La Roca Equilibrada en el Arches National Park, Utah, es una gran roca de 3 000 000 kg que ha estado en equilibrio estable durante milenios. Tenía de vecina una compañera más pequeña, llamada "lasca del viejo bloque", que cayó durante el invierno de 1975. La Roca Equilibrada apareció en una de las primeras escenas de la película *Indiana Jones y la última cruzada*. En este capítulo se estudiarán las condiciones bajo las que un objeto está en equilibrio. (John W. Jewett Jr.)

12 Equilibrio estático y elasticidad

En los capítulos 10 y 11 se estudió la dinámica de los objetos rígidos. Parte de este capítulo aborda las condiciones en que un objeto rígido está en equilibrio. El término *equilibrio* implica que el objeto está en reposo o que su centro de masa se mueve con velocidad constante en relación con un observador en un marco de referencia inercial. Aquí sólo se trata con el primer caso, en el que el objeto está en *equilibrio estático*. El equilibrio estático representa una situación común en la práctica ingenieril, y los principios que involucra son de especial interés para ingenieros civiles, arquitectos e ingenieros mecánicos. Si es estudiante de ingeniería, sin duda llevará un curso avanzado de estática.

La última sección de este capítulo trata sobre la forma con que se deforman los objetos bajo condiciones de carga. Un objeto *elástico* regresa a su forma original cuando se quitan las fuerzas deformantes. Se definen muchas constantes elásticas, cada una correspondiente a un tipo diferente de deformación.

12.1 Objeto rígido en equilibrio

En el capítulo 5 se explicó el modelo de partícula en equilibrio, en el que una partícula se mueve con velocidad constante porque la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. La situación con objetos reales (extendidos) es más compleja, porque dichos objetos con frecuencia no se pueden modelar como partículas. Para que un objeto extendido esté en equilibrio, se debe satisfacer una segunda condición; la cual incluye el momento de torsión neto que actúa sobre el objeto extendido.

Considere una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto rígido, como se muestra en la figura 12.1. El efecto de la fuerza depende de la ubicación de su punto de aplicación *P*. Si $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de este punto relativo a *O*, el momento de torsión asociado con la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ respecto a un eje a través de *O* se conoce por la ecuación 11.1:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

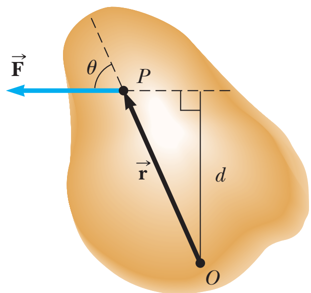


Figura 12.1 Una sola fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre un objeto rígido en el punto *P*.

Recuerde de la explicación del producto vectorial en la sección 11.1, que el vector $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. Puede usar la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, como se muestra en la figura 11.2. Por tanto, en la figura 12.1 $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se dirige hacia usted afuera de la página.

Como puede ver de la figura 12.1, la tendencia de $\vec{\mathbf{F}}$ a dar vuelta el objeto respecto a un eje a través de *O* depende del brazo de momento *d*, así como de la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$. Recuerde que la magnitud de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es Fd (véase la ecuación 10.19). De acuerdo con la ecuación 10.21, el momento de torsión neto en un objeto rígido hace que se someta a una aceleración angular.

En esta explicación se investigan aquellas situaciones rotacionales en las cuales la aceleración angular de un objeto rígido es cero. Tal objeto está en **equilibrio rotacional**. Porque $\Sigma\, \tau = I\alpha$ para rotación alrededor de un eje fijo, la condición necesaria para equilibrio rotacional es que **el momento de torsión neto alrededor de algún eje debe ser cero**. Ahora se tienen dos condiciones necesarias para el equilibrio de un objeto:

1. La fuerza externa neta sobre el objeto debe ser igual a cero:

$$\boxed{\sum \vec{\mathbf{F}} = 0} \qquad \textbf{(12.1)}$$

2. El momento de torsión externo neto sobre el objeto alrededor de *cualquier* eje debe ser cero:

$$\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0} \qquad \textbf{(12.2)}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 12.1
Momento de torsión cero

El momento de torsión neto cero no significa una ausencia de movimiento rotacional. Un objeto que rota con rapidez angular constante puede estar bajo la influencia de un momento de torsión neto de cero. Esta posibilidad es análoga a la situación traslacional: fuerza neta cero no significa una ausencia de movimiento traslacional.

Estas condiciones describen el modelo de análisis de **objeto rígido en equilibrio**. La primera condición es un enunciado del equilibrio traslacional; establece que la aceleración traslacional del centro de masa del objeto debe ser cero cuando se ve desde un marco de referencia inercial. La segunda condición es un enunciado de equilibrio rotacional; afirma que la aceleración angular en torno a cualquier eje debe ser cero. En el caso especial de **equilibrio estático**, que es el tema principal de este capítulo, el objeto en equilibrio está en reposo relativo con el observador y por eso no tiene rapidez traslacional o angular (es decir, $v_{\text{CM}} = 0$ y $\omega = 0$).

Pregunta rápida 12.1 Considere el objeto sometido a las dos fuerzas de la figura 12.2. Elija el enunciado correcto respecto a esta situación. a) El objeto está en equilibrio de fuerzas pero no en equilibrio de momento de torsión. b) El objeto está en equilibrio de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. c) El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

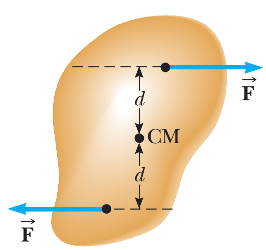


Figura 12.2 (Pregunta rápida 12.1) Dos fuerzas de igual magnitud se aplican a distancias iguales desde el centro de masa de un objeto rígido.

Pregunta rápida 12.2 Considere el objeto sometido a las tres fuerzas de la figura 12.3. Elija el enunciado correcto respecto a esta situación. a) El objeto está en equilibrio de fuerza pero no en equilibrio de momento de torsión. b) El objeto está en equilibrio de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. c) El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

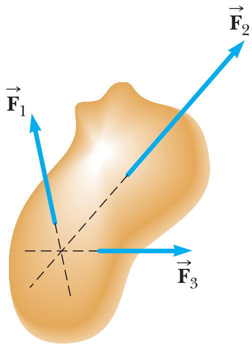


Figura 12.3 (Pregunta rápida 12.2) Tres fuerzas actúan en un objeto. Note que las líneas de acción de las tres fuerzas pasan a través de un punto común.

Las dos expresiones vectoriales conocidas por las ecuaciones 12.1 y 12.2 son equivalentes, en general, a seis ecuaciones escalares: tres de la primera condición para equilibrio y tres de la segunda (que corresponden a las componentes *x*, *y* y *z*). Por tanto, en un sistema complejo que involucra muchas fuerzas que actúan en varias direcciones, se podría enfrentar con resolver un conjunto de ecuaciones con muchas incógnitas. En este caso la discusión se restringe a situaciones en las que todas las fuerzas se encuentran en el plano *xy*. (Se dice que las fuerzas cuyas representaciones vectoriales están en el mismo plano son *coplanares.*) Con esta restricción, sólo debe lidiar con tres ecuaciones escalares. Dos vienen de equilibrar las fuerzas en las direcciones *x* y *y*. La tercera viene de la ecuación de momento de torsión, especialmente cuando el momento de torsión neto en torno a un eje perpendicular a través de *cualquier* punto en el plano *xy* debe ser cero. Por tanto, las dos condiciones del modelo del objeto rígido en equilibrio proporcionan las ecuaciones

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum \tau_z = 0 \tag{12.3}$$

donde la ubicación del eje de la ecuación del momento de torsión es arbitraria, como se demostrará ahora.

Sin importar el número de fuerzas que actúan, si un objeto está en equilibrio traslacional y el momento de torsión neto es cero en torno a un eje, el momento de torsión neto también debe ser cero en torno a cualquier otro eje. El eje puede pasar a través de un punto que está adentro o afuera de las fronteras del objeto. Considere un objeto sobre el que actúan muchas fuerzas tal que la fuerza resultante $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots = 0$. La figura 12.4 describe esta situación (por claridad, sólo se muestran cuatro fuerzas). El punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}_1$ relativo a O se especifica mediante el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_1$. De igual modo, los puntos de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}_2, \vec{\mathbf{F}}_3, \ldots$ se especifican mediante $\vec{\mathbf{r}}_2, \vec{\mathbf{r}}_3, \ldots$ (no se muestran). El momento de torsión neto en torno a un eje a través de O es

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{r}}_3 \times \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots$$

Ahora considere otro punto arbitrario O' que tenga un vector de posición $\vec{\mathbf{r}}\,'$ relativo a O. El punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}_1$ relativo a O' se identifica mediante el vector $\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}\,'$. Del mismo modo, el punto de aplicación de $\vec{\mathbf{F}}_2$ relativo a O' es $\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}\,'$, y así sucesivamente. En consecuencia, el momento de torsión en torno a un eje a través de O' es

$$\begin{aligned}\sum \vec{\tau}_{O'} &= (\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}\,') \times \vec{\mathbf{F}}_1 + (\vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}\,') \times \vec{\mathbf{F}}_2 + (\vec{\mathbf{r}}_3 - \vec{\mathbf{r}}\,') \times \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots \\ &= \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{r}}_3 \times \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots - \vec{\mathbf{r}}\,' \times (\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \cdots)\end{aligned}$$

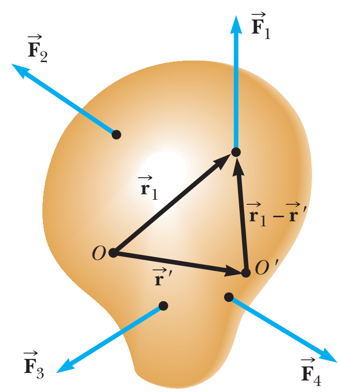


Figura 12.4 Construcción que muestra: si el momento de torsión neto es cero en torno a un eje a través del origen O, también es cero en torno a un eje a través de cualquier otro origen, como O'.

Ya que la fuerza neta se supone cero (teniendo en cuenta que el objeto está en equilibrio traslacional), el último término desaparece y se ve que el momento de torsión en torno a un eje a través de O' es igual al momento de torsión en torno a un eje a través de O. Por tanto, **si un objeto está en equilibrio traslacional y el momento de torsión neto es cero en torno a un eje, el momento de torsión neto debe ser cero en torno a cualquier otro eje.**

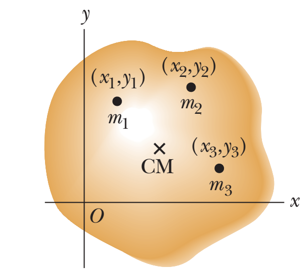


Figura 12.5 Un objeto se puede dividir en muchas pequeñas partículas, cada una con una masa y coordenadas específicas. Estas partículas sirven para ubicar el centro de masa.

12.2 Más acerca del centro de gravedad

Siempre que trate con un objeto rígido, una de las fuerzas que debe considerar es la fuerza gravitacional que actúa sobre él, y debe conocer el punto de aplicación de esta fuerza. Como aprendió en la sección 9.5, asociado con todo objeto hay un punto especial llamado centro de gravedad. La combinación de las diferentes fuerzas gravitacionales que actúan en todos los elementos de masa del objeto es equivalente a una sola fuerza gravitacional que actúa a través de este punto. Por lo tanto, para calcular el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional en un objeto de masa M, sólo necesita considerar la fuerza $M\vec{\mathbf{g}}$ que actúa en el centro de gravedad del objeto.

¿Cómo se encuentra este punto especial? Como se mencionó en la sección 9.5, si supone que $\vec{\mathbf{g}}$ es uniforme en el objeto, el centro de gravedad del objeto coincide con su centro de masa. Para ver por qué, considere un objeto con forma arbitraria que se encuentra en el plano xy, como se ilustra en la figura 12.5. Suponga que el objeto se divide en un gran número de partículas de masas m_1, m_2, m_3, . . . que tienen coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), . . . En la ecuación 9.28 se definió la coordenada x del centro de masa de tal objeto como

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

Se usa una ecuación similar para definir la coordenada y del centro de masa, al sustituir cada x con su contraparte y.

Ahora se examinará la situación desde otro punto de vista al considerar la fuerza gravitacional que se ejerce sobre cada partícula, como se muestra en la figura 12.6. Cada partícula contribuye con un momento de torsión en torno a un eje a través del origen igual en magnitud al peso mg de la partícula multiplicado por su brazo de momento. Por ejemplo, la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza $m_1\vec{\mathbf{g}}_1$ es $m_1g_1x_1$, donde g_1 es el valor de la aceleración gravitacional en la posición de la partícula de masa m_1. Lo que se quiere es ubicar el centro de gravedad, el punto en el que la aplicación de la simple fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ (donde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$ es la masa total del objeto y $\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ es la aceleración debida a la gravedad en la posición del centro de gravedad) tiene el mismo efecto sobre la rotación que el efecto combinado de todas las fuerzas gravitacionales individuales $m_i\vec{\mathbf{g}}_i$. Al igualar el momento de torsión resultante de $M\vec{\mathbf{g}}_{\text{CG}}$ que actúa en el centro de gravedad, con la suma de los momentos de torsión que actúan sobre las partículas individuales, se obtiene

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)g_{\text{CG}}x_{\text{CG}} = m_1g_1x_1 + m_2g_2x_2 + m_3g_3x_3 + \cdots$$

Esta expresión revela la posibilidad de que el valor de g pueda en general variar sobre el objeto. Si se supone g uniforme sobre el objeto (como usualmente es el caso), los términos g se cancelan y se obtiene

$$x_{\text{CG}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \qquad \textbf{(12.4)}$$

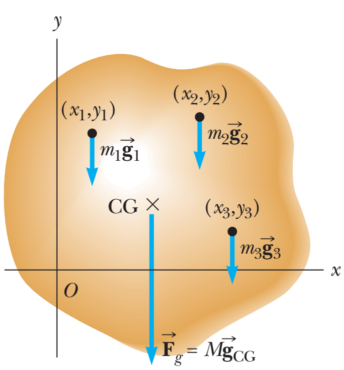


Figura 12.6 La fuerza gravitacional sobre un objeto se ubica en el centro de gravedad, que es la posición promedio de las fuerzas gravitacionales sobre todas las partículas de que está hecho el objeto.

Comparar este resultado con la ecuación 9.29 muestra que **el centro de gravedad se ubica en el centro de masa en tanto $\vec{\mathbf{g}}$ sea uniforme sobre todo el objeto**. Muchos ejemplos en la siguiente sección tratan con objetos homogéneos simétricos. El centro de gravedad para cualquiera de tales objetos coincide con su centro geométrico.

Pregunta rápida 12.3 Una regleta cuelga de una cuerda amarrada a la marca de 25 cm. Un objeto de 0.50 kg cuelga del extremo cero de la regleta y se equilibra horizontalmente. ¿Cuál es la masa de la regleta? a) 0.25 kg, b) 0.50 kg, c) 0.75 kg, d) 1.0 kg, e) 2.0 kg, f) imposible de determinar

12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

La fotografía del soporte de una botella de vino de la figura 12.7 muestra un ejemplo de un sistema mecánico en equilibrio que parece desafiar a la gravedad. Para que el sistema (soporte más botella) esté en equilibrio, la fuerza externa neta debe ser cero (véase la ecuación 12.1) y el momento de torsión externo neto debe ser cero (véase la ecuación 12.2). La segunda condición se satisface sólo cuando el centro de gravedad del sistema está directamente arriba del punto de soporte.

Figura 12.7 Este soporte de una botella de vino es un sorprendente dispositivo de equilibrio estático. El centro de gravedad del sistema (botella más soporte) está directamente arriba del punto de soporte.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Objeto rígido en equilibrio**

Cuando analice un objeto rígido en equilibrio bajo la acción de muchas fuerzas externas, use el siguiente procedimiento.

1. *Conceptualizar.* Piense en el objeto que está en equilibrio e identifique todas las fuerzas que actúan sobre él. Imagine qué efecto tendría cada fuerza en la rotación del objeto si fuese la única fuerza en acción.

2. *Categorizar.* Confirme que el objeto en consideración es un objeto rígido en equilibrio.

3. *Analizar.* Dibuje un diagrama de cuerpo libre y etiquete todas las fuerzas externas que actúan en el objeto. Intente adivinar la dirección correcta de cada fuerza.

Descomponga todas las fuerzas en componentes rectangulares y elija un sistema coordenado conveniente. Luego aplique la primera condición para el equilibrio, la ecuación 12.1. Recuerde seguir la pista de los signos de las diferentes fuerzas componentes.

Elija un eje conveniente para calcular el momento de torsión neto sobre el objeto rígido. Recuerde que la elección del eje para la ecuación del momento de torsión es arbitraria; por lo tanto, elija un eje que simplifique sus cálculos tanto como sea posible. El eje más conveniente para calcular momentos de torsión es el que pasa a través de un punto en el que actúan muchas fuerzas, de modo que sus momentos de torsión en torno a este eje son cero. Si no conoce una fuerza o no necesita conocer una fuerza, conviene elegir un eje a través del punto en el que actúa dicha fuerza. Aplique la segunda condición para el equilibrio, ecuación 12.2.

Resuelva las ecuaciones simultáneas para las incógnitas en términos de las cantidades conocidas.

4. *Finalizar.* Confirme que sus resultados sean consistentes con el diagrama de cuerpo libre. Si seleccionó una dirección que conduce a un signo negativo en su solución para una fuerza, no se alarme; simplemente significa que la dirección de la fuerza es la opuesta a la que supuso. Sume las fuerzas verticales y horizontales sobre el objeto y confirme que cada conjunto de componentes suma cero. Sume los momentos de torsión sobre el objeto y confirme que la suma es igual a cero.

EJEMPLO 12.1 **Nueva visita al sube y baja**

Un sube y baja consiste de un tablón uniforme de masa M y longitud ℓ que sostiene en reposo a un padre y su hija con masas m_f y m_d, respectivamente, como se muestra en la figura 12.8. El soporte (llamado *punto de apoyo*) está bajo el centro de gravedad del tablón, el padre a una distancia d del centro y la hija a una distancia $\ell/2$ del centro.

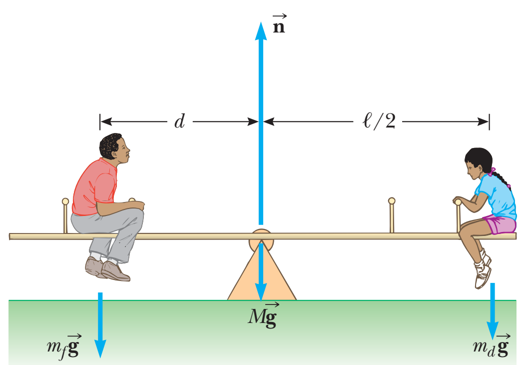


Figura 12.8 (Ejemplo 12.1) Un sistema en equilibrio.

A) Determine la magnitud de la fuerza hacia arriba $\vec{n}$ que ejerce el soporte sobre el tablón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Concentre su atención en el tablón y considere las fuerzas gravitacionales sobre el padre y la hija como fuerzas aplicadas directamente al tablón. La hija causaría una rotación en sentido de las manecillas del reloj sobre el tablón en torno al soporte, mientras que el padre causaría una rotación contra las manecillas del reloj.

Categorizar Ya que el texto del problema establece que el sistema está en reposo, el tablón se modela como un objeto rígido en equilibrio. Sin embargo, ya que sólo se necesitará la primera condición de equilibrio para resolver esta parte del problema, el tablón se modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Defina hacia arriba como la dirección y positiva y sustituya las fuerzas sobre el tablón en la ecuación 12.1:

$$n - m_f g - m_d g - Mg = 0$$

Resuelva para la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{n}}$:

$$n = m_f g + m_d g + Mg = \boxed{(m_f + m_d + M)g}$$

B) Determine dónde se debe sentar el padre para equilibrar el sistema en reposo.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del problema requiere la introducción de momento de torsión para encontrar la posición del padre, así que el tablón se modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar El centro de gravedad del tablón está en su centro geométrico, porque se dijo que el tablón es uniforme. Si se elige un eje de rotación perpendicular a la página, a través del centro de gravedad del tablón, los momentos de torsión producidos por $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional en torno a este eje son cero.

Sustituya en la ecuación 12.2 expresiones para los momentos de torsión sobre el tablón debidos al padre y la hija:

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\frac{\ell}{2} = 0$$

Resuelva para d:

$$d = \boxed{\left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell}$$

Finalizar Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 11.6 al evaluar la aceleración angular del sistema y ajustando la aceleración angular igual a cero.

¿Qué pasaría si? Suponga que se elige otro punto por donde pasa el eje de rotación. Por ejemplo, suponga que el eje es perpen-dicular a la página y pasa a través de la posición del padre. ¿Esto cambia los resultados de los incisos A) y B)?

Respuesta La parte A) no es afectada porque el cálculo de la fuerza neta no involucra un eje de rotación. En la parte B), conceptualmente se esperaría que no hubiera cambio si se elige un eje de rotación diferente, porque la segunda condición de equilibrio afirma que el momento de torsión es cero en torno a cualquier eje de rotación.

Verifique matemáticamente esta respuesta. Recuerde que el signo del momento de torsión asociado con una fuerza es positivo si dicha fuerza tiende a dar vuelta al sistema contra las manecillas del reloj, mientras que el signo del momento de torsión es negativo si la fuerza tiende a dar vuelta al sistema en sentido de las manecillas del reloj. Elija un eje de rotación que pase a través de la posición del padre.

Aplique la condición para equilibrio rotacional, $\Sigma\,\tau = 0$:

$$n(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Sustituya $n = (m_f + m_d + M)g$ del inciso A) y resuelva para d:

$$(m_f + m_d + M)g(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{\ell}{2}\right) = 0$$

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell$$

Este resultado está en concordancia con el que se obtuvo en la parte B).

EJEMPLO 12.2 De pie sobre una viga horizontal

Una viga horizontal uniforme con una longitud de 8.00 m y un peso de 200 N se une a un pared mediante una junta articulada. Su extremo lejano está sostenido mediante un cable que forma un ángulo de 53.0° con la viga (figura 12.9a). Una persona de 600 N está de pie a 2.00 m de la pared. Encuentre la tensión en el cable así como la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce la pared en la viga.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la persona de la figura 12.9a se mueve hacia afuera sobre la viga. Parece razonable que mientras más avance hacia afuera, mayor será el momento de torsión que aplique sobre el eje y la tensión en el cable debe ser mayor para equilibrar este momento de torsión.

Categorizar Ya que el sistema está en reposo, la viga se clasifica como un objeto rígido en equilibrio.

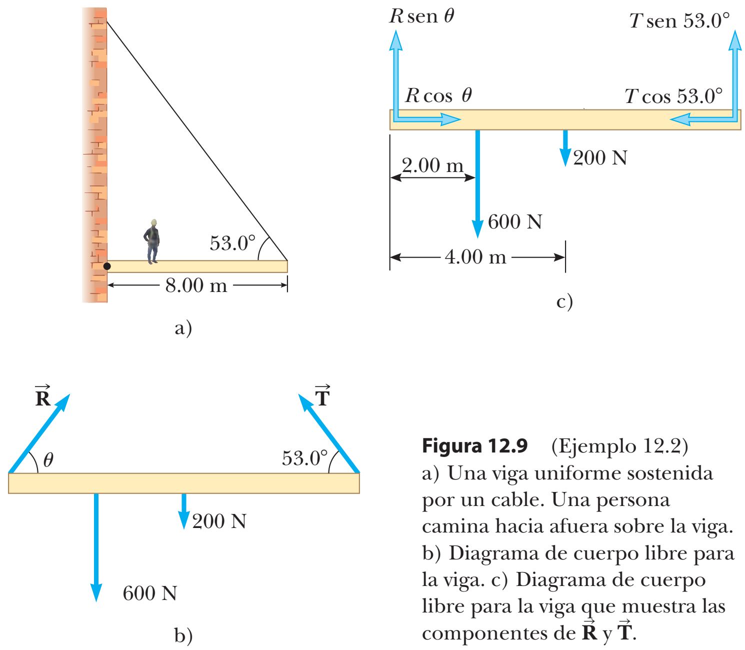


Figura 12.9 (Ejemplo 12.2) a) Una viga uniforme sostenida por un cable. Una persona camina hacia afuera sobre la viga. b) Diagrama de cuerpo libre para la viga. c) Diagrama de cuerpo libre para la viga que muestra las componentes de $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{T}}$.

Analizar Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga: la fuerza gravitacional de 200 N, la fuerza $\vec{\mathbf{T}}$ que ejerce el cable, la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ que ejerce la pared en el eje y la fuerza de 600 N que ejerce la persona sobre la viga. Dichas fuerzas se indican en el diagrama de cuerpo libre para la viga que se muestra en la figura 12.9b. Cuando se asignan direcciones a las fuerzas, a veces es útil imaginar qué sucedería si súbitamente se retira una fuerza. Por ejemplo, si de pronto desapareciera la pared, el extremo izquierdo de la viga se movería a la izquierda mientras comienza a caer. Este escenario dice que la pared no sólo sostiene la viga hacia arriba sino también presiona hacia afuera sobre ella. Por lo tanto, el vector $\vec{\mathbf{R}}$ se dibuja como se muestra en la figura 12.9b. La figura 12.9c muestra las componentes horizontal y vertical de $\vec{\mathbf{T}}$ y $\vec{\mathbf{R}}$.

Sustituya expresiones para las fuerzas sobre la viga en la ecuación 12.1:

$$1)\quad \sum F_x = R\cos\theta - T\cos 53.0° = 0$$

$$2)\quad \sum F_y = R\,\text{sen}\,\theta + T\,\text{sen}\,53.0° - 600\text{ N} - 200\text{ N} = 0$$

donde se eligió hacia la derecha y hacia arriba como las direcciones positivas. Puesto que R, T y θ son todas incógnitas, no se puede obtener una solución sólo a partir de estas expresiones. (Para resolver las incógnitas, el número de ecuaciones simultáneas debe ser igual al número de incógnitas.)

Ahora invoque la condición de equilibrio rotacional. Un eje conveniente a elegir para la ecuación de momento de torsión es el que pasa a través de la junta articulada. La característica que hace a este eje tan conveniente es que tanto la fuerza $\vec{\mathbf{R}}$ como la componente horizontal de $\vec{\mathbf{T}}$ tienen un brazo de momento cero; en consecuencia, dichas fuerzas no producen momento de torsión en torno a este eje. Los brazos de momento de las fuerzas de 600 N, 200 N y T sen 53.0° en torno a este eje son 2.00 m, 4.00 m y 8.00 m, respectivamente.

Sustituya expresiones para los momentos de torsión sobre la viga en la ecuación 12.2:

$$3)\quad \sum \tau = (T\,\text{sen}\,53.0°)(8.00\text{ m}) - (600\text{ N})(2.00\text{ m}) - (200\text{ N})(4.00\text{ m}) = 0$$

Resuelva para T:

$$\boxed{T = 313\text{ N}}$$

Sustituya este valor en las ecuaciones 1) y 2):

$$R\cos\theta - (313\text{ N})\cos 53.0° = 0$$

$$R\,\text{sen}\,\theta + (313\text{ N})\,\text{sen}\,53.0° - 600\text{ N} - 200\text{ N} = 0$$

Resuelva para $R\cos\theta$ y $R\,\text{sen}\,\theta$:

$$4)\quad R\cos\theta = (313\text{ N})\cos 53.0° = 188\text{ N}$$

$$5)\quad R\,\text{sen}\,\theta = 600\text{ N} + 200\text{ N} - (313\text{ N})\,\text{sen}\,53.0° = 550\text{ N}$$

Divida la ecuación 5) entre la ecuación 4):

$$\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{R\cos\theta} = \tan\theta = \frac{550\text{ N}}{188\text{ N}} = 2.93$$

Determine el ángulo θ: $\theta = \boxed{71.1°}$

Resuelva la ecuación 4) para R: $R = \frac{188\text{ N}}{\cos\theta} = \frac{188\text{ N}}{\cos 71.1°} = \boxed{580\text{ N}}$

Finalizar El valor positivo para el ángulo θ indica que la estimación de la dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ fue precisa.

De haber seleccionado algún otro eje para la ecuación de momento de torsión, la solución pudo diferir en los detalles, pero las respuestas serían iguales. Por ejemplo, si hubiese elegido un eje a través del centro de gravedad de la viga, la ecuación del momento de torsión involucraría tanto a T como a R. Sin embargo, esta ecuación, junto con las ecuaciones 1) y 2), todavía se podría resolver para las incógnitas. ¡Inténtelo!

¿Qué pasaría si? ¿Y si la persona camina más lejos sobre la viga? ¿Cambia T? ¿Cambia R? ¿Cambia θ?

Respuesta T debe aumentar porque el peso de la persona ejerce un momento de torsión mayor en torno a la junta articulada, que debe contrarrestar un momento de torsión más grande en la dirección opuesta debido a un valor creciente de T. Si T aumenta, la componente vertical de $\vec{\mathbf{R}}$ disminuye para mantener equilibrio de fuerza en la dirección vertical. No obstante, el equilibrio de fuerza en la dirección horizontal requiere una componente horizontal creciente de $\vec{\mathbf{R}}$ para equilibrar la componente horizontal de la $\vec{\mathbf{T}}$ creciente. Este hecho sugiere que θ se vuelve más pequeño, pero es difícil predecir qué sucede con R. El problema 20 le pide explorar el comportamiento de R.

EJEMPLO 12.3 La escalera inclinada

Una escalera uniforme de longitud ℓ descansa contra una pared vertical lisa (figura 12.10a). La masa de la escalera es m y el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo de $\mu_s = 0.40$. Encuentre el ángulo mínimo $\theta_{\text{mín}}$ en el que la escalera no se desliza.

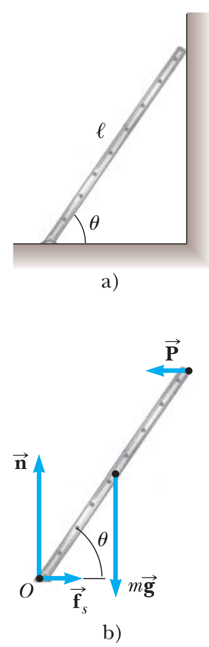


Figura 12.10 (Ejemplo 12.3) a) Una escalera uniforme en reposo que se apoya contra una pared lisa. El suelo es rugoso. b) Diagrama de cuerpo libre para la escalera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en cualquier escalera que haya subido. ¿Prefiere una gran fuerza de fricción entre la parte baja de la escalera y la superficie o una pequeña? Si la fuerza de fricción es cero, ¿la escalera quedará levantada? Simule una escalera con una regla que se inclina contra una superficie vertical. ¿La regla se desliza en algunos ángulos y quedará levantada en otros?

Categorizar No es deseable que la escalera se deslice, así que se le modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar El diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la escalera se ilustra en la figura 12.10b. La fuerza que el suelo ejerce sobre la escalera es la suma vectorial de una fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza de fricción estática $\vec{\mathbf{f}}_s$. La fuerza $\vec{\mathbf{P}}$ que ejerce la pared sobre la escalera es horizontal porque la pared no tiene fricción.

Aplique a la escalera la primera condición para el equilibrio:

1) $\sum F_x = f_s - P = 0$

2) $\sum F_y = n - mg = 0$

Resuelva la ecuación 1) para P: 3) $P = f_s$

Resuelva la ecuación 2) para n: 4) $n = mg$

Cuando la escalera está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática debe tener su valor máximo, que se conoce por $f_{s,\,\text{máx}} = \mu_s n$. Combine esta ecuación con las ecuaciones 3) y 4):

$$P = f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = \mu_s mg$$

Aplique a la escalera la segunda condición para el equilibrio, y considere momentos de torsión en torno a un eje que pasa a través de O:

$$5) \quad \sum \tau_O = P\ell \text{ sen } \theta_{\text{mín}} - mg\frac{\ell}{2}\cos\theta_{\text{mín}} = 0$$

Resuelva para tan $\theta_{\text{mín}}$:

$$\frac{\text{sen}\,\theta_{\text{mín}}}{\cos\theta_{\text{mín}}} = \tan\theta_{\text{mín}} = \frac{mg}{2P} = \frac{mg}{2\mu_s mg} = \frac{1}{2\mu_s} = 1.25$$

Resuelva para el ángulo $\theta_{\text{mín}}$:

$$\theta_{\text{mín}} = \tan^{-1}(1.25) = 51°$$

Finalizar Note que el ángulo sólo depende del coeficiente de fricción, no de la masa o longitud de la escalera.

EJEMPLO 12.4 Superar una acera

A) Examine la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que una persona debe aplicar a la rueda principal de una silla de ruedas para que ruede sobre el borde de una acera (figura 12.11a). Esta rueda principal que entra en contacto con el borde tiene un radio r y la altura del borde es h.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en los accesos de los edificios para las sillas de ruedas. Por lo general, existen rampas que se construyen para los individuos en sillas de ruedas. Las estructuras escalonadas como los bordes de las aceras son serias barreras para una silla de ruedas.

Categorizar Imagine que la persona ejerce suficiente fuerza de modo que la parte baja de la rueda apenas pierde contacto con la superficie inferior y oscila en reposo. La rueda en esta situación se modela como un objeto rígido en equilibrio.

Analizar Por lo general, las manos de la persona proporcionan la fuerza requerida a una rueda ligeramente más pequeña que es concéntrica con la rueda principal. Por simplicidad, suponga que el radio de esta segunda rueda es el mismo que el radio de la rueda principal. Estime un peso combinado de mg = 1 400 N para la persona y la silla de ruedas y elija un radio de rueda de r = 30 cm. Considere que la altura del borde de la acera es h = 10 cm. Suponga también que la silla de ruedas y el ocupante son simétricos y que cada rueda soporta un peso de 700 N. En tal caso proceda a analizar sólo una de las ruedas. La figura 12.11b muestra la geometría para una sola rueda.

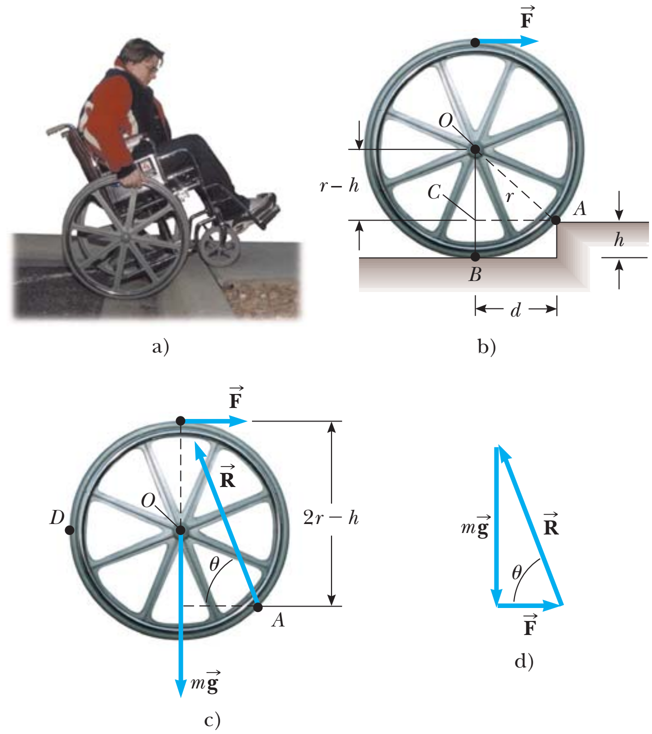


Figura 12.11 (Ejemplo 12.4) a) Una persona en una silla de ruedas intenta rodar sobre el borde de una acera. b) Detalles de la rueda y el borde. La persona aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ a lo alto de la rueda. c) Diagrama de cuerpo libre para la rueda cuando está a punto de elevarse. Tres fuerzas actúan sobre la rueda en este instante: $\vec{\mathbf{F}}$, que ejerce la mano; $\vec{\mathbf{R}}$, que ejerce el borde; y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$. d) La suma vectorial de las tres fuerzas externas que actúan sobre la rueda es cero.

Cuando la rueda está a punto de elevarse del pavimento, la fuerza normal que ejerce el suelo sobre la rueda en el punto B tiende a cero. En consecuencia, en este momento sólo actúan tres fuerzas en la rueda, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12.11c. La fuerza $\vec{\mathbf{R}}$, que es la fuerza que ejerce el borde de la acera en la rueda, actúa en el punto A, de modo que si se elige tener el eje de rotación pasando a través del punto A, no es necesario incluir $\vec{\mathbf{R}}$ en la ecuación de momento de torsión. El brazo de momento de $\vec{\mathbf{F}}$ relativo a un eje a través de A es $2r - h$ (véase la figura 12.11c).

Use el triángulo OAC de la figura 12.11b para encontrar el brazo de momento d de la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ que actúa sobre la rueda relativo a un eje a través del punto A:

$$1) \quad d = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

Aplique a la rueda la segunda condición para el equilibrio, considere momentos de torsión en torno a un eje a través de A:

$$2)\quad \sum \tau_A = mgd - F(2r - h) = 0$$

Sustituya para d de la ecuación 1):

$$mg\sqrt{2rh - h^2} - F(2r - h) = 0$$

Resuelva para F:

$$F = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}$$

Sustituya los valores conocidos:

$$F = \frac{(700\text{ N})\sqrt{2(0.3\text{ m})(0.1\text{ m}) - (0.1\text{ m})^2}}{2(0.3\text{ m}) - 0.1\text{ m}}$$

$$= \boxed{3 \times 10^2\text{ N}}$$

B) Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{R}}$.

SOLUCIÓN

Aplique a la rueda la primera condición para el equilibrio:

$$\sum F_x = F - R\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = R\operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

Divida la segunda ecuación por la primera:

$$\frac{R\operatorname{sen}\theta}{R\cos} = \tan\theta = \frac{mg}{F} = \frac{700\text{ N}}{300\text{ N}} = 2.33$$

Resuelva para el ángulo θ:

$$\theta = \tan^{-1} 2.33 = \boxed{70°}$$

Use el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 12.11d para obtener R:

$$R = \sqrt{(mg)^2 + F^2} = \sqrt{(700\text{ N})^2 + (300\text{ N})^2} = \boxed{8 \times 10^2\text{ N}}$$

Finalizar Note que sólo se conservó un dígito como significativo. (El ángulo se escribió como 70°, ¡porque $7 \times 10^{1°}$ es complicado!) Los resultados indican que la fuerza que se debe aplicar a cada rueda es sustancial. Puede estimar la fuerza que se requiere para rodar una silla de ruedas por una rampa de acceso representativa en la acera, para comparar.

¿Qué pasaría si? ¿Sería más fácil superar el borde si la persona sujeta la rueda en el punto D de la figura 12.11c y jala *hacia arriba*?

Respuesta Si la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ de la figura 12.11c se gira 90° contra las manecillas del reloj y se aplica en D, su brazo de momento es $d + r$. Llame a la magnitud de esta nueva fuerza F'.

Modifique la ecuación 2) para esta situación:

$$\sum \tau_A = mgd - F'(d + r) = 0$$

Resuelva esta ecuación para F' y sustituya para d:

$$F' = \frac{mgd}{d + r} = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}$$

Tome la relación de esta fuerza a la fuerza original que se calculó y exprese el resultado en términos de h/r, la relación de la altura del borde al radio de la rueda:

$$\frac{F'}{F} = \frac{\dfrac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}}{\dfrac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}} = \frac{2r - h}{\sqrt{2rh - h^2} + r} = \frac{2 - \left(\dfrac{h}{r}\right)}{\sqrt{2\left(\dfrac{h}{r}\right) - \left(\dfrac{h}{r}\right)^2} + 1}$$

Sustituya la razón $h/r = 0.33$ a partir de los valores conocidos:

$$\frac{F'}{F} = \frac{2 - 0.33}{\sqrt{2(0.33) - (0.33)^2} + 1} = 0.96$$

Este resultado dice que, *para estos valores*, es ligeramente más fácil jalar hacia arriba en D que horizontalmente en lo alto de la rueda. Para bordes muy altos, de modo que h/r está cerca de 1, la relación F'/F cae a aproximadamente 0.5 porque el punto A se ubica cerca del borde derecho de la rueda en la figura 12.11b. La fuerza en D se aplica a una distancia aproximada de $2r$ desde A, mientras que la fuerza en lo alto de la rueda tiene un brazo de momento sólo de alrededor de r. Para bordes altos, en tal caso, es mejor jalar hacia arriba en D, aunque se requiere un valor grande de la fuerza. Para bordes pequeños, es mejor aplicar la fuerza en lo alto de la rueda. La relación F'/F se vuelve cada vez más grande que 1 alrededor de $h/r = 0.3$ porque el punto A ahora está cerca de la parte baja de la rueda y la fuerza que se aplica a lo alto de la rueda tiene un brazo de momento más grande que cuando se aplicó a D.

Por último, se comenta acerca de la validez de estos resultados matemáticos. Considere la figura 12.11d e imagine que el vector $\vec{\mathbf{F}}$ está hacia arriba en lugar de hacia la derecha. No hay forma de que los tres vectores sumen cero, como requiere la primera condición del equilibrio. Por lo tanto, los resultados anteriores pueden ser cualitativamente válidos, pero no cuantitativamente exactos. Para cancelar la componente horizontal de $\vec{\mathbf{R}}$, la fuerza en D se debe aplicar a un ángulo con la vertical en lugar de recto hacia arriba. Esta característica hace que el cálculo sea más complicado y requiere ambas condiciones de equilibrio.

12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

Excepto por la explicación respecto a los resortes en capítulos anteriores, se ha supuesto que los objetos permanecen rígidos cuando fuerzas externas actúan sobre ellos. En la sección 9.7 se exploraron sistemas deformables. En realidad, todos los objetos son deformables en cierta medida. Es decir: es posible cambiar la forma o el tamaño (o ambos) de un objeto al aplicar fuerzas externas. Sin embargo, conforme se presentan estos cambios, las fuerzas internas en el objeto resisten la deformación.

La deformación de los sólidos se explican en términos de los conceptos de *esfuerzo* y *deformación*. **Esfuerzo** es una cantidad que es proporcional a la fuerza que causa una deformación; más en específico, el esfuerzo es la fuerza externa que actúa en un objeto por unidad de área de sección transversal. El resultado de un esfuerzo es una **deformación**, que es una medida del grado de deformación. Se encuentra que, para esfuerzos suficientemente pequeños, **el esfuerzo es proporcional a la deformación**; la constante de proporcionalidad depende del material que se deforma y de la naturaleza de la deformación. A esta constante de proporcionalidad se le llamará **módulo elástico**. Por lo tanto, el módulo elástico se define como la proporción del esfuerzo a la deformación resultante:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \tag{12.5}$$

En general el módulo elástico relaciona lo que se hace a un objeto sólido (se aplica una fuerza) como responde dicho objeto (se deforma en cierta medida). Es similar a la constante de resorte k en la ley de Hooke (ecuación 7.9) que relaciona una fuerza aplicada con un resorte y la deformación resultante del resorte, medido por su extensión o compresión.

Se consideran tres tipos de deformación y se define un módulo elástico para cada uno:

1. El **módulo de Young** mide la resistencia de un sólido a un cambio en su longitud.
2. El **módulo de corte** mide la resistencia al movimiento de los planos dentro de un sólido paralelos unos con otros.
3. El **módulo volumétrico** mide la resistencia de los sólidos o líquidos a cambios en su volumen.

Módulo de Young: elasticidad en longitud

Considere una barra larga con área de sección transversal A y longitud inicial L_i que se sujeta con una pinza en un extremo, como en la figura 12.12. Cuando se aplica una fuerza externa perpendicular a la sección transversal, fuerzas internas en la barra resisten la distorsión ("estiramiento"), pero la barra llega a una situación de equilibrio en la que su longitud final L_f es mayor que L_i y en la que la fuerza externa se equilibra exactamente

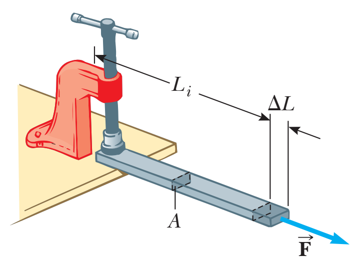


Figura 12.12 Una barra larga, sujeta en un extremo, se estira una cantidad ΔL bajo la acción de una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$.

TABLA 12.1

Valores representativos para módulos elásticos

Sustancia	Módulo de Young (N/m^2)	Módulo de corte (N/m^2)	Módulo volumétrico (N/m^2)
Tungsteno	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Acero	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Latón	9.5×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminio	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Vidrio	$6.5–7.8 \times 10^{10}$	$2.6–3.2 \times 10^{10}$	$5.0–5.5 \times 10^{10}$
Cuarzo	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Agua	—	—	0.21×10^{10}
Mercurio	—	—	2.8×10^{10}

mediante fuerzas internas. En tal situación, se dice que la barra está sobrecargada. El **esfuerzo de tracción** (o tensión de tracción) se define como la relación de la magnitud de la fuerza externa F al área de sección transversal A. La **deformación por tensión** (o deformación por tracción) en este caso se define como la relación del cambio en longitud ΔL a la longitud original L_i. El **módulo de Young** se define mediante una combinación de estas dos relaciones:

Módulo de Young ▶

$$Y \equiv \frac{\text{esfuerzo de tracción}}{\text{deformación por tensión}} = \frac{F/A}{\Delta L/L_i} \qquad \textbf{(12.6)}$$

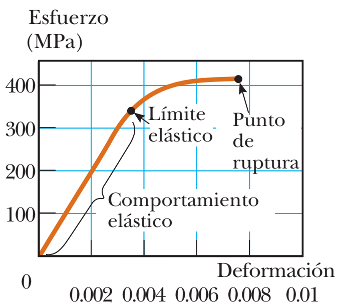


Figura 12.13 Curva esfuerzo contra deformación para un sólido elástico.

el módulo de Young típicamente se usa para caracterizar una barra o alambre sobrecargado bajo tensión o compresión. Ya que la deformación es una cantidad adimensional, Y tiene unidades de fuerza por unidad de área. En la tabla 12.1 se proporcionan valores característicos.

Para esfuerzos relativamente pequeños, la barra regresa a su longitud inicial cuando se retira la fuerza. El **límite elástico** de una sustancia se define como el esfuerzo máximo que se puede aplicar a la sustancia antes de que queda permanentemente deformada y no regresa a su longitud inicial. Es posible exceder el límite elástico de una sustancia al aplicar un esfuerzo demasiado grande, como se ve en la figura 12.13. Al inicio, una curva esfuerzo con deformación es una línea recta. Sin embargo, conforme aumenta el esfuerzo, la curva ya no es una línea recta. Cuando el esfuerzo supera el límite elástico, el objeto se distorsiona permanentemente y no regresa a su forma original después de retirar el esfuerzo. A medida que el esfuerzo aumenta aún más, al final el material se rompe.

Módulo de corte: elasticidad de forma

Otro tipo de deformación se presenta cuando un objeto se somete a una fuerza paralela a una de sus caras mientras la cara opuesta se mantiene fija mediante otra fuerza (figura 12.14a). En este caso, el esfuerzo se llama esfuerzo de corte. Si al inicio el objeto es un bloque rectangular, un esfuerzo de corte resulta en una forma cuya sección transversal es un paralelogramo. Un libro que se empuja de costado, como se muestra en la figura 12.14b, es un ejemplo de un objeto sometido a un esfuerzo de corte. En una primera aproximación (para distorsiones pequeñas), con esta deformación no se presentan cambios en el volumen.

El **esfuerzo de corte** se define como F/A, la relación de la fuerza tangencial al área A de la cara a cortar. La **deformación de corte** se define como la relación $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se mueve la cara cortada y h es la altura del objeto. En términos de estas cantidades, el **módulo de corte** es

Módulo de corte ▶

$$S \equiv \frac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{deformación de corte}} = \frac{F/A}{\Delta x/h} \qquad \textbf{(12.7)}$$

En la tabla 12.1 se proporcionan valores de módulos de corte para algunos materiales representativos. Al igual que el módulo de Young, la unidad del módulo de corte es la relación de la de fuerza a la de área.

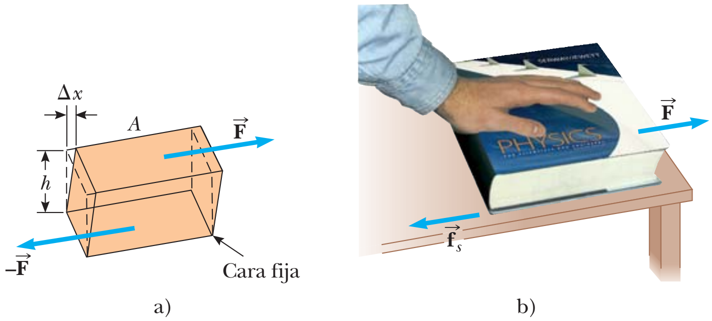


Figura 12.14 a) Una deformación de corte en la que un bloque rectangular se distorsiona mediante dos fuerzas de igual magnitud pero direcciones opuestas aplicadas a dos caras paralelas. b) Un libro está bajo esfuerzo de corte cuando una mano que se coloca en la cubierta aplica una fuerza horizontal que se aleja del lomo.

Módulo volumétrico: elasticidad del volumen

El módulo volumétrico caracteriza la respuesta de un objeto a cambios en una fuerza de magnitud uniforme aplicada perpendicularmente sobre toda la superficie del objeto, como se muestra en la figura 12.15. (Aquí se supone que el objeto está hecho de una sola sustancia.) Como se verá en el capítulo 14, tal distribución uniforme de fuerzas se presentan cuando un objeto está sumergido en un fluido. Un objeto sujeto a este tipo de deformación se somete un cambio en volumen pero no un cambio en forma. El **esfuerzo volumétrico** se define como la relación de la magnitud de la fuerza total F ejercida sobre una superficie al área A de la superficie. La cantidad $P = F/A$ se llama **presión**, que se estudiará con más detalle en el capítulo 14. Si la presión sobre un objeto cambia en una cantidad $\Delta P = \Delta F/A$, el objeto experimenta un cambio de volumen ΔV. La **deformación volumétrica** es igual al cambio en volumen ΔV dividido por el volumen inicial V_i. Por lo tanto, a partir de la ecuación 12.5, una compresión volumétrica se caracteriza en términos del **módulo volumétrico**, que se define como

$$B \equiv \frac{\text{esfuerzo volumétrico}}{\text{deformación volumétrica}} = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_i} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_i} \qquad \textbf{(12.8)}$$

◀ Módulo volumétrico

En esta ecuación se inserta un signo negativo de modo que B es un número positivo. Esta maniobra es necesaria porque un aumento en presión (ΔP positivo) causa una disminución en volumen (ΔV negativo) y viceversa.

La tabla 12.1 menciona módulos volumétricos para algunos materiales. Si busca tales valores en una fuente diferente, puede encontrar que se menciona el recíproco del módulo volumétrico. El recíproco del módulo volumétrico se llama **compresibilidad** del material.

Note de la tabla 12.1 que tanto sólidos como líquidos tienen un módulo volumétrico. Sin embargo, no se proporcionan módulos de corte ni módulos de Young para líquidos, porque un líquido no sostiene un esfuerzo de corte o un esfuerzo de tensión. Si una fuerza cortante o una fuerza de tensión se aplican a un líquido, el líquido simplemente fluye como respuesta.

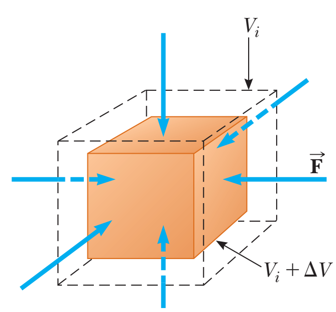


Figura 12.15 Cuando un sólido está bajo presión uniforme, experimenta un cambio en volumen, pero no un cambio en forma. Este cubo se comprime en todos sus lados mediante fuerzas normales a sus seis caras.

Pregunta rápida 12.4 Para las tres partes de esta pregunta rápida, elija de las siguientes opciones la respuesta correcta para el módulo elástico que describa la correspondencia entre esfuerzo y deformación para el sistema de interés, que está en itálicas: a) módulo de Young, b) módulo de corte, c) módulo volumétrico, d) ninguna de estas opciones. **i)** Un *bloque de hierro* se desliza a través de un suelo horizontal. La fuerza de fricción entre el bloque y el suelo hace que el bloque se deforme. **ii)** Un artista del trapecio se balancea a través de un arco circular. En la parte baja de la oscilación, los *alambres* que sostienen al trapecio son más largos que cuando el trapecista simplemente cuelga del trapecio debido a la tensión aumentada en ellos. **iii)** Una nave espacial lleva una *esfera de acero* a un planeta en el que la presión atmosférica es mucho mayor que en la Tierra. La mayor presión hace que el radio de la esfera disminuya.

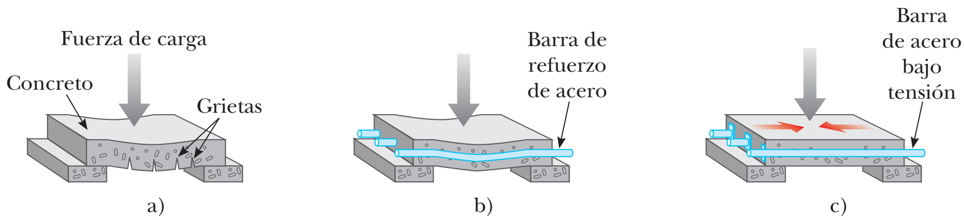


Figura 12.16 a) Una losa de concreto sin refuerzo tiende a romperse bajo una carga pesada. b) La resistencia del concreto aumenta con el uso de barras de refuerzo de acero. c) El concreto se fortalece aún más al pretensado con barras de acero bajo tensión.

Hormigón pretensado

Si el esfuerzo sobre un objeto sólido supera cierto valor, el objeto se fractura. El máximo esfuerzo que se puede aplicar antes de que se presente fractura (llamado *resistencia a la tracción*, *resistencia a la compresión* o *resistencia al corte*) depende de la naturaleza del material y del tipo de esfuerzo aplicado. Por ejemplo, el concreto tiene una resistencia a la tracción de aproximadamente 2×10^6 N/m^2, una resistencia a la compresión de 20×10^6 N/m^2 y una resistencia al corte de 2×10^6 N/m^2. Si el esfuerzo aplicado supera estos valores, el concreto se fractura. Es práctica común usar grandes factores de seguridad para evitar la fractura en las estructuras de concreto.

Por lo general, el concreto es muy quebradizo cuando se moldea en secciones delgadas. Por lo tanto, las losas de concreto tienden a pandearse y romperse en áreas sin soporte, como se muestra en la figura 12.16a. La losa se puede reforzar con el uso de barras de acero para reforzar el concreto, como se ilustra en la figura 12.1b. Ya que el concreto es mucho más fuerte bajo compresión (comprimir) que bajo tensión (estiramiento) o corte, columnas verticales de concreto soportan cargas muy pesadas, mientras que las vigas horizontales de concreto tienden a pandearse y romperse. Sin embargo, se logra un aumento significativo en la resistencia al corte si el concreto reforzado se pretensa (pretensar), como se muestra en la figura 12.16c. Como el concreto se vertirá, las barras de acero se mantienen bajo tensión mediante fuerzas externas. Las fuerzas externas se liberan después de que el concreto se cura; el resultado es una tensión permanente en el acero y, por tanto, un esfuerzo de compresión en el concreto. La losa de concreto ahora puede soportar una carga mucho más pesada.

EJEMPLO 12.5 **Diseño de escenario**

En el ejemplo 8.2 se analizó un cable utilizado para sostener a un actor que se balanceaba hacia el escenario. Suponga ahora que la tensión en el cable es 940 N cuando el actor alcanza el punto más bajo. ¿Qué diámetro debe tener un cable de acero de 10 m de largo si no se quiere que se estire más de 0.50 cm bajo estas condiciones?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Vea de nuevo el ejemplo 8.2 para recordar lo que sucede en esta situación. Ahí se ignoró cualquier estiramiento del cable, pero en este ejemplo se quiere abordar dicho fenómeno.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.6, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.6 para el área de sección transversal del cable:

$$A = \frac{FL_i}{Y\Delta L}$$

Sustituya los valores conocidos:

$$A = \frac{(940\text{ N})(10\text{ m})}{(20 \times 10^{10}\text{ N/m}^2)(0.005\,0\text{ m})} = 9.4 \times 10^{-6}\text{ m}^2$$

Si supone que la sección transversal es circular, encuentre el radio del cable a partir de $A = \pi r^2$:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{9.4 \times 10^{-6}\ \text{m}^2}{\pi}} = 1.7 \times 10^{-3}\ \text{m} = 1.7\ \text{mm}$$

Encuentre el diámetro del cable:

$$d = 2r = 2(1.7\ \text{mm}) = \boxed{3.4\ \text{mm}}$$

Para proporcionar un gran margen de seguridad, probablemente usaría un cable flexible hecho de muchos alambres más pequeños que tengan una área de sección transversal sustancialmente mayor que el valor calculado.

EJEMPLO 12.6 Compresión de una esfera de latón

Una esfera de latón sólida inicialmente está rodeada de aire, y la presión del aire que se ejerce sobre ella es 1.0×10^5 N/m^2 (presión atmosférica normal). La esfera se sumerge en el océano a una profundidad donde la presión es 2.0×10^7 N/m^2. El volumen de la esfera en el aire es 0.50 m^3. ¿Por cuánto cambia el volumen una vez que la esfera se sumerge?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en las películas o programas de televisión que ha visto acerca de buzos que se sumergen a mayores profundidades en el agua en contenedores sumergibles. Dichos contenedores deben ser muy fuertes para soportar la gran presión bajo el agua. Esta presión comprime al contenedor y reduce su volumen.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.8, así que este ejemplo se clasifique como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.8 para el cambio de volumen de la esfera:

$$\Delta V = -\frac{V_i \Delta P}{B}$$

Sustituya los valores numéricos:

$$\Delta V = -\frac{(0.50\ \text{m}^3)(2.0 \times 10^7\ \text{N/m}^2 - 1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2)}{6.1 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2}$$

$$= \boxed{-1.6 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}$$

El signo negativo indica que el volumen de la esfera disminuye.

Resumen

DEFINICIONES

Se puede considerar que la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto actúa en un solo punto llamado **centro de gravedad**. El centro de gravedad de un objeto coincide con su centro de masa si el objeto está en un campo gravitacional uniforme.

Las propiedades elásticas de una sustancia se pueden describir con el uso de los conceptos de esfuerzo y deformación. El **esfuerzo** es una cantidad proporcional a la fuerza que produce una deformación; la **deformación** es una medida del grado de cambio de forma. El esfuerzo es proporcional a la deformación, y la constante de proporcionalidad es el **módulo elástico**:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \qquad \textbf{(12.5)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Tres tipos comunes de deformación se representan mediante 1) la resistencia de un sólido a elongación bajo una carga, que se caracteriza por el **módulo de Young** Y; 2) la resistencia de un sólido al movimiento de planos internos que se deslizan uno sobre otro, que se caracteriza por el **módulo de corte** S; y 3) la resistencia de un sólido o fluido a un cambio de volumen, que se caracteriza por el **módulo volumétrico** B.

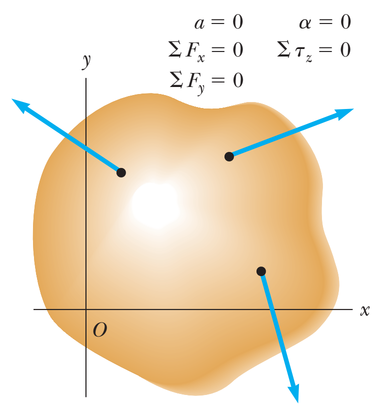
MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Objeto rígido en equilibrio. Un objeto rígido en equilibrio no muestra aceleración traslacional o angular. La fuerza externa neta que actúa sobre él es cero y el momento de torsión externo neto sobre él es cero en torno a cualquier eje:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = 0 \qquad \textbf{(12.1)}$$

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = 0 \qquad \textbf{(12.2)}$$

La primera condición es la condición para equilibrio traslacional, y la segunda es la condición para equilibrio rotacional.



Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** Suponga que una sola fuerza de 300 N se ejerce sobre el marco de una bicicleta, como se muestra en la figura P12.1. Considere el momento de torsión que se produce en torno a los ejes perpendiculares al plano del papel y a través de cada uno de los puntos del A al F, donde F es el centro de masa del marco. Clasifique los momentos de torsión τ_A, τ_B, τ_C, τ_D, τ_E y τ_F de mayor a menor, y note que cero es mayor que una cantidad negativa. Si dos momentos de torsión son iguales, anote su igualdad en la clasificación.

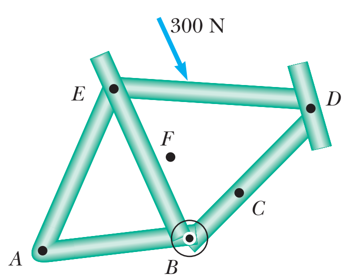


Figura P12.1

2. Póngase de pie con la espalda contra una pared. ¿Por qué no puede poner los talones firmemente contra la pared y luego doblarse hacia adelante sin caer?

3. ¿Un objeto puede estar en equilibrio si está en movimiento? Explique.

4. a) Proporcione un ejemplo en el que la fuerza neta que actúa sobre un objeto sea cero y aún así el momento de torsión neto sea distinto de cero. b) Proporcione un ejemplo en el que el momento de torsión que actúa sobre un objeto sea cero y aún así la fuerza neta sea distinta de cero.

5. **O** Considere el objeto de la figura 12.1. Sobre el objeto se ejerce una sola fuerza. La línea de acción de la fuerza no pasa a través del centro de masa del objeto. La aceleración del centro de masa del objeto debida a esta fuerza a) es la misma que si la fuerza se aplicara al centro de masa, b) es mayor a la aceleración que sería si la fuerza se aplicara al centro de masa, c) es menor a la aceleración que sería si la fuerza se aplicara al centro de masa o d) es cero porque la fuerza sólo causa aceleración angular en torno al centro de masa.

6. El centro de gravedad de un objeto se puede ubicar afuera del objeto. Proporcione algunos ejemplos para los que este caso sea verdadero.

7. Suponga que a usted se le proporciona un trozo de madera con cualquier forma, junto con un martillo, clavos y una plomada. ¿Cómo usaría estos objetos para ubicar el centro de gravedad de la madera? *Sugerencia:* Use el clavo para suspender la madera.

8. **O** En la cabina de un barco, una lata de refresco descansa en una hendidura con forma de plato empotrado en un mostrador. La lata se inclina conforme el barco se bambolea lentamente. ¿En cuál caso la lata es más estable contra las volcaduras? a) Es más estable cuando está llena. b) Es más estable cuando está medio llena. c) Es más estable cuando está vacía. d) Es más estable en dos de estos casos. e) Es igualmente estable en todos los casos.

9. **O** La aceleración debida a la gravedad se vuelve más débil en casi tres partes en diez millones por cada metro de aumento de elevación sobre la superficie de la Tierra. Suponga que un rascacielos tiene 100 pisos de alto, con el mismo plano de piso para cada planta y con densidad promedio uniforme. Compare la ubicación del centro de masa del edificio y la ubicación de su centro de gravedad. Elija una. a) Su centro de masa está más arriba en una distancia de varios metros. b) Su centro de masa está más arriba en una distancia de varios milímetros. c) Su centro de masa está más arriba por una cantidad infinitesimalmente pequeña. d) Su centro de masa y su centro de gravedad están en la misma posición. e) Su centro de gravedad está más arriba en una distancia de varios milímetros. f) Su centro de gravedad está más arriba en una distancia de varios metros.

10. Una niña tiene un gran perro, dócil, al que quiere pesar en una pequeña báscula de baño. Ella justifica que puede determinar el peso del perro con el siguiente método. Primero coloca las dos patas delanteras del perro sobre la báscula y registra la lectura de la báscula. Luego coloca las dos patas traseras del perro sobre la báscula y registra la lectura. Piensa que la suma de las lecturas será el peso del perro. ¿Tiene razón? Explique su respuesta.

11. **O** El centro de gravedad de un hacha está en la línea central del mango, cerca de la cabeza. Suponga que usted corta a través del mango por el centro de gravedad y pesa las dos partes. ¿Qué descubrirá? a) El lado del mango es más pesado que el lado de la cabeza. b) El lado de la cabeza es más pesado que el lado del mango. c) Las dos partes son igualmente pesadas. d) Sus pesos comparativos no se pueden predecir.

12. Una escalera está de pie sobre el suelo y se inclina contra una pared. ¿Se sentiría más seguro de subir a la escalera si le dijeran que el suelo no tiene fricción pero que la pared es rugosa, o si le dicen que la pared no tiene fricción pero que el suelo es rugoso? Justifique su respuesta.

13. **O** Al analizar el equilibrio de un objeto rígido plano, considere la etapa de elegir un eje en torno al cuál calcular momentos de torsión. a) No se requiere hacer elección alguna. b) El eje pasaría a través del centro de masa del objeto. c) El eje pasaría a través de un extremo del objeto. d) El eje sería el eje x o el eje y. e) El eje necesita ser un árbol de motor, pasador de bisagra, punto de giro o centro de apoyo. f) El eje pasaría a través de cualquier punto dentro del objeto. g) Se podría elegir cualquier eje dentro o fuera del objeto.

14. **O** Cierto alambre, de 3 m de largo, se estira 1.2 mm cuando está bajo 200 N de tensión. **i)** Un alambre igualmente grueso de 6 m de largo, hecho del mismo material y bajo la misma tensión, se estira a) 4.8 mm, b) 2.4 mm, c) 1.2 mm, d) 0.6 mm, e) 0.3 mm, f) 0. **ii)** Un alambre con el doble de diámetro, de 3 m de largo, hecho del mismo material y bajo la misma tensión, ¿cuánto se estira? Elija de las mismas posibilidades de la a) a la f).

15. ¿Qué tipo de deformación muestra un cubo de gelatina cuando tiembla?

Problemas

Sección 12.1 Objeto rígido en equilibrio

1. Una viga uniforme de masa m_b y longitud ℓ sostiene bloques con masas m_1 y m_2 en dos posiciones, como se muestra en la figura P12.1. La viga descansa sobre dos bordes afilados. ¿Para qué valor de x la viga se equilibra en P tal que la fuerza normal en O es cero?

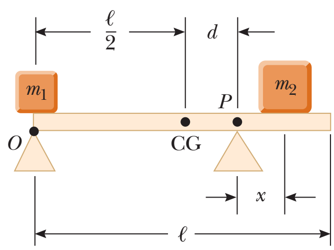


Figura P12.1

2. Escriba las condiciones necesarias para el equilibrio del objeto que se muestra en la figura P12.2. Calcule momentos de torsión en torno a un eje a través del punto O.

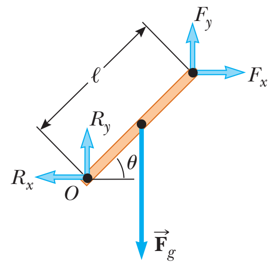


Figura P12.2

Sección 12.2 Más acerca del centro de gravedad

> Con esta sección también se pueden asignar los problemas 35, 37, 39 y 40 del capítulo 9.

3. La escuadra de un carpintero tiene la forma de una L, como se muestra en la figura P12.3. Ubique su centro de gravedad.

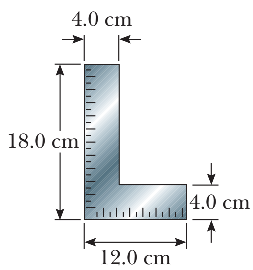


Figura P12.3

4. A una pizza circular de radio R se le quita un trozo circular de radio $R/2$, como se muestra en la figura P12.4. El centro de gravedad se movió de C a C' a lo largo del eje x. Muestre que la distancia de C a C' es $R/6$. Suponga que el grosor y la densidad de la pizza son uniformes en todas sus partes.

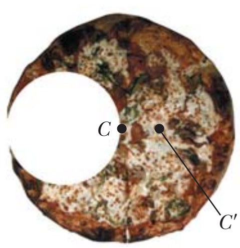


Figura P12.4

5. Considere la siguiente distribución de objetos: un objeto de 5.00 kg con su centro de gravedad en (0, 0) m, un objeto de 3.00 kg en (0, 4.00) m y un objeto de 4.00 kg en (3.00, 0) m. ¿Dónde se debe colocar un cuarto objeto de 8.00 kg de masa de modo que el centro de gravedad del arreglo de cuatro objetos esté en (0, 0)?

6. Fátima construye con madera sólida una pista para su automóvil a escala, como se muestra en la figura P12.6. La pista tiene 5.00 m de ancho, 1.00 m de alto y 3.00 m de largo. La pista se corta de modo que forma una parábola con la ecuación $y = (x - 3)^2/9$. Ubique la coordenada horizontal del centro de gravedad de esta pista.

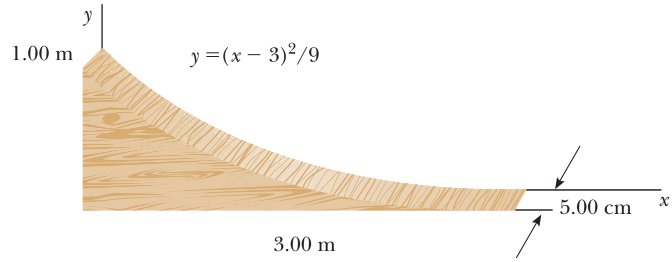


Figura P12.6

7. La figura P12.7 muestra tres objetos uniformes: una barra, un triángulo rectángulo y un cuadrado. Se proporcionan sus masas y sus coordenadas en metros. Determine el centro de gravedad para el sistema de tres objetos.

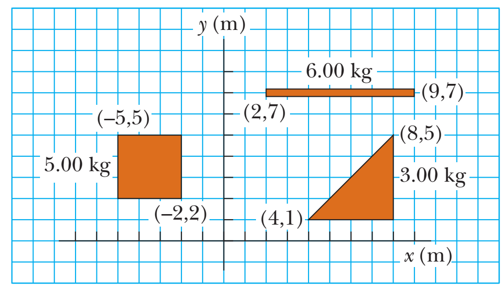


Figura P12.7

Sección 12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

> Con esta sección también se pueden asignar los problemas 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 30, 40, 44, 47, 57, 61, 65 y 71.

8. Se construye un móvil con barras ligeras, cuerdas ligeras y recuerdos marinos, como se muestra en la figura P12.8. Determine las masas de los objetos a) m_1, b) m_2 y c) m_3.

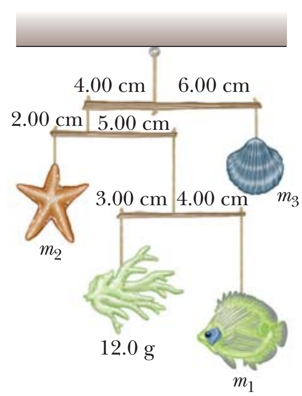


Figura P12.8

9. Encuentre la masa m del contrapeso necesario para equilibrar el camión de 1 500 kg sobre el plano inclinado que se muestra en la figura P12.9. Suponga que ninguna polea tiene fricción ni masa.

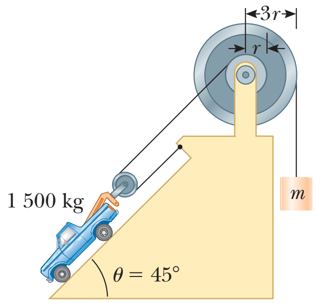


Figura P12.9

10. La figura P12.10 muestra un martillo de oreja que se usa para quitar un clavo de una tabla horizontal. Se ejerce una fuerza de 150 N horizontalmente como se muestra. Encuentre a) la fuerza que ejerce el martillo sobre el clavo y b) la fuerza que ejerce la superficie sobre el punto de contacto con la cabeza del martillo. Suponga que la fuerza que ejerce el martillo sobre el clavo es paralela al clavo.

Figura P12.10

11. Una escalera uniforme de 15.0 m que pesa 500 N descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo de 60.0° con la horizontal. a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que ejerce el suelo sobre la base de la escalera cuando un bombero de 800 N está a 4.00 m desde la parte baja. b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a 9.00 m arriba, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

12. Una escalera uniforme de longitud L y masa m_1 descansa contra una pared sin fricción. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. a) Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que el suelo ejerce sobre la base de la escalera cuando un bombero de masa m_2 está a una distancia x desde la parte baja. b) Si la escalera está a punto de deslizarse cuando el bombero está a una distancia d desde la parte baja, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo?

13. Un automóvil de 1 500 kg tiene una base de ruedas (distancia entre los ejes) de 3.00 m. El centro de masa del automóvil está en la línea de centros en un punto 1.20 m detrás del eje frontal. Encuentre la fuerza que ejerce el suelo sobre cada rueda.

14. ● Un reflector de 20.0 kg en un parque está sostenido al final de una viga horizontal de masa despreciable que está articulada a un poste como se muestra en la figura P12.14. Un cable a un ángulo de 30.0° con la viga ayuda a sostenerlo. Considere el equilibrio de la viga y dibuje un diagrama de cuerpo libre de dicho objeto. Calcule los momentos de torsión en torno a un eje en la bisagra en su extremo izquierdo. Encuentre: a) la tensión en el cable, b) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga y c) la componente vertical de esta fuerza. Ahora resuelva el mismo problema desde el mismo diagrama de cuerpo libre al calcular los momentos de torsión alrededor de la unión entre el cable y la viga en el extremo derecho de la viga. Encuentre: d) la componente vertical de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga, e) la tensión en el cable y f) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga. g) Compare la solución a los incisos de la a) a la c) con la solución a los incisos de la d) a la f). ¿Alguna solución es más precisa? ¿Más simple? Si considera el conjunto de ecuaciones que se leen a partir del diagrama de cuerpo libre en ambas soluciones, ¿cuántas ecuaciones tiene? ¿Cuántas incógnitas se pueden determinar?

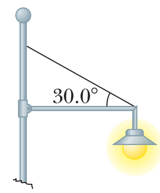


Figura P12.14

15. Una cadena flexible que pesa 40.0 N cuelga entre dos ganchos ubicados a la misma altura (figura P12.15). En cada gancho, la tangente a la cadena forma un ángulo $\theta = 42.0°$ con la horizontal. Encuentre a) la magnitud de la fuerza que ejerce cada gancho sobre la cadena y b) la tensión en la cadena en su punto medio. *Sugerencia:* para el inciso b), elabore un diagrama de cuerpo libre para la mitad de la cadena.

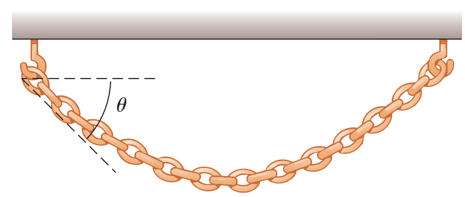


Figura P12.15

16. El Sr. Distraído se pone su armadura y sale del castillo en su noble corcel en su búsqueda por mejorar la comunicación entre las damiselas y los dragones (figura P12.16). Por desgracia, su escudero bajó demasiado el puente levadizo y finalmente se detuvo a 20.0° bajo la horizontal. Distraído y su caballo se

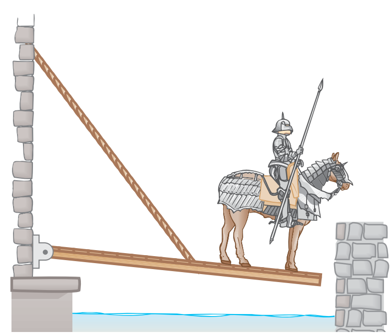


Figura P12.16 Problemas 16 y 17.

detienen cuando su centro de masa combinado está a 1.00 m del extremo del puente. El puente uniforme mide 8.00 m de largo y tiene un masa de 2 000 kg. El cable de elevación está unido al puente a 5.00 m de la bisagra en el lado del castillo y a un punto en la pared del castillo 12.0 m arriba del puente. La masa combinada de Distraído con su armadura y su corcel es 1 000 kg. Determine a) la tensión en el cable y las componentes de fuerza b) horizontal y c) vertical que actúan sobre el puente en la bisagra.

17. **Problema de repaso.** En la situación descrita en el problema 16 y que se ilustra en la figura P12.16, ¡súbitamente se rompe el cable de elevación! La bisagra entre la pared del castillo y el puente no tiene fricción y el puente se balancea libremente hasta que está en posición vertical. a) Encuentre la aceleración angular del puente una vez que comienza a moverse. b) Halle la rapidez angular del puente cuando golpea la pared vertical del castillo abajo de la bisagra. c) Encuentre la fuerza que ejerce la bisagra sobre el puente inmediatamente después de que el cable se rompe. d) Halle la fuerza que ejerce la bisagra sobre el puente justo antes de que golpee la pared del castillo.

18. Niels empuja a su hermana Camille en una carretilla cuando la detiene un ladrillo de 8.00 cm de alto (figura P12.18). El manubrio de la carretilla forma un ángulo de 15.0° bajo la horizontal. Sobre la rueda, que tiene un radio de 20.0 cm, se ejerce una fuerza hacia abajo de 400 N. a) ¿Qué fuerza debe aplicar Niels a lo largo del manubrio para apenas comenzar a pasar la rueda sobre el ladrillo? b) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando la rueda comienza a elevarse sobre el ladrillo? En ambos incisos a) y b), suponga que el ladrillo permanece fijo y no se desliza sobre el suelo.

Figura P12.18

19. Un extremo de una barra uniforme de 4.00 m de largo y peso F_g está sostenido mediante un cable. El otro extremo descansa contra la pared, donde se mantiene por fricción, como se muestra en la figura P12.19. El coeficiente de fricción estática entre la pared y la barra es $\mu_s = 0.500$. Determine la distancia mínima x desde el punto A en el que un objeto adicional, también con el mismo peso F_g, se puede colgar sin hacer que la barra se deslice en el punto A.

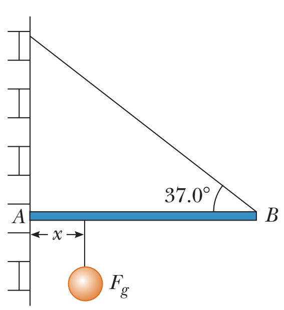


Figura P12.19

20. En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 12.2, sea x la distancia en metros entre la persona y la bisagra en el extremo izquierdo de la viga. a) Demuestre que la tensión del cable en newtons se conoce por $T = 93.9x + 125$. Argumente que T aumenta conforme x aumenta. b) Demuestre que el ángulo de dirección θ de la fuerza de la bisagra está descrito por

$$\tan\theta = \left(\frac{32}{3x+4} - 1\right)\tan 53.0°$$

¿Cómo cambia θ conforme x aumenta? c) Demuestre que la magnitud de la fuerza de la bisagra se conoce por

$$R = \sqrt{8.82 \times 10^3 x^2 - 9.65 \times 10^4 x + 4.96 \times 10^5}$$

¿Cómo cambia R conforme x aumenta?

21. Una saltadora con garrocha sostiene en equilibrio una garrocha de 29.4 N al ejercer una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{U}}$ con una mano y una fuerza hacia abajo $\vec{\mathbf{D}}$ con la otra mano, como se muestra en la figura P12.21. El punto C es el centro de gravedad de la garrocha. ¿Cuáles son las magnitudes de $\vec{\mathbf{U}}$ y $\vec{\mathbf{D}}$?

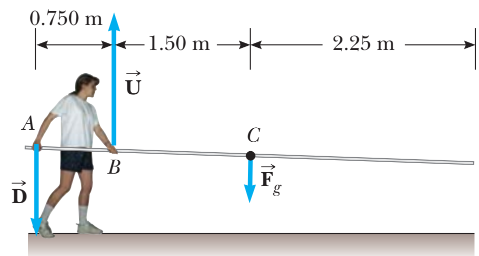


Figura P12.21

Sección 12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

22. Evalúe el módulo de Young para el material cuya curva esfuerzo–deformación se muestra en la figura 12.13.

23. Una carga de 200 kg cuelga de un alambre de 4.00 m de largo, área de sección transversal de 0.200×10^{-4} m^2 y módulo de Young de 8.00×10^{10} N/m^2. ¿Cuál es su aumento en longitud?

24. Suponga que el módulo de Young para hueso es 1.50×10^{10} N/m^2. El hueso se rompe si sobre él se impone un esfuerzo mayor que 1.50×10^8 N/m^2. a) ¿Cuál es la fuerza máxima que se puede ejercer sobre el fémur si éste tiene un diámetro efectivo mínimo de 2.50 cm? b) Si esta fuerza se aplica de manera compresiva, ¿en cuánto se acorta el hueso de 25.0 cm de largo?

25. Un niño se desliza por el suelo con un par de zapatos con suela de caucho. La fuerza de fricción que actúa sobre cada pie es de 20.0 N. El área de la huella de cada suela mide 14.0 cm^2 y el grosor de cada suela es de 5.00 mm. Encuentre la distancia horizontal que corren las superficies superior e inferior de cada suela. El módulo de corte del caucho es 3.00 MN/m^2.

26. Un alambre de acero de 1 mm de diámetro puede sostener una tensión de 0.2 kN. Un cable para soportar una tensión de 20 kN debe tener diámetro, ¿de qué orden de magnitud?

27. Suponga que, si el esfuerzo de corte en el acero supera aproximadamente 4.00×10^8 N/m^2, el acero se rompe. Determine la fuerza de corte necesaria para a) cortar un tornillo de acero de 1.00 cm de diámetro y b) perforar un agujero de 1.00 cm de diámetro en una placa de acero de 0.500 cm de grueso.

28. **Problema de repaso.** Un martillo de 30.0 kg, que se mueve con rapidez de 20.0 m/s, golpea una púa de 2.30 cm de diámetro. El martillo rebota con rapidez de 10.0 m/s después de 0.110 s. ¿Cuál es la deformación promedio en la púa durante el impacto?

29. Cuando el agua se congela, se expande aproximadamente 9.00%. ¿Qué aumento de presión se presenta dentro del monoblock de su automóvil si el agua se congela? (El módulo volumétrico del hielo es 2.00×10^9 N/m^2.)

30. **Problema de repaso.** Un alambre cilíndrico de acero de 2.00 m de largo, con diámetro de sección transversal de 4.00 mm, se coloca sobre una polea ligera sin fricción, con un extremo del alambre conectado a un objeto de 5.00 kg y el otro extremo conectado a un objeto de 3.00 kg. ¿Cuánto se estira el alambre mientras los objetos están en movimiento?

31. Una pasarela suspendida a través del lobby de un hotel está sostenido en numerosos puntos a lo largo de sus bordes mediante un cable vertical arriba de cada punto y una columna vertical por debajo. El cable de acero mide 1.27 cm de diámetro y mide 5.75 m de largo antes de la carga. La columna de aluminio es un cilindro hueco con un diámetro interior de 16.14 cm, diámetro exterior de 16.24 cm y longitud sin carga de 3.25 m. Cuando la pasarela ejerce una fuerza de carga de 8 500 N sobre uno de los puntos de soporte, ¿cuánto baja el punto?

32. ● El punto más profundo en cualquier océano está en la fosa Mariana, que tiene aproximadamente 11 km de profundidad, en el Pacífico. La presión a esta profundidad es enorme, más o menos de 1.13×10^8 N/m^2. a) Calcule el cambio en volumen de 1.00 m^3 de agua de mar que se lleve desde la superficie hasta este punto más profundo. b) La densidad del agua de mar en la superficie es 1.03×10^3 kg/m^3. Encuentre su densidad en el fondo. c) Explique si es o cuándo es una buena aproximación pensar en el agua como incompresible.

Problemas adicionales

33. Un puente de 50.0 m de largo y 8.00×10^4 kg de masa está sostenido sobre un pilar uniforme en cada extremo, como muestra la figura P12.33. Un camión de 3.00×10^4 kg de masa se ubica a 15.0 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de soporte?

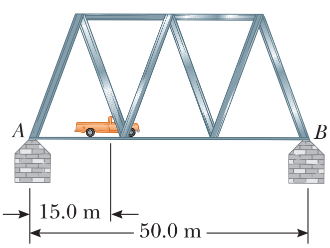


Figura P12.33

34. ● Una nueva estufa de cocina de General Electric tiene una masa de 68.0 kg y las dimensiones que se muestran en la figura P12.34. La estufa viene con una advertencia de que se puede inclinar hacia adelante si una persona se para o sienta sobre la puerta del horno cuando está abierta. ¿Qué puede concluir acerca del peso de tal persona? ¿Podría ser un niño? Mencione las suposiciones que hizo para resolver este problema. La estufa viene con una escuadra que se fija en la pared para evitar un accidente.

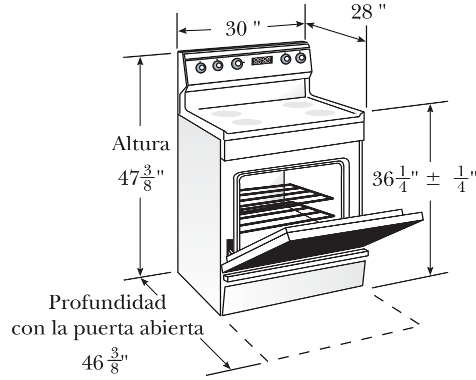


Figura P12.34

35. Un poste uniforme se apoya entre el suelo y el techo de una habitación. La altura de la habitación es 7.80 pies, y el coeficiente de fricción estática entre el poste y el techo es 0.576. El coeficiente de fricción estática entre el poste y el suelo es mayor que eso. ¿Cuál es la longitud del poste más largo que se puede apoyar entre el suelo y el techo?

36. Consulte la figura 12.16c. Un dintel de hormigón armado pretensado mide 1.50 m de largo. El área de sección transversal del concreto es 50.0 cm^2. El concreto encierra una barra de refuerzo de acero con área de sección transversal de 1.50 cm^2. La barra une dos fuertes placas finales. El módulo de Young para el concreto es 30.0×10^9 N/m^2. Después de curar el concreto y liberar la tensión original T_1 en la barra, el concreto está bajo esfuerzo de compresión de 8.00×10^6 N/m^2. a) ¿Qué distancia comprime al concreto cuando la tensión original en la barra se libera? b) ¿Cuál es la nueva tensión T_2 en la barra? c) ¿En tal caso la barra será cuánto más larga que su longitud no esforzada? d) Cuando se vierte el concreto, ¿por qué distancia de extensión se debe haber estirado la barra desde su longitud no esforzada? e) Encuentre la tensión original requerida T_1 en la barra.

37. Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia afuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de comida que cuelga en el extremo de la viga (figura P12.37). La viga es uniforme, pesa 200 N y mide 6.00 m de largo; la canasta pesa 80.0 N. a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. b) Cuando el oso está en $x = 1.00$ m, encuentre la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza que ejerce la pared sobre el extremo izquierdo de la viga. c) **¿Qué pasaría si?** Si el alambre puede resistir una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de que el alambre se rompa?

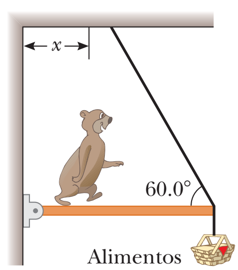


Figura P12.37

38. Las siguientes ecuaciones se obtienen a partir de un diagrama de cuerpo libre de una puerta rectangular, sostenida por dos bisagras en el lado izquierdo. Una cubeta de grano cuelga de la puerta.

$$-A + C = 0$$

$$+B - 392\text{ N} - 50.0\text{ N} = 0$$

$$A(0) + B(0) + C(1.80\text{ m}) - 392\text{ N}(1.50\text{ m}) - 50.0\text{ N}(3.00\text{ m}) = 0$$

a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre y complete el enunciado del problema, y especifique las incógnitas. b) Determine los valores de las incógnitas y establezca el significado físico de cada una.

39. Una señal uniforme de peso F_g y ancho $2L$ cuelga de una viga horizontal ligera con bisagra en la pared y sostenida por un cable (figura P12.39). Determine a) la tensión en el cable y b) las componentes de la fuerza de reacción que ejerce la pared sobre la viga, en términos de F_g, d, L y θ.

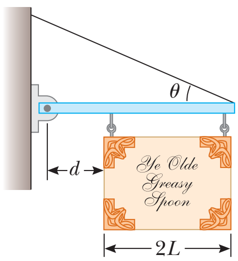


Figura P12.39

40. Una pluma uniforme de 1 200 N está sostenida mediante un cable, como se muestra en la figura P12.40. La pluma está articulada en la parte baja, y un objeto de 2 000 N cuelga de su parte superior. Encuentre la tensión en el cable y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el suelo sobre la pluma.

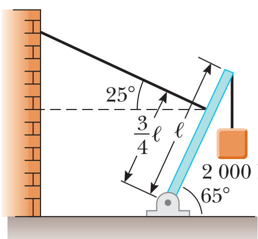


Figura P12.40

41. Una grúa de 3 000 kg de masa soporta una carga de 10 000 kg, como se muestra en la figura P12.41. La grúa se articula sin fricción en A y descansa contra un soporte uniforme en B. Encuentre las fuerzas de reacción en A y B.

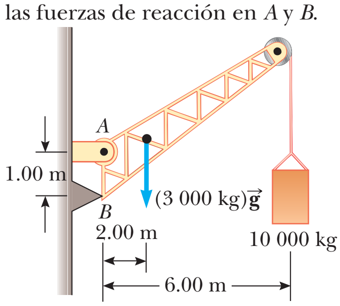


Figura P12.41

42. ● Suponga que una persona se dobla hacia adelante para levantar una carga "con su espalda", como se muestra en la figura P12.42a. La columna de la persona se articula principalmente en la quinta vértebra lumbar, y la principal fuerza de soporte la proporciona el músculo espinal erector de la espalda. Para estimar la magnitud de las fuerzas involucradas, considere el modelo que se muestra en la figura P12.42b para una persona que se dobla hacia adelante para levantar un objeto de 200 N. La columna de la persona y la parte superior del cuerpo se representan como una barra horizontal uniforme de 350 N de peso, que se articula en la base de la columna. El músculo espinal erector, unido a un punto a dos tercios de camino sobre la columna, mantiene la posición de la espalda. El ángulo entre la columna y este músculo es 12.0°. Encuentre a) la tensión en el músculo de la espalda y b) la fuerza compresiva en la columna. c) ¿Este método es una buena forma de levantar una carga? Explique su respuesta, con los resultados de los incisos a) y b). Puede ser instructivo comparar un humano con otros animales. ¿Puede sugerir un mejor método para levantar una carga?

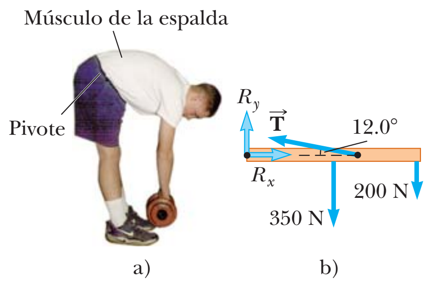


Figura P12.42

43. Un tiburón de 10 000 N está sostenido mediante un cable unido a una barra de 4.00 m que se articula en la base. Calcule la tensión en la soga entre la barra y la pared, si supone que la misma sostiene el sistema en la posición que se muestra en la figura P12.43. Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que se ejercen sobre la base de la barra. Ignore el peso de la barra.

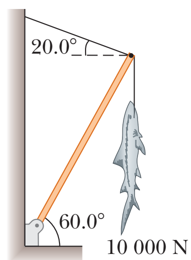


Figura P12.43

44. Una barra uniforme de peso F_g y longitud L está sostenida en sus extremos mediante un canal, como se muestra en la figura P12.44. a) Demuestre que el centro de gravedad de

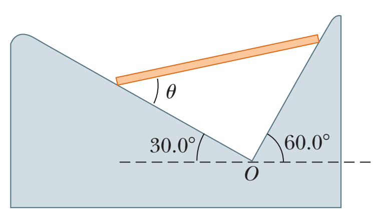


Figura P12.44

la barra debe ser vertical sobre el punto O cuando la barra está en equilibrio. b) Determine el valor de equilibrio del ángulo θ.

45. Se ejerce una fuerza en un gabinete rectangular uniforme de 400 N de peso, como es muestra en la figura P12.45. a) El gabinete se desliza con rapidez constante cuando $F = 200$ N y $h = 0.400$ m. Encuentre el coeficiente de fricción cinética y la posición de la fuerza normal resultante. b) Si considera $F = 300$ N, encuentre el valor de h para el que el gabinete apenas comience a inclinarse.

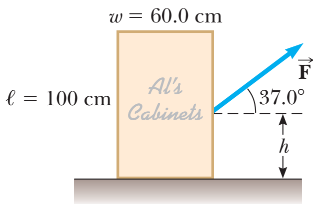


Figura P12.45

46. Considere el gabinete rectangular del problema 45, pero con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada horizontalmente en el borde superior. a) ¿Cuál es la fuerza mínima que se requiere para comenzar a inclinar el gabinete? b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo requerido para que el gabinete no se deslice con la aplicación de una fuerza de esta magnitud? c) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza mínima requerida para inclinar el gabinete si el punto de aplicación se puede elegir en cualquier parte sobre el gabinete.

47. Una viga uniforme de masa m se inclina en un ángulo θ con la horizontal. Su extremo superior produce una inclinación de 90° en una soga muy rugosa amarrada a una pared, y su extremo inferior descansa sobre un suelo rugoso (figura P12.47). a) Sea μ_s el coeficiente de fricción estática entre viga y suelo. Suponga que μ_s es menor que la cotangente de θ. Determine una expresión para la masa máxima M que se puede suspender desde lo alto antes de que la viga se deslice. b) Determine la magnitud de la fuerza de reacción en el suelo y la magnitud de la fuerza que ejerce la viga sobre la soga en P en términos de m, M y μ_s.

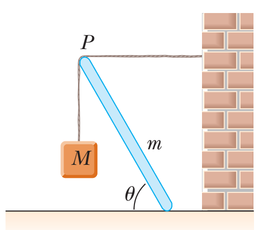


Figura P12.47

48. ● Considere una armadura ligera, con peso despreciable comparado con la carga que soporta. Suponga que se forma a partir de puntales que yacen en un plano y se unen mediante pasadores de bisagra uniforme en sus extremos. Fuerzas externas actúan sobre la armadura sólo en las juntas. La figura P12.48 muestra un ejemplo de la armadura más simple, con tres puntales y tres pernos. Establezca el razonamiento para probar que la fuerza que ejerce cualquier puntal sobre un perno debe dirigirse a lo largo de la longitud del puntal, como una fuerza de tensión o compresión.

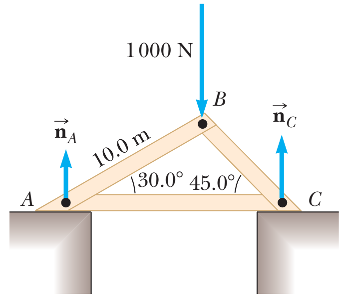


Figura P12.48

49. La figura P12.48 muestra una estructura que soporta una fuerza hacia abajo de 1 000 N aplicada en el punto B. La estructura tiene peso despreciable. Los pilares en A y C son uniformes. a) Aplique las condiciones de equilibrio para probar que $n_A = 366$ N y $n_C = 634$ N. b) Use el resultado que probó en el problema 48 para identificar las direcciones de las fuerzas que ejercen las barras en los pernos que los unen. Encuentre la fuerza de tensión o de compresión en cada una de las tres barras.

50. Un lado de una repisa está sostenido por una ménsula montada sobre una pared vertical mediante un solo tornillo, como se muestra en la figura P12.50. Ignore el peso de la ménsula. a) Encuentre la componente horizontal de la fuerza que ejerce el tornillo en la ménsula cuando una fuerza vertical de 80.0 N se aplica como se muestra. b) Mientras su abuelo riega sus geranios, la fuerza de carga de 80.0 N aumenta con rapidez de 0.150 N/s. ¿En qué proporción cambia la fuerza que ejerce el tornillo? *Sugerencia:* Imagine que la ménsula está ligeramente floja. Puede resolver los incisos a) y b) con más eficiencia si llama a la fuerza de carga W y resuelve simbólicamente para la fuerza del tornillo F.

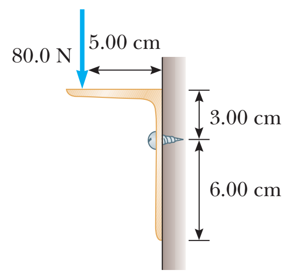


Figura P12.50

51. Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.51. Un pintor de 70.0 kg de masa

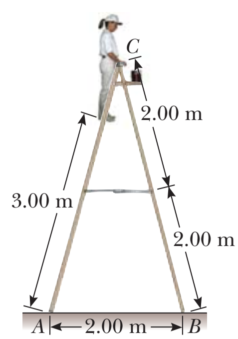


Figura P12.51

está de pie en la escalera, a 3.00 m desde la parte baja. Suponga que el suelo no tiene fricción. Encuentre a) la tensión en la barra horizontal que conecta las dos mitades de la escalera, b) las fuerzas normales en A y B, y c) las componentes de la fuerza de reacción en la única bisagra C que la mitad izquierda de la escalera ejerce en la mitad derecha. *Sugerencia:* Trate la escalera como un solo objeto, pero también cada mitad de la escalera por separado.

52. ● La figura P12.52 muestra la aplicación tangencial de una fuerza vertical a un cilindro uniforme de peso F_g. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y todas las superficies es 0.500. En términos de F_g, encuentre la fuerza máxima P que se puede aplicar sin causar que el cilindro dé vuelta. Como primera etapa, explique por qué ambas fuerzas de fricción estarán en sus valores máximos cuando el cilindro esté a punto de deslizarse.

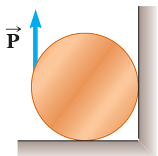


Figura P12.52

53. **Problema de repaso.** Un alambre de longitud L, módulo de Young Y y área de sección transversal A se estira elásticamente una cantidad ΔL. Por la ley de Hooke, la fuerza restauradora es $-k\,\Delta L$. a) Demuestre que $k = YA/L$. b) Demuestre que el trabajo consumido al estirar el alambre una cantidad ΔL es

$$W = \tfrac{1}{2}YA\,\frac{(\Delta L)^2}{L}$$

54. Dos pelotas de squash, cada una de 170 g de masa, se colocan en un frasco de vidrio como se muestra en la figura P12.54. Sus centros y el punto A se encuentran en una línea recta. Suponga que las paredes no tienen fricción. a) Determine P_1, P_2 y P_3. b) Determine la magnitud de la fuerza que ejerce la pelota izquierda sobre la pelota derecha.

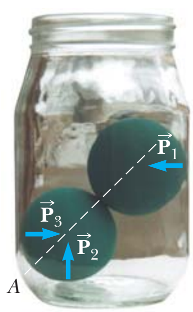


Figura P12.54

55. En los estudios de fisiología del ejercicio, a veces es importante determinar la posición del centro de masa de una persona. Esta determinación se realiza con el dispositivo que se muestra en la figura P12.55. Una plancha ligera descansa sobre dos básculas, que leen $F_{g1} = 380$ N y $F_{g2} = 320$ N. Una distancia de 2.00 m separa las básculas. ¿A qué distancia de los pies de la mujer está su centro de masa?

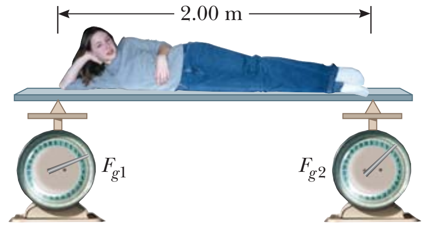


Figura P12.55

56. Un cable de acero de 3.00 cm^2 de área de sección transversal tiene una masa de 2.40 kg por cada metro de longitud. Si 500 m del cable cuelgan de un risco vertical, ¿cuánto se estira el cable bajo su propio peso? Considere $Y_{\text{acero}} = 2.00 \times 10^{11}$ N/m^2.

57. a) Estime la fuerza con la que un maestro de karate golpea una tabla, si supone que la rapidez de la mano en el momento del impacto es 10.0 m/s, y disminuye a 1.00 m/s durante un intervalo de tiempo de contacto de 0.002 00 s entre la mano y la tabla. La masa de su mano y brazo es 1.00 kg. b) Estime el esfuerzo de corte, si supone que esta fuerza se ejerce sobre una tabla de pino de 1.00 cm de grueso que mide 10.0 cm de ancho. c) Si el esfuerzo de corte máximo que soporta la tabla de pino antes de romperse es de 3.60×10^6 N/m^2, ¿la tabla se romperá?

58. **Problema de repaso.** Un alambre de aluminio mide 0.850 m de largo y tiene una sección transversal circular de 0.780 mm de diámetro. Fijo en el extremo superior, el alambre soporta un objeto de 1.20 kg que se balancea en un círculo horizontal. Determine la velocidad angular que se requiere para producir una deformación de 1.00×10^{-3}.

59. **Problema de repaso.** Un remolque con peso cargado $\vec{F}_g$ se jala mediante un vehículo con una fuerza $\vec{P}$, como se muestra en la figura P12.59. El remolque se carga de tal modo que su centro de masa se ubica como se muestra. Ignore la fuerza de fricción de rodamiento y sea a la componente x de la aceleración del remolque. a) Encuentre la componente vertical de $\vec{P}$ en términos de los parámetros dados. b) Suponga $a = 2.00$ m/s^2 y $h = 1.50$ m. ¿Cuál debe ser el valor de d tal que $P_y = 0$ (sin carga vertical sobre el vehículo)? c) Encuentre los valores de P_x y P_y dado que $F_g = 1\,500$ N, $d = 0.800$ m, $L = 3.00$ m, $h = 1.50$ m y $a = -2.00$ m/s^2.

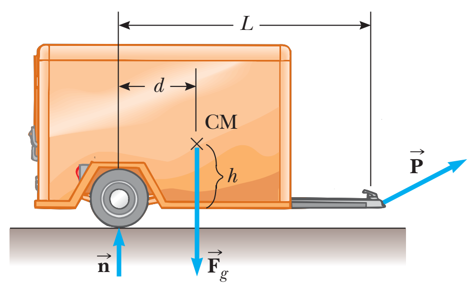


Figura P12.59

60. **Problema de repaso.** Un automóvil se mueve con rapidez v sobre una pista circular horizontal de radio R. En la figura P12.60 se muestra una vista frontal del auto. La altura del centro de masa del automóvil sobre el suelo es h, y la separación entre sus ruedas interior y exterior es d. El camino está seco y el automóvil no se derrapa. Demuestre que la rapidez máxima que puede tener el automóvil, sin volcar, se conoce por

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{gRd}{2h}}$$

Para reducir el riesgo de rodar, ¿se debe aumentar o reducir h? ¿Se debe aumentar o reducir el ancho d de la base de la rueda?

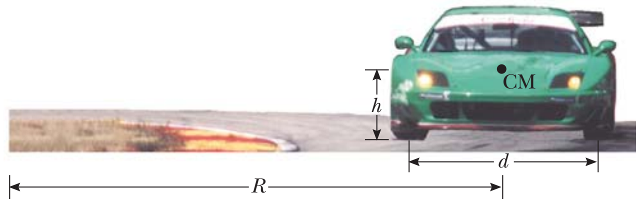


Figura P12.60

Respuestas a las preguntas rápidas

12.1 a). Los momentos de torsión no equilibrados debidos a las fuerzas de la figura 12.2 causan una aceleración angular aun cuando la aceleración traslacional sea cero.

12.2 b). Las líneas de acción de todas las fuerzas en la figura 12.3 intersecan en un punto común. Por lo tanto, el momento de torsión neto en torno a este punto es cero. Este valor cero del momento de torsión neto es independiente de los valores de las fuerzas. Ya que ninguna fuerza tiene una componente hacia abajo, existe una fuerza neta y el objeto no tiene equilibrio de fuerza.

12.3 b). Tanto el objeto como el centro de gravedad de la regleta están a 25 cm del punto de rotación. En consecuencia, la regleta y el objeto deben tener la misma masa para que el sistema esté en equilibrio.

12.4 **i)**, b). La fuerza de fricción en el bloque mientras se desliza a lo largo de la superficie es paralela a la superficie inferior y hará que el bloque se someta a una deformación de corte. **ii)**, a). El estiramiento del alambre debido al aumento de tensión se describe mediante el módulo de Young. **iii)**, c). La presión de la atmósfera resulta en una fuerza de magnitud uniforme perpendicular en todos los puntos sobre la superficie de la esfera.