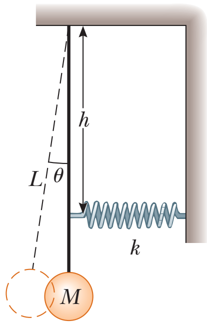


Figura P15.55

56. Una partícula con una masa de 0.500 kg está unida a un resorte con una constante de fuerza de 50.0 N/m. En el momento en que $t = 0$, la partícula tiene su rapidez máxima de 20.0 m/s y es móvil a la izquierda. a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula y especifique su posición como función del tiempo. b) ¿Dónde, en el movimiento la energía potencial, es tres veces la energía cinética? c) Encuentre la longitud de un péndulo simple con el mismo periodo. d) Encuentre el intervalo de tiempo mínimo requerido para que la partícula se mueva de $x = 0$ a $x = 1.00$ m.

57. Un tablón horizontal de masa m y longitud L se articula en un extremo. El otro extremo del tablón está sostenido por un resorte con constante de fuerza k (figura P15.57). El momento de inercia del tablón en torno al eje es $\frac{1}{3}mL^2$. El tablón se desplaza un ángulo pequeño θ desde su posición de equilibrio horizontal y se libera. a) Demuestre que el tablón se mueve con movimiento armónico simple con frecuencia angular $\omega = \sqrt{3k/m}$. b) Evalúe la frecuencia, considere que la masa es de 5.00 kg y la constante de fuerza del resorte es 100 N/m.

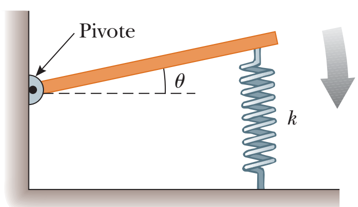


Figura P15.57

58. ● **Problema de repaso.** Una partícula de 4.00 kg de masa está unida a un resorte con una constante de fuerza de 100 N/m. La cual oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 2.00 m. Un objeto de 6.00 kg se deja caer verticalmente en la parte superior del objeto de 4.00 kg mientras pasa a través de su punto de equilibrio. Los dos objetos quedan pegados. a) ¿Por cuánto cambia la amplitud del sistema en vibración como resultado de la colisión? b) ¿Por cuanto cambia el periodo? c) ¿Por cuánto cambia la energía? d) Explique el cambio en energía.

59. Un péndulo simple con una longitud de 2.23 m y una masa de 6.47 kg recibe una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que se somete a movimiento armónico simple. Determine su a) periodo, b) energía total y c) máximo desplazamiento angular.

60. **Problema de repaso.** Un extremo de un resorte ligero, con constante de fuerza de 100 N/m, se une a una pared vertical. Una cuerda ligera se amarra al otro extremo del resorte horizontal. La cuerda cambia de horizontal a vertical conforme pasa sobre una polea sólida de 4.00 cm de diámetro. La polea es libre de girar sobre un eje fijo uniforme. La sección vertical de la cuerda sostiene un objeto de 200 g. La cuerda no se desliza en su contacto con la polea. Encuentre la frecuencia de oscilación del objeto, si supone que la masa de la polea es a) despreciable, b) 250 g y c) 750 g.

61. ● Quienes viajan en motocicletas y bicicletas aprenden a prestar atención a los baches en el camino, y en especial a las *tablas de lavar*, una condición en la que muchos bordes igualmente espaciados se forman en el camino. ¿Qué es tan malo en las tablas de lavar? Una motocicleta tiene muchos resortes y amortiguadores en su suspensión, pero usted puede modelarla como un solo resorte que sostiene un bloque. Puede estimar la constante de fuerza al pensar en cuánto se comprime el resorte cuando un motociclista pesado conduce. Un motociclista que viaja con rapidez de carretera debe tener particular cuidado de los baches en forma de tablas de lavar que están separados cierta distancia. ¿Cuál es el orden de magnitud de su distancia de separación? Establezca las cantidades que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

62. Un bloque de masa M está conectado a un resorte de masa m y oscila en movimiento armónico simple sobre una pista horizontal sin fricción (figura P15.62). La constante de fuerza del resorte es k y la longitud de equilibrio es ℓ. Suponga que todas las porciones del resorte oscilan en fase y que la velocidad de un segmento dx es proporcional a la distancia x desde el extremo fijo; esto es, $v_x = (x/\ell)v$. Además, advierta que la masa de un segmento del resorte es $dm = (m/\ell)\,dx$. Encuentre a) la energía cinética del sistema cuando el bloque tiene una rapidez v y b) el periodo de oscilación.

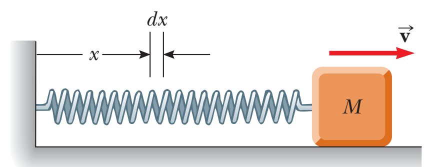


Figura P15.62

63. Una bola de masa m se conecta a dos bandas de hule de longitud L, cada una bajo tensión T, como se muestra en la figura P15.63. La bola se desplaza una pequeña distancia y perpendicular a la longitud de las bandas de hule. Si supone que la tensión no cambia, demuestre que a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$ y b) el sistema muestra movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

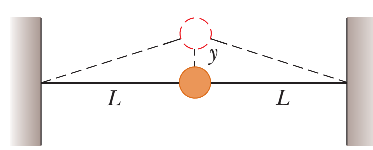


Figura P15.63

64. Cuando un bloque de masa M, conectado al extremo de un resorte de masa $m_s = 7.40$ g y constante de fuerza k, se pone en movimiento armónico simple, el periodo de su movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m_s/3)}{k}}$$

Se conduce un experimento en dos partes con el uso de bloques de diferentes masas suspendidas verticalmente del resorte, como se muestra en la figura P15.64. a) Extensiones estáticas de 17.0, 29.3, 35.3, 41.3, 47.1 y 49.3 cm se miden para valores de M de 20.0, 40.0, 50.0, 60.0, 70.0 y 80.0 g, respectivamente. Construya una gráfica de Mg con x y realice un ajuste lineal por mínimos cuadrados a los datos. De la pendiente de su gráfica, determine un valor para k de este resorte. b) El sistema ahora se pone en movimiento armónico simple y se miden los periodos con cronómetro. Con $M = 80.0$ g, el intervalo de tiempo total requerido para 10 oscilaciones se mide en 13.41 s. El experimento se repite con valores M de 70.0, 60.0, 50.0, 40.0 y 20.0 g, con intervalos de tiempo correspondientes para 10 oscilaciones de 12.52, 11.67, 10.67, 9.62 y 7.03 s. Calcule el valor experimental para T a partir de cada una de estas mediciones. Trace una gráfica de T^2 con M y determine un valor para k a partir de la pendiente del ajuste lineal de mínimos cuadrados a través de los puntos de datos. Compare este valor de k con el obtenido en el inciso a). c) Obtenga un valor para m_s a partir de su gráfica y compárelo con el valor conocido de 7.40 g.

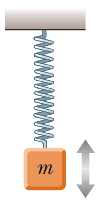


Figura P15.64

65. Un disco de radio r y masa m se pega a la cara de un segundo disco más grande de radio R y masa M, como se muestra en la figura P15.65. El centro del disco pequeño se ubica en el borde del disco grande. El disco grande se monta en su centro en un eje sin fricción. El ensamble da vueltas a través de un pequeño ángulo θ desde su posición de equilibrio y se libera. a) Demuestre que mientras pasa a través de la posición de equilibrio la rapidez del centro del disco pequeño es

$$v = 2\left[\frac{Rg(1 - \cos\theta)}{(M/m) + (r/R)^2 + 2}\right]^{1/2}$$

b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR}\right]^{1/2}$$

66. Considere el oscilador amortiguado que se muestra en las figuras 15.20 y 15.21. La masa del objeto es 375 g, la constante de resorte es 100 N/m y $b = 0.100$ N · s/m. a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la amplitud cae a la mitad de su valor inicial? b) **¿Qué pasaría si?** ¿Durante qué intervalo de tiempo la energía mecánica cae a la mitad de su valor inicial? c) Demuestre que,

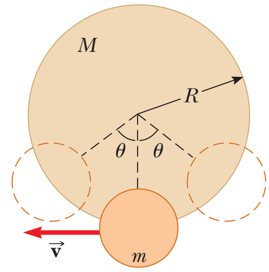


Figura P15.65

en general, la relación fraccionaria a la cual la amplitud disminuye en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la relación fraccionaria a la que disminuye la energía mecánica.

67. Un bloque de masa m se conecta a dos resortes con constantes de fuerza k_1 y k_2 en dos formas, como se muestra en las figuras P15.67a y P15.67b. En ambos casos el bloque se mueve sobre una mesa sin fricción después de desplazarse desde el equilibrio y liberarse. Demuestre que en los dos casos el bloque muestra movimiento armónico simple con periodos

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$ y b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1 + k_2}}$

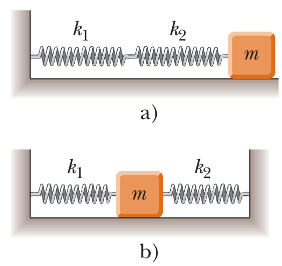


Figura P15.67

68. Una boya de langostero es un cilindro de madera sólida de radio r y masa M, a la cual se le coloca peso en un extremo, de modo que flote vertical en agua de mar tranquila, que tiene densidad ρ. Un tiburón que pasa tensa la soga floja que amarra la boya a una trampa de langosta y jala la boya una distancia x desde su posición de equilibrio y la libera. Demuestre que la boya ejecutará movimiento armónico simple si se ignoran los efectos resistivos del agua y determine el periodo de las oscilaciones.

69. **Problema de repaso.** Imagine que, a través del centro de la Tierra, se cava un hoyo que sale hasta el otro lado. Un objeto de masa m a una distancia r del centro de la Tierra se jala hacia el centro de la Tierra sólo por la masa dentro de la esfera de radio r (la región rojiza de la figura P15.69). a) Escriba la ley de gravitación de Newton para un objeto a la distancia r desde el centro de la Tierra y demuestre que la fuerza sobre él es de la forma de la ley de Hooke, $F = -kr$, donde la constante de fuerza efectiva es $k = \frac{4}{3}\pi\rho Gm$. Aquí ρ es la densidad de la Tierra, supuesta uniforme, y G es la constante gravitacional. b) Demuestre que un saco de correo soltado en el hoyo ejecutará movimiento armónico simple si se mueve sin fricción. ¿Cuándo llegará al otro lado de la Tierra?

2 = intermedio; 3 = desafiante; = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo