Una clavadista competitiva experimenta una rotación durante un clavado. Ella logra girar a una rapidez más alta cuando dobla su cuerpo y forma con él un paquete más pequeño, esto se debe al principio de conservación de cantidad de movimiento angular, como se explica en este capítulo. (The Image Bank/Getty Images)

11.1 Producto vectorial y momento de torsión

11.2 Cantidad de movimiento angular: el sistema no aislado

11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio

11.4 El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

11 Cantidad de movimiento angular

El tema central de este capítulo es la cantidad de movimiento angular, una cantidad que tiene un papel clave en la dinámica rotacional. En analogía con el principio de conservación de cantidad de movimiento lineal para un sistema aislado, la cantidad de movimiento angular de un sistema se conserva si sobre el sistema no actúan momentos de torsión externos. Como la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal, la ley de conservación de cantidad de movimiento angular es una ley fundamental de la física, igualmente válida para sistemas relativistas y cuánticos.

11.1 Producto vectorial y momento de torsión

Una importante consideración al definir la cantidad de movimiento angular es el proceso de multiplicar dos vectores mediante la operación llamada *producto vectorial.* El producto vectorial se introducirá al considerar la naturaleza vectorial del momento de torsión.

Considere una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto rígido en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ (figura 11.1). Como se vio en la sección 10.6, la *magnitud* del momento de torsión debido a esta fuerza en torno a un eje a través del origen es rF sen ϕ, donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. El eje en torno al que $\vec{\mathbf{F}}$ tiende a producir rotación es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$.

El vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se relaciona con los dos vectores $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$. Es posible establecer una correspondencia matemática entre $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ al usar una operación matemática llamada **producto vectorial** o **producto cruz**:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \tag{11.1}$$

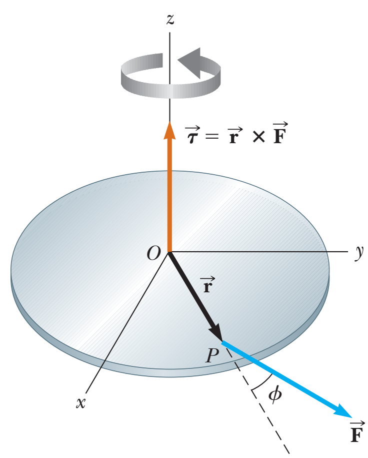


Figura 11.1 El vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ y el vector fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 11.1

El producto cruz es un vector

Recuerde que el resultado de tomar un producto cruz entre dos vectores es *un tercer vector*. La ecuación 11.3 sólo da la magnitud de este vector.

Ahora se dará una definición formal del producto vectorial. Dados dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, el **producto vectorial** $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ se define como un tercer vector $\vec{\mathbf{C}}$, que tiene una magnitud de AB sen θ, donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. Es decir, si $\vec{\mathbf{C}}$ se conoce por

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{11.2}$$

su magnitud es

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \tag{11.3}$$

La cantidad AB sen θ es igual al área del paralelogramo formado por $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, como se muestra en la figura 11.2. La *dirección* de $\vec{\mathbf{C}}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y la mejor forma de determinar esta dirección es usar la regla de la mano derecha, que se ilustra en la figura 11.2. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de $\vec{\mathbf{A}}$ y luego "se enrollan" hacia $\vec{\mathbf{B}}$ a través del ángulo θ. La dirección del pulgar recto hacia arriba es la dirección de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{C}}$. Debido a la notación, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ con frecuencia se lee "$\vec{\mathbf{A}}$ cruz $\vec{\mathbf{B}}$", por esto el término *producto cruz*.

Algunas propiedades del producto vectorial que se siguen de su definición son:

Propiedades del producto vectorial ▶

1. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial *no* es conmutativo. En vez de ello, el orden en que los dos vectores se multiplican en un producto cruz es importante:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} \tag{11.4}$$

   Por lo tanto, si cambia el orden de los vectores en un producto cruz, debe cambiar el signo. Esta correspondencia se verifica fácilmente con la regla de la mano derecha.
2. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 0$ o $180°$), en tal caso $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0$; en consecuencia, se sigue que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0$.
3. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, en tal caso $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB$.
4. El producto vectorial obedece la ley distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}} \tag{11.5}$$

5. La derivada del producto cruz respecto de alguna variable como t es

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt} \tag{11.6}$$

   donde es importante mantener el orden multiplicativo de los términos en el lado derecho a la vista de la ecuación 11.4.

Se deja como ejercicio (problema 10) demostrar a partir de las ecuaciones 11.3 y 11.4, y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ obedecen las siguientes reglas:

Productos cruz de vectores unitarios ▶

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{11.7a}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \tag{11.7b}$$

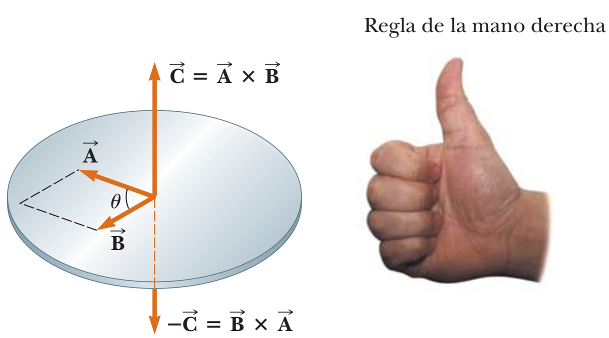


Figura 11.2 El producto vectorial $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es un tercer vector $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene una magnitud AB sen θ igual al área del paralelogramo que se muestra. La dirección de $\vec{\mathbf{C}}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \tag{11.7c}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \tag{11.7d}$$

Los signos son intercambiables en los productos cruz. Por ejemplo, $\vec{\mathbf{A}} \times (-\vec{\mathbf{B}}) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ o $\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{j}}) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$.

El producto cruz de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se expresa en la forma de determinantes siguiente:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Expandir estos determinantes da como resultado

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}} \tag{11.8}$$

Conocida la definición del producto cruz, ahora se puede asignar una dirección al vector momento de torsión. Si la fuerza se encuentra en el plano xy, como en la figura 11.1, el momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se representa mediante un vector paralelo al eje z. La fuerza en la figura 11.1 crea un momento de torsión que tiende a dar vuelta al objeto contra las manecillas del reloj en torno al eje z; la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es hacia z creciente, y por lo tanto $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ está en la dirección z positiva. Si en la figura 11.1 se invierte la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$, $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ estaría en la dirección z negativa.

Pregunta rápida 11.1 ¿Cuál de los siguientes enunciados acerca de la correspondencia entre la magnitud del producto cruz de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores es verdadero? a) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es mayor que AB. b) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es menor que AB. c) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores. d) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser igual a AB.

EJEMPLO 11.1 El producto vectorial

Dos vectores que se encuentran en el plano xy se conocen por las ecuaciones $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y verifique que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conocidas las notaciones en vectores unitarios de los vectores, piense en qué direcciones apuntan los vectores en el espacio. Imagine el paralelogramo que se muestra en la figura 11.2 para estos vectores.

Categorizar Ya que se usa la definición del producto cruz explicada en esta sección, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Escriba el producto cruz de los dos vectores:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

Realice la multiplicación:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Para verificar que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$, evalúe $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

Realice la multiplicación:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}}) \times 2\hat{\mathbf{i}} + (-\hat{\mathbf{i}}) \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 3\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0 - 3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} + 0 = \boxed{-7\hat{\mathbf{k}}}$$

Por lo tanto, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$. Como un método alternativo para encontrar $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, podría usar la ecuación 11.8. ¡Inténtelo!

EJEMPLO 11.2 **El vector momento de torsión**

Una fuerza de $\vec{\mathbf{F}} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ N se aplica a un objeto que es articulada en torno a un eje fijo alineado a lo largo del eje coordenado z. La fuerza se aplica a un punto ubicado en $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Encuentre el vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conocidas las notaciones en vectores unitarios, piense en las direcciones de los vectores fuerza y de posición. Si esta fuerza se aplicara en esta posición, ¿en qué dirección giraría un objeto con eje en el origen?

Categorizar Ya que se usa la definición del producto cruz explicado en esta sección, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Configure el vector momento de torsión con la ecuación 11.1:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})\text{ m}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})\text{ N}]$$

Realice la multiplicación:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}]\text{ N}\cdot\text{m}$$

Use las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [0 + 12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}} + 0]\text{ N}\cdot\text{m} = \boxed{2.0\hat{\mathbf{k}}\text{ N}\cdot\text{m}}$$

Note que tanto $\vec{\mathbf{r}}$ como $\vec{\mathbf{F}}$ están en el plano xy. Como se esperaba, el vector momento de torsión es perpendicular a este plano, y tiene sólo una componente z. Se siguieron las reglas para cifras significativas que se explicaron en la sección 1.6, lo que condujo a una respuesta con dos cifras significativas. Se perdió algo de precisión porque se terminó por restar dos números cercanos.

11.2 Cantidad de movimiento angular: el sistema no aislado

Imagine un poste recto, rígido y vertical a través del hielo en un lago helado (figura 11.3). Una patinadora se desliza rápidamente hacia el poste, sin chocar con él. Conforme se acerca al poste, estira su mano y lo sujeta, una acción que la hace moverse en una trayectoria circular alrededor del poste. Así como la idea de la cantidad de movimiento lineal ayuda a analizar el movimiento traslacional, un análogo rotacional, la *cantidad de movimiento angular*, ayuda a analizar el movimiento de esta patinadora y otros objetos que experimentan movimiento rotacional.

Figura 11.3 Mientras la patinadora pasa al lado del poste, se sujeta de él, lo que la hace girar rápidamente alrededor del poste en una trayectoria circular.

En el capítulo 9 se desarrolló la forma matemática de la cantidad de movimiento lineal y después se procedió a mostrar cómo esta nueva cantidad era valiosa en la resolución de problemas. Para la cantidad de movimiento angular se seguirá un procedimiento similar.

Considere una partícula de masa m ubicada en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ y móvil con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ como en la figura 11.4. Al describir el movimiento traslacional se encontró que la fuerza neta en la partícula es igual a la relación de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento lineal, $\sum \vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$ (véase la ecuación 9.3). Tome el producto cruz de cada lado de la ecuación 9.3 con $\vec{\mathbf{r}}$, lo que da el momento de torsión neto en la partícula en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Ahora agregue al lado derecho el término $(d\vec{\mathbf{r}}/dt \times \vec{\mathbf{p}})$, que es cero porque $d\vec{\mathbf{r}}/dt = \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ son paralelos. En consecuencia

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}$$

El lado derecho de esta ecuación se reconoce como la derivada de $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ (véase la ecuación 11.6). Por lo tanto,

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}})}{dt} \tag{11.9}$$

que es muy similar en forma a la ecuación 9.3, $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$. Este resultado sugiere que la combinación $\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ participa en la misma disertación, en el movimiento rotacional, así como $\vec{\mathbf{p}}$ en el movimiento traslacional. A esta combinación se le conoce como *cantidad de movimiento angular* de la partícula:

La cantidad de **movimiento angular** instantánea $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula en relación con un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula $\vec{\mathbf{r}}$ y su cantidad de movimiento lineal instantánea $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \tag{11.10}$$

◀ Cantidad de movimiento angular de una partícula

Ahora la ecuación 11.9 se puede escribir como

$$\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}} \tag{11.11}$$

que es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$. El momento de torsión hace que la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ cambie, tal como la fuerza hace que cambie la cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$. La ecuación 11.11 afirma que **el momento de torsión que actúa sobre una partícula es igual a la relación de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de la partícula.**

Note que la ecuación 11.11 sólo es válida si $\Sigma\,\vec{\boldsymbol{\tau}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se miden en torno al mismo eje. Además, **la expresión es válida para cualquier eje fijo en un marco inercial.**

La unidad del **SI** de la cantidad de movimiento angular es kg · m^2/s. Note también que tanto la magnitud como la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ dependen de la elección del eje. Al seguir la regla de la mano derecha, se ve que la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. En la figura 11.4, $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ están en el plano xy, así que $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z. Ya que $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ es

$$L = mvr \operatorname{sen} \phi \tag{11.12}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$. Se sigue que L es cero cuando $\vec{\mathbf{r}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{p}}$ ($\phi = 0$ o 180°). En otras palabras, cuando la velocidad traslacional de la partícula es a lo largo de una línea que pasa a través del eje, la partícula tiene cantidad de movimiento angular cero respecto al eje. Por otra parte, si $\vec{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{p}}$ ($\phi = 90°$), en tal caso $L = mvr$. En dicho instante, la partícula se mueve exactamente como si estuviera en el borde de una rueda giratoria en torno al eje en un plano definido por $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$.

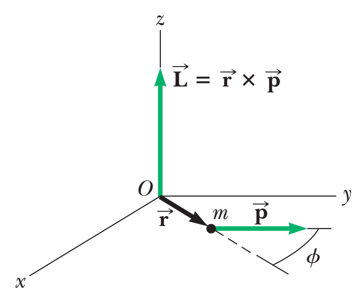


Figura 11.4 La cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ ubicada en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}$ es un vector conocido por $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$. El valor de $\vec{\mathbf{L}}$ depende del eje en torno al que se mida y es un vector perpendicular tanto a $\vec{\mathbf{r}}$ como a $\vec{\mathbf{p}}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 11.2

¿La rotación es necesaria para la cantidad de movimiento angular?

Se puede definir cantidad de movimiento angular incluso si la partícula no se mueve en una trayectoria circular. Aun cuando una partícula se mueva en una línea recta tiene cantidad de movimiento angular en torno a cualquier eje desplazado de la trayectoria de la partícula.

Pregunta rápida 11.2 Recuerde a la patinadora descrita al principio de esta sección. Considere que su masa es m. **i)** ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular en relación con el poste en el instante en que está a una distancia d del poste si ella patinara directamente hacia él con rapidez v? a) cero, b) mvd, c) imposible de determinar. **ii)** ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular en relación con el poste en el instante en que está a una distancia d del poste si patinara con rapidez v a lo largo de una trayectoria recta que está a una distancia perpendicular a desde el poste? a) cero, b) mvd, c) mva, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 11.3 Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular

Una partícula se mueve en el plano xy en una trayectoria circular de radio r, como se muestra en la figura 11.5. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular en relación con un eje a través de O cuando su velocidad es $\vec{\mathbf{v}}$.

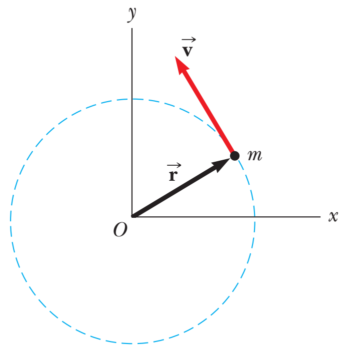


Figura 11.5 (Ejemplo 11.3) Una partícula móvil en un círculo de radio r tiene una cantidad de movimiento angular en torno a un eje a través de O que tiene magnitud mvr. El vector $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$ apunta hacia *afuera* de la página.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La cantidad de movimiento lineal de la partícula cambia en dirección (pero no en magnitud). Por lo tanto, debe estar tentado a concluir que la cantidad de movimiento angular de la partícula siempre cambia. Sin embargo, en esta situación, este no es el caso. Vea por qué.

Categorizar Use la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula explicada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 11.12 para evaluar la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$:

$$L = mvr \operatorname{sen} 90° = \boxed{mvr}$$

Este valor de L es constante porque los tres factores a la derecha son constantes. La dirección de $\vec{\mathbf{L}}$ también es constante, aun cuando la dirección de $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ siga cambiando. Para verificar esta afirmación, aplique la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}}$ en la figura 11.5. Su pulgar apunta hacia arriba y se aleja de la página, así que esta es la dirección de $\vec{\mathbf{L}}$. En consecuencia, se puede escribir la expresión vectorial $\vec{\mathbf{L}} = (mvr)\hat{\mathbf{k}}$. Si la partícula se moviera en sentido de las manecillas del reloj, $\vec{\mathbf{L}}$ apuntaría hacia abajo y adentro de la página y $\vec{\mathbf{L}} = -(mvr)\hat{\mathbf{k}}$. **Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante en torno a un eje a través del centro de su trayectoria.**

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas

En la sección 9.6 se mostró que la segunda ley de Newton para una partícula se podía extender a un sistema de partículas, lo que resulta en

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}}{dt}$$

Dicha ecuación establece que la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal total del sistema. Vea si es posible hacer un enunciado similar para movimiento rotacional. La cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas en torno a algún eje se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento angulares de las partículas individuales:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

donde la suma vectorial es sobre las n partículas del sistema.

La derivación de esta ecuación respecto al tiempo produce

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$$

donde se usó la ecuación 11.11 para sustituir la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de cada partícula con el momento de torsión neto en la partícula.

Los momentos de torsión que actúan sobre las partículas del sistema son aquellos asociados con fuerzas internas entre las partículas y aquellos asociados con fuerzas externas. Sin embargo, el momento de torsión neto asociado con todas las fuerzas internas es cero. Recuerde que la tercera ley de Newton dice que las fuerzas internas entre las partículas del sistema son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si supone que estas fuerzas se encuentran a lo largo de la línea de separación de cada par de partículas, el momento de torsión total alrededor de algún eje que pasa a través de un origen O debido a cada par de fuerza acción–reacción es cero (es decir: el brazo de momento d, desde O hasta la línea de acción de las fuerzas, es igual para ambas partículas y las fuerzas están en direcciones opuestas). Por lo tanto, en la suma el momento de torsión interno neto es cero. Se concluye que la cantidad de movimiento angular total de un sistema varía con el tiempo sólo si un momento de torsión externo neto actúa sobre el sistema:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \qquad \textbf{(11.13)}$$

◄ El momento de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema

De hecho esta ecuación es el análogo rotacional de $\Sigma\,\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = d\vec{\mathbf{p}}_{tot}/\,dt$ para un sistema de partículas. La ecuación 11.13 es la representación matemática de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema no aislado. Si un sistema no es aislado en el sentido que existe un momento de torsión neto sobre él, el momento de torsión es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular.**

Aunque no se comprueba en este caso, este enunciado es verdadero sin importar el movimiento del centro de masa. Incluso se aplica si el centro de masa acelera, siempre que el momento de torsión y la cantidad de movimiento angular se evalúen en relación con un eje a través del centro de masa.

EJEMPLO 11.4 Un sistema de objetos

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 11.6. El radio de la polea es R, y la masa del borde delgado es M. Los rayos de la polea tienen masa despreciable. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los dos objetos, con los conceptos de cantidad de movimiento angular y momento de torsión.

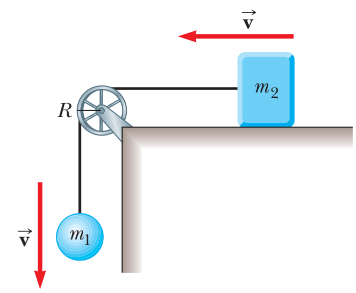


Figura 11.6 (Ejemplo 11.4) Cuando el sistema se libera, la esfera se mueve hacia abajo y el bloque se mueve hacia la izquierda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando el sistema se libera, el bloque se desliza hacia la izquierda, la esfera cae hacia abajo y la polea de vueltas contra las manecillas del reloj. Esta situación es similar a problemas que se han resuelto con anterioridad, excepto que ahora se quiere usar un planteamiento de cantidad de movimiento angular.

Categorizar El bloque, la polea y la esfera se identifican como un sistema no aislado, sujeto al momento de torsión externo debido a la fuerza gravitacional en la esfera. Calcule la cantidad de movimiento angular en torno a un eje que coincida con el eje de la polea. La cantidad de movimiento angular del sistema incluye la de dos objetos (la esfera y el bloque) con movimiento traslacional y un objeto (la polea) que se somete a rotación pura.

Analizar En cualquier instante de tiempo, la esfera y el bloque tienen una rapidez común v, así que la cantidad de movimiento angular de la esfera es m_1vR y la del bloque es m_2vR. Al mismo instante, todos los puntos sobre el borde de la polea también se mueven con rapidez v, de modo que la cantidad de movimiento angular de la polea es MvR.

Ahora aborde el momento de torsión externo total que actúa sobre el sistema en torno al eje de la polea. Ya que tiene un brazo de momento cero, la fuerza que ejerce el eje sobre la polea no contribuye al momento de torsión. Además, la fuerza normal que actúa sobre el bloque se equilibra mediante la fuerza gravitacional $m_2\vec{\mathbf{g}}$, así que dichas fuerzas no contribuyen al momento de torsión. La fuerza gravitacional $m_1\vec{\mathbf{g}}$ que actúa sobre la esfera produce un momento de torsión en torno al eje, igual en magnitud a m_1gR, donde R es el brazo de momento de la fuerza en torno al eje. Este resultado es el momento de torsión externo total en torno al eje de la polea; esto es, $\Sigma\tau_{\text{ext}} = m_1gR$.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento angular total del sistema:

$$1)\quad L = m_1vR + m_2vR + MvR = (m_1 + m_2 + M)vR$$

Sustituya esta expresión y el momento de torsión externo total en la ecuación 11.13:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1gR = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2 + M)vR]$$

$$2)\quad m_1gR = (m_1 + m_2 + M)R\frac{dv}{dt}$$

Al reconocer que $dv/dt = a$, resuelva la ecuación 2) para a:

$$a = \boxed{\frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}}$$

Finalizar Al evaluar el momento de torsión neto en torno al eje, no se incluyeron las fuerzas que la cuerda ejerce en los objetos porque dichas fuerzas son internas al sistema en consideración. En vez de ello, el sistema se analizó como un todo. Sólo los momentos de torsión *externos* contribuyen al cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema.

11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio

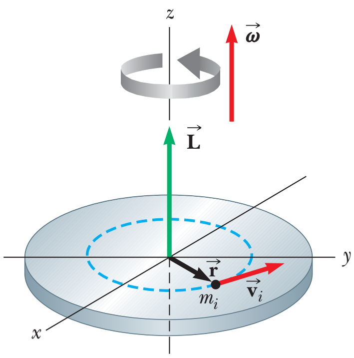


Figura 11.7 Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje, la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ está en la misma dirección que la velocidad angular $\vec{\omega}$, de acuerdo con la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

En el ejemplo 11.4 se consideró la cantidad de movimiento angular de un sistema deformable. Ahora la atención se restringe a un sistema no deformable, un objeto rígido. Considere un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo que coincide con el eje z de un sistema coordenado, como se muestra en la figura 11.7. Determine la cantidad de movimiento angular de este objeto. Cada *partícula* del objeto da vueltas en el plano xy en torno al eje z con una rapidez angular ω. La magnitud de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i en torno al eje z es $m_i v_i r_i$. Ya que $v_i = r_i\omega$ (ecuación 10.10), la magnitud de la cantidad de movimiento angular de esta partícula se expresa como

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

El vector $\vec{L}_i$ se dirige a lo largo del eje z, como el vector $\vec{\omega}$.

Ahora se puede encontrar la cantidad de movimiento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto al tomar la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

$$\boxed{L_z = I\omega} \quad \textbf{(11.14)}$$

donde $\sum_i m_i r_i^2$ es el momento de inercia I del objeto en torno al eje z (ecuación 10.15).

Ahora derive la ecuación 11.14 respecto al tiempo, y note que I es constante para un objeto rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad \textbf{(11.15)}$$

donde α es la aceleración angular relativa al eje de rotación. Ya que dL_z/dt es igual al momento de torsión externo neto (véase la ecuación 11.13), la ecuación 11.15 se expresa como

Forma rotacional de la segunda ley de Newton ▶

$$\boxed{\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha} \quad \textbf{(11.16)}$$

Esto es, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia en torno al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto en relación con dicho eje. Este resultado es el mismo que en la ecuación 10.21, que fue deducido con el uso de un planteamiento de fuerza, pero la ecuación 11.16 se dedujo mediante el concepto de cantidad de movimiento angular. Esta ecuación también es válida para un objeto rígido giratorio en torno a un eje móvil siempre que el eje en movimiento 1) pase a través del centro de masa y 2) sea un eje de simetría.

Si un objeto simétrico da vueltas en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa, puede escribir la ecuación 11.14 en forma vectorial como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, donde $\vec{L}$ es la cantidad de movimiento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación. Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si $\vec{L}$ representa la componente de cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.[1]

[1] En general, la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$ no siempre es válida. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje *arbitrario*, por lo tanto $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ puede apuntar en diferentes direcciones. En este caso, el momento de inercia no se trata como un escalar. En un sentido estricto, $\vec{L} = I\vec{\omega}$ sólo se aplica a objetos rígidos de cualquier forma que dan vueltas en torno a uno de tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales*) a través del centro de masa. Este concepto se explica en textos de mecánica más avanzados.

Pregunta rápida 11.3 Una esfera sólida y una esfera hueca tienen la misma masa y radio. Ambas giran con la misma rapidez angular. ¿Cuál tiene la mayor cantidad de movimiento angular? a) la esfera sólida, b) la esfera hueca, c) ambas tienen la misma cantidad de movimiento angular, d) imposible de determinar.

EJEMPLO 11.5 Bola de boliche

Estime la magnitud de la cantidad de movimiento angular de una bola de boliche que gira a 10 rev/s, como se muestra en la figura 11.8.

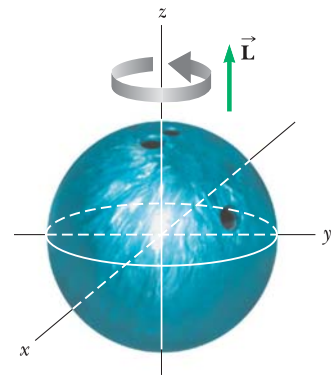


Figura 11.8 (Ejemplo 11.5) Una bola de boliche que da vueltas en torno al eje z en la dirección que se muestra tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ en la dirección z positiva. Si la dirección de rotación se invierte, $\vec{\mathbf{L}}$ apunta en la dirección z negativa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine girar una bola de boliche sobre el suelo uniforme de un boliche. Ya que una bola de boliche es relativamente pesada, la cantidad de movimiento angular debe ser relativamente grande.

Categorizar La cantidad de movimiento angular se evalúa con la ecuación 11.14, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Comience por hacer algunas estimaciones de los parámetros físicos relevantes y modele la bola como una esfera sólida uniforme. Una bola de boliche representativa puede tener una masa de 7.0 kg y un radio de 12 cm.

Evalúe el momento de inercia de la bola en torno a un eje a través de su centro, a partir de la tabla 10.2:

$$I = \tfrac{2}{5}MR^2 = \tfrac{2}{5}(7.0\text{ kg})(0.12\text{ m})^2 = 0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Evalúe la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la ecuación 11.14:

$$L_z = I\omega = (0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(10\text{ rev/s})(2\pi\text{ rad/rev}) = 2.53\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}$$

Debido a lo burdo de las estimaciones, sólo se debe conservar una cifra significativa, así que $L_z = \boxed{3\text{ kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}}$

EJEMPLO 11.6 El sube y baja

Un padre de masa m_f y su hija de masa m_d se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancias desde el eje en el centro (figura 11.9). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa M y longitud ℓ y se articula sin fricción. En cierto momento, la combinación da vueltas en un plano vertical con una rapidez angular ω.

A) Encuentre una expresión para la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

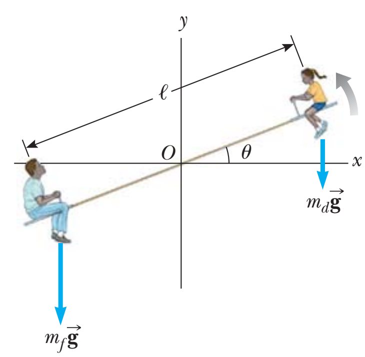


Figura 11.9 (Ejemplo 11.6) Un padre y su hija demuestran la cantidad de movimiento angular sobre un sube y baja.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un eje de rotación que pasa a través del eje en O en la figura 11.9. El sistema giratorio tiene cantidad de movimiento angular en torno a dicho eje.

Categorizar Ignore cualquier movimiento de los brazos o piernas del padre y la hija y represéntelos como partículas. Por lo tanto, el sistema se modela como un objeto rígido. Esta primera parte del ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El momento de inercia del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de las tres componentes: el sube y baja y los dos individuos. Se puede remitir a la tabla 10.2 para obtener la expresión para el momento de inercia de la barra y usar la expresión de partícula $I = mr^2$ para cada persona.

Encuentre el momento de inercia total del sistema en torno al eje z a través de O:

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

Encuentre la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L = I\omega = \boxed{\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega}$$

B) Encuentre una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando el sube y baja forma un ángulo θ con la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por lo general, los padres son más pesados que las hijas, así que el sistema no está en equilibrio y tiene una aceleración angular. Se espera que la aceleración angular sea positiva en la figura 11.9.

Categorizar El sistema se identifica como no aislado debido al momento de torsión externo asociado con la fuerza gravitacional. De nuevo se identifica un eje de rotación que pasa a través del pivote en O en la figura 11.9.

Analizar Para encontrar la aceleración angular del sistema en cualquier ángulo θ, primero calcule el momento de torsión neto sobre el sistema y luego use $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ para obtener una expresión para α.

Evalúe el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre el padre:

$$\tau_f = m_f g \frac{\ell}{2} \cos\theta \quad (\vec{\boldsymbol{\tau}}_f \text{ afuera de la página})$$

Evalúe el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre la hija:

$$\tau_d = -m_d g \frac{\ell}{2} \cos\theta \quad (\vec{\boldsymbol{\tau}}_d \text{ hacia la página})$$

Evalúe el momento de torsión neto ejercido sobre el sistema:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = \tfrac{1}{2}(m_f - m_d)g\ell\cos\theta$$

Use la ecuación 11.16 e I del inciso A) para encontrar α:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \boxed{\frac{2(m_f - m_d)g\cos\theta}{\ell\left[(M/3) + m_f + m_d\right]}}$$

Finalizar Para un padre más pesado que su hija, la aceleración angular es positiva, como se esperaba. Si el sube y baja comienza con una orientación horizontal ($\theta = 0$) y se libera, la rotación es contra las manecillas del reloj en la figura 11.9 y el extremo del padre del sube y baja cae, lo que es consistente con la experiencia cotidiana.

¿Qué pasaría si? Imagine que el padre se mueve hacia adentro del sube y baja a una distancia d desde el eje para intentar equilibrar los dos lados. ¿Cuál es la aceleración angular del sistema en este caso, cuando se libera desde un ángulo arbitrario θ?

Respuesta La aceleración angular del sistema debe disminuir si el sistema está más equilibrado.

Encuentre el momento de inercia total en torno al eje z a través de O para el sistema modificado:

$$I = \tfrac{1}{12}M\ell^2 + m_f d^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_d\right) + m_f d^2$$

Encuentre el momento de torsión neto ejercido sobre el sistema en torno a un eje a través de O:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = m_f g d\cos\theta - \tfrac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta$$

Encuentre la nueva aceleración angular del sistema:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{m_f g d\cos\theta - \tfrac{1}{2}m_d g\ell\cos\theta}{(\ell^2/4)\left[(M/3) + m_d\right] + m_f d^2}$$

El sube y baja se equilibra cuando la aceleración angular es cero. En esta situación, tanto padre como hija pueden empujar desde el suelo y elevarse al punto más alto posible.

Encuentre la posición requerida del padre al hacer $\alpha = 0$:

$$\alpha = \frac{m_f g d \cos\theta - \frac{1}{2} m_d g \ell \cos\theta}{(\ell^2/4)[(M/3) + m_d] + m_f d^2} = 0$$

$$m_f g d \cos\theta - \tfrac{1}{2} m_d g \ell \cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\tfrac{1}{2}\ell$$

En el raro caso en que el padre y la hija tengan la misma masa, el padre se ubica el final del sube y baja, $d = \ell/2$.

11.4 El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

En el capítulo 9 se encontró que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado; es decir, si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero. Se tiene una ley de conservación análoga en el movimiento rotacional:

La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

◄ Conservación de cantidad de movimiento angular

Este enunciado es el principio de **conservación de cantidad de movimiento angular** y es la base de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema aislado**. Este principio se sigue directamente de la ecuación 11.13, que indica que si

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \qquad \textbf{(11.17)}$$

por lo tanto

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f \qquad \textbf{(11.18)}$$

Para un sistema aislado que consiste en algunas partículas, esta ley de conservación se escribe como $\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \Sigma \vec{\mathbf{L}}_n$ = constante, donde el índice n denota la n–ésima partícula en el sistema.

Si un sistema giratorio aislado es deformable, de modo que su masa se somete a redistribución en alguna forma, el momento de inercia del sistema cambia. Ya que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema es $L = I\omega$ (ecuación 11.14), la conservación de la cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I y ω permanezca constante. Por lo tanto, un cambio en I para un sistema aislado requiere un cambio en ω. En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante} \qquad \textbf{(11.19)}$$

Esta expresión es válida tanto para rotación en torno a un eje fijo, como para rotación en torno a un eje a través del centro de masa de un sistema móvil en tanto dicho eje permanezca fijo en la dirección. Sólo se requiere que el momento de torsión externo neto sea cero.

Muchos ejemplos demuestran conservación de cantidad de movimiento angular para un sistema deformable. Usted ha observado a un patinador artístico girar al final de un programa (figura 11.10). La rapidez angular del patinador es grande cuando sus manos y pies están cerca del tronco de su cuerpo. Si se ignora la fricción entre el patinador y el hielo, no existen momentos de torsión externos sobre el patinador. El momento de inercia de su cuerpo aumenta mientras sus manos y pies se mueven alejándose de su cuerpo al final del giro. De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, su rapidez angular debe disminuir. En forma similar, cuando los clavadistas o acróbatas quieren hacer piruetas, jalan manos y pies cerca de su cuerpo para que dé vuelta

©Stuart Franklin/Getty Images

©Stuart Franklin/Getty Images

Figura 11.10 La cantidad de movimiento angular se conserva mientras el patinador artístico ruso, Evgeni Plushenko, participa durante los Campeonatos Mundiales de Patinaje Artístico 2004. Cuando sus brazos y piernas están cerca de su cuerpo, su momento de inercia es pequeño y su rapidez angular es grande. Para frenar al final de su giro, mueve brazos y piernas hacia afuera, lo que aumenta su momento de inercia.

a una rapidez mayor, como en la fotografía de apertura de este capítulo. En estos casos, la fuerza externa debida a la gravedad actúa a través del centro de masa y, por tanto, no ejerce momento de torsión en torno a un eje a través de este punto. En consecuencia, las cantidades de momento angular en torno al centro de masa debe conservarse; es decir, $I_i\omega_i = I_f\omega_f$. Por ejemplo, cuando los clavadistas quieren duplicar su rapidez angular, deben reducir su momento de inercia a la mitad de su valor inicial.

En la ecuación 11.18 se tiene una tercera versión del modelo de sistema aislado. Ahora se puede afirmar que la energía, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema aislado se conservan.

$$\text{Para un sistema aislado} \begin{cases} E_i = E_f & \text{(si no hay transferencia de energía)} \\ \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_f & \text{(si la fuerza externa neta es cero)} \\ \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f & \text{(si el momento de torsión externo neto es cero)} \end{cases}$$

Pregunta rápida 11.4 Una clavadista salta del trampolín y cae hacia el agua con el cuerpo recto y en rotación lenta. Jala sus brazos y piernas hacia una apretada posición plegada. **i)** ¿Qué le ocurre a su rapidez angular? a) Aumenta. b) Disminuye. c) Permanece igual. d) Es imposible determinar. **ii)** De la misma lista de opciones, ¿qué le sucede a la energía cinética rotacional de su cuerpo?

EJEMPLO 11.7 Formación de una estrella de neutrones

Una estrella da vueltas con un periodo de 30 días en torno a un eje a través de su centro. Después de que la estrella experimenta una explosión supernova, el núcleo estelar, que tiene un radio de 1.0×10^4 km, colapsa en una estrella de neutrones de 3.0 km de radio. Determine el periodo de rotación de la estrella de neutrones.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio en el movimiento de la estrella de neutrones es similar al del patinador descrito anteriormente, pero en dirección inversa. Conforme la masa de la estrella se acerca al eje de rotación, se espera que la estrella gire más rápido.

Categorizar Suponga que durante el colapso del núcleo estelar, 1) no actúa momento de torsión externo sobre él, 2) permanece esférico con la misma distribución de masa relativa y 3) su masa permanece constante. La estrella se clasifica como un sistema aislado. No se conoce la distribución de masa de la estrella, pero se supuso que la distribución es simétrica, así que el momento de inercia se expresa como kMR^2, donde k es alguna constante numérica. (De la tabla 10.2, por ejemplo, se ve que $k = \frac{2}{5}$ para una esfera sólida y $k = \frac{2}{3}$ para un cascarón esférico.)

Analizar Use el símbolo T para el periodo, con T_i como el periodo inicial de la estrella y T_f como el periodo de la estrella de neutrones. El periodo es el intervalo de tiempo que se requiere para que un punto sobre el ecuador de la estrella dé una revolución completa alrededor del eje de rotación. La rapidez angular de la estrella se conoce por $\omega = 2\pi/T$.

Escriba la ecuación 11.19 para la estrella:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Use $\omega = 2\pi/T$ para reescribir esta ecuación en términos de los periodos inicial y final:

$$I_i\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = I_f\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

Sustituya los momentos de inercia en la ecuación precedente:

$$kMR_i^2\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = kMR_f^2\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

Resuelva para el periodo final de la estrella:

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 T_i$$

Sustituya valores numéricos:
$$T_f = \left(\frac{3.0 \text{ km}}{1.0 \times 10^4 \text{ km}}\right)^2 (30 \text{ días}) = 2.7 \times 10^{-6} \text{ días} = \boxed{0.23 \text{ s}}$$

Finalizar De hecho la estrella de neutrones da vuelta más rápido después de que colapsa, como se predijo. Se mueve muy rápido; de hecho, gira aproximadamente cuatro veces cada segundo.

EJEMPLO 11.8 El carrusel

Una plataforma horizontal con la forma de un disco da vueltas libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción (figura 11.11). La plataforma tiene una masa $M = 100$ kg y un radio $R = 2.0$ m. Una estudiante, cuya masa es $m = 60$ kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2.0 rad/s cuando el estudiante está en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto $r = 0.50$ m desde el centro?

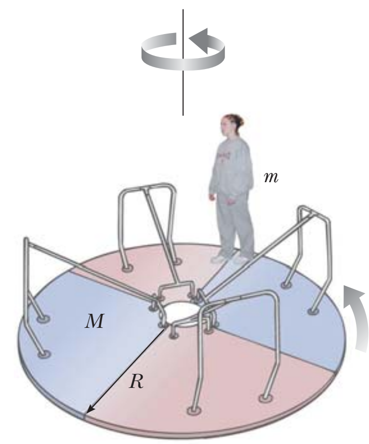


Figura 11.11 (Ejemplo 11.8) Conforme la estudiante camina hacia el centro de la plataforma giratoria, la rapidez angular del sistema aumenta porque la cantidad de movimiento angular del sistema permanece constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio de rapidez en este caso es similar al del patinador que gira y a la estrella de neutrones en los ejemplos precedentes. Este problema es diferente porque parte del momento de inercia del sistema cambia (el de la estudiante) mientras la otra parte permanece fijo (el de la plataforma).

Categorizar Ya que la plataforma da vueltas sobre un eje sin fricción, el sistema de la estudiante y la plataforma se identifica como un sistema aislado.

Analizar Denote el momento de inercia de la plataforma como I_p y el de la estudiante como I_s. La estudiante se modela como partícula.

Encuentre el momento de inercia inicial I_i del sistema (estudiante más plataforma) en torno al eje de rotación:
$$I_i = I_{pi} + I_{si} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

Encuentre el momento de inercia del sistema cuando la estudiante camina a la posición $r < R$:
$$I_f = I_{pf} + I_{sf} = \tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Aplique la ley de conservación de cantidad de movimiento angular al sistema:
$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

Sustituya los momentos de inercia:
$$(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2)\omega_i = (\tfrac{1}{2}MR^2 + mr^2)\omega_f$$

Resuelva para la rapidez angular final:
$$\omega_f = \left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\right)\omega_i$$

Sustituya valores numéricos:
$$\omega_f = \left[\frac{\frac{1}{2}(100 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 + (60 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2}{\frac{1}{2}(100 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 + (60 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2}\right](2.0 \text{ rad/s})$$

$$\omega_f = \left(\frac{440 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{215 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}\right)(2.0 \text{ rad/s}) = \boxed{4.1 \text{ rad/s}}$$

Finalizar Como se esperaba, la rapidez angular aumenta. Lo más rápido que este sistema podría girar sería cuando la estudiante se mueve al centro de la plataforma. Haga este cálculo para demostrar que esta rapidez angular máxima es 4.4 rad/s. Note que la actividad descrita en este problema es de cuidado, como se explicó en relación con la fuerza de Coriolis en la sección 6.3.

¿Qué pasaría si? ¿Y si usted mide la energía cinética del sistema antes y después de que la estudiante camine hacia adentro? ¿La energía cinética inicial y la energía cinética final son iguales?

Respuesta Es posible que esté tentado a decir que sí, porque el sistema está aislado. Sin embargo, recuerde que la energía se puede transformar de varias maneras, así que debe tener cuidado ante una pregunta de energía.

Encuentre la energía cinética inicial: $K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{1}{2}(440\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(2.0\ \text{rad/s})^2 = 880\ \text{J}$

Encuentre la energía cinética final: $K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}(215\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(4.1\ \text{rad/s})^2 = 1.81 \times 10^3\ \text{J}$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema *aumenta*. La estudiante debe realizar trabajo para moverse ella misma más hacia al centro de rotación, así que esta energía cinética adicional viene de la energía potencial química en el cuerpo de la estudiante.

EJEMPLO 11.9 Colisión de disco y bastón

Un disco de 2.0 kg, que viaja a 3.0 m/s, golpea un bastón de 1.0 kg y 4.0 m de longitud que se encuentra plano sobre hielo casi sin fricción, como se muestra en la vista superior de la figura 11.12a. Suponga que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su línea de movimiento original. Encuentre la rapidez traslacional del disco, la rapidez traslacional del bastón y la rapidez angular del bastón después de la colisión. El momento de inercia del bastón en torno a su centro de masa es $1.33\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

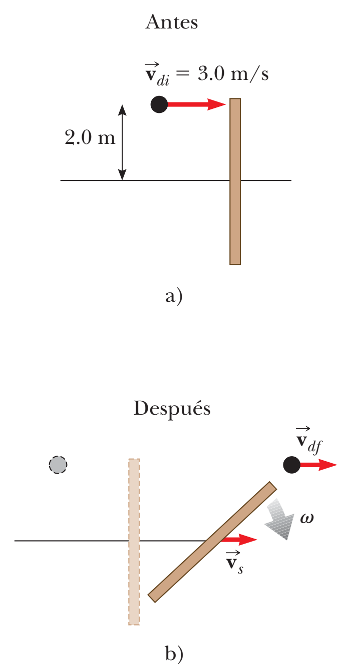


Figura 11.12 (Ejemplo 11.9) Vista superior de un disco que golpea un bastón en una colisión elástica. a) Antes de la colisión, el disco se mueve hacia el bastón. b) La colisión hace que el bastón dé vuelta y se mueva a la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine la figura 11.12a e imagine lo que sucede después de que el disco golpea el bastón. La figura 11.12b muestra lo que puede esperar: el disco continúa moviéndose con una rapidez más lenta y el bastón está tanto en movimiento traslacional como rotacional. Suponga que el disco no se desvía de su línea de movimiento original porque la fuerza que ejerce el bastón sobre el disco es paralela a la trayectoria original del disco.

Categorizar Ya que el hielo no tiene fricción, el disco y el bastón forman un sistema aislado. Además, ya que la colisión se supuso elástica, la energía, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular del sistema se conservan.

Analizar Note primero que se tienen tres incógnitas, así que se requieren tres ecuaciones para resolver simultáneamente.

Aplique al sistema la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal: $m_d v_{di} = m_d v_{df} + m_s v_s$

Sustituya los valores conocidos: $(2.0\ \text{kg})(3.0\ \text{m/s}) = (2.0\ \text{kg})v_{df} + (1.0\ \text{kg})v_s$

Reordene la ecuación: $$(1)\quad 6.0\ \text{kg}\cdot\text{m/s} - (2.0\ \text{kg})v_{df} = (1.0\ \text{kg})v_s$$

Ahora aplique la ley de conservación de cantidad de movimiento angular para el sistema y use un eje que pase a través del centro del bastón como eje de rotación. La componente de cantidad de movimiento angular del disco a lo largo del eje perpendicular al plano del hielo es negativa. (La regla de la mano derecha muestra que $\vec{\mathbf{L}}_d$ apunta hacia dentro del hielo.)

Aplique conservación de cantidad de movimiento angular al sistema: $-rm_d v_{di} = -rm_d v_{df} + I\omega$

Sustituya los valores conocidos:

$$-(2.0 \text{ m})(2.0 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s}) = -(2.0 \text{ m})(2.0 \text{ kg})v_{df} + (1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\omega$$

$$-12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} = -(4.0 \text{ kg} \cdot \text{m})v_{df} + (1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\omega$$

Divida la ecuación entre $1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y reordene:

$$2) \quad -9.0 \text{ rad/s} + (3.0 \text{ rad/m})v_{df} = \omega$$

Por último, la naturaleza elástica de la colisión dice que la energía cinética del sistema se conserva; en este caso, la energía cinética consiste en formas traslacional y rotacional.

Aplique conservación de energía cinética al sistema:

$$\tfrac{1}{2}m_d v_{di}^2 = \tfrac{1}{2}m_d v_{df}^2 + \tfrac{1}{2}m_s v_s^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Sustituya los valores conocidos:

$$\tfrac{1}{2}(2.0 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s})^2 = \tfrac{1}{2}(2.0 \text{ kg})v_{df}^2 + \tfrac{1}{2}(1.0 \text{ kg})v_s^2 + \tfrac{1}{2}(1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\omega^2$$

$$3) \quad 18 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 2.0v_{df}^2 + v_s^2 + (1.33 \text{ m}^2)\omega^2$$

Resuelva las ecuaciones 1), 2) y 3) simultáneamente, se encuentra que $v_d = \boxed{2.3 \text{ m/s,}}$ $v_s = \boxed{1.3 \text{ m/s,}}$ y $\omega = \boxed{-2.0 \text{ rad/s.}}$

Finalizar Estos valores parecen razonables. El disco se mueve con más lentitud, después de la colisión, de lo que se movía antes de la colisión, y el bastón tiene una pequeña rapidez traslacional. La tabla 11.1 resume los valores inicial y final de las variables para el disco y el bastón, y verifica la conservación de cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular y energía cinética del sistema.

TABLA 11.1

Comparación de valores en el ejemplo 11.9 antes y después de la colisión

	v(m/s)	ω(rad/s)	p(kg · m/s)	L(kg · m^2/s)	K_{trans}(J)	K_{rot}(J)
Antes						
Disco	3.0	—	6.0	−12	9.0	—
Bastón	0	0	0	0	0	0
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	9.0	0
Después						
Disco	2.3	—	4.7	−9.3	5.4	—
Bastón	1.3	−2.0	1.3	−2.7	0.9	2.7
Total para el sistema	—	—	6.0	−12	6.3	2.7

Nota: La cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética total del sistema se conservan.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la colisión entre el disco y el bastón es perfectamente inelástica? ¿Cómo cambia eso al análisis?

Respuesta En este caso, el disco se adhiere al final del bastón durante la colisión.

Altere el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal que conduce a la ecuación 1):

$$m_d v_{di} = (m_d + m_s)v_{CM}$$

$$(2.0 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s}) = (2.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg})v_{CM}$$

$$v_{CM} = 2.0 \text{ m/s}$$

Elija el centro del bastón como el origen y encuentre la posición y del centro de masa a lo largo del bastón vertical:

$$y_{CM} = \frac{(2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(0)}{(2.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg})} = 1.33 \text{ m}$$

Por lo tanto, el centro de masa del sistema es 2.0 m − 1.33 m = 0.67 m desde el extremo superior del bastón.

Altere el principio de conservación de cantidad de movimiento angular que conduce a la ecuación 2) y evalúe las cantidades de movimiento angular en torno a un eje que pase a través del centro de masa del sistema:

$$-rm_d v_{di} = I_d\,\omega + I_s\omega$$

$$4)\quad -(0.67\text{ m})m_d v_{di} = [m_d(0.67\text{ m})^2]\omega + I_s\omega$$

Encuentre el momento de inercia del bastón en torno al centro de masa *del sistema*, a partir del teorema de ejes paralelos:

$$I_s = I_{\text{CM}} + MD^2$$
$$= 1.33\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + (1.0\text{ kg})(1.33\text{ m})^2 = 3.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Use estos resultados en la ecuación 4):

$$-(0.67\text{ m})(2.0\text{ kg})(3.0\text{ m/s}) = [(2.0\text{ kg})(0.67\text{ m})^2]\omega + (3.1\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$-4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = (4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega$$

$$\omega = \frac{-4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{4.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = -1.0\text{ rad/s}$$

Evaluar la energía cinética total del sistema después de la colisión muestra que ésta es menor de lo que era antes de la colisión, porque en una colisión inelástica no se conserva la energía cinética.

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

Movimiento de precesión ▶

Una clase de movimiento insólito y fascinante que probablemente ha observado es el de un trompo que gira en torno a su eje de simetría, como se muestra en la figura 11.13a. Si el trompo gira rápidamente, el eje de simetría da vueltas en torno al eje *z*, barriendo un cono (véase la figura 11.13b). El movimiento del eje de simetría en torno a la vertical, conocido como **movimiento de precesión**, por lo general es lento en relación con el movimiento de giro del trompo.

Es muy natural preguntar por qué el trompo no cae. Ya que el centro de masa no está directamente arriba del centro de giro punto *O*, en el trompo actúa un momento de torsión neto en torno a un eje que pasa a través de *O*, un momento de torsión que resulta de la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$. El trompo ciertamente caerá si no está girando. Sin embargo, como gira, tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ que se dirige a lo largo de su eje de simetría. Se demostrará que este eje de simetría se mueve en torno al eje *z* (se presenta movimiento de precesión) porque el momento de torsión produce un cambio en la *dirección* del eje de simetría. Esta ilustración es un excelente ejemplo de la importancia de la naturaleza direccional de la cantidad de movimiento angular.

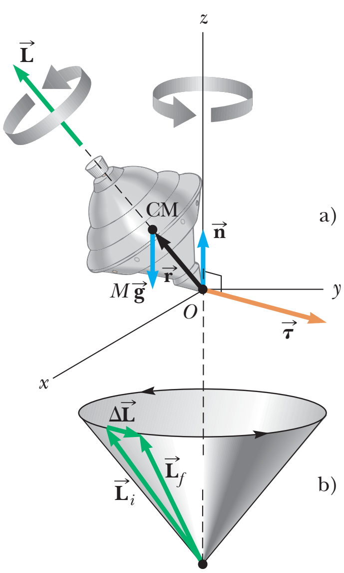
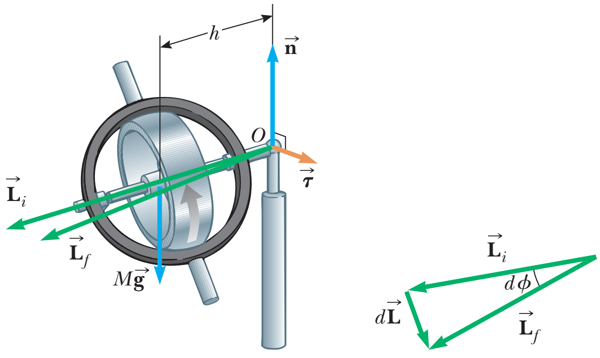


Figura 11.13 Movimiento de precesión de un trompo que gira en torno a su eje de simetría. a) Las únicas fuerzas externas que actúan en el trompo son la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$. La dirección de la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ es a lo largo del eje de simetría. La regla de la mano derecha indica que $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$ está en el plano *xy*. b) La dirección de $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ es paralela a la de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ en a). Ya que $\vec{\mathbf{L}}_f = \Delta\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{L}}_i$, el trompo precede en torno al eje *z*.

Las características esenciales del movimiento de precesión se ilustran al considerar el giroscopio simple que se muestra en la figura 11.14a. Las dos fuerzas que actúan en el giroscopio son la fuerza gravitacional hacia abajo $M\vec{\mathbf{g}}$ y la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ que actúa hacia arriba en el centro de giro punto *O*. La fuerza normal no produce momento de torsión en torno a un eje que pasa a través del eje, porque su brazo de momento a través de dicho punto es cero. No obstante, la fuerza gravitacional no produce un momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$ en torno a un eje que pasa a través de *O*, donde la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{r}}$ y $M\vec{\mathbf{g}}$. Por necesidad, el vector $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se encuentra en un plano horizontal *xy* perpendicular al vector cantidad de movimiento angular. El momento de torsión neto y la cantidad de movimiento angular del giroscopio se relacionan mediante la ecuación 11.13:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

Esta expresión muestra que, en el intervalo de tiempo infinitesimal *dt*, el momento de torsión distinto de cero produce un cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{\mathbf{L}}$, un cambio que está en la misma dirección que $\vec{\boldsymbol{\tau}}$. Por lo tanto, como el vector momento de torsión, $d\vec{\mathbf{L}}$ también debe ser perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. La figura 11.14b ilustra el movimiento de precesión resultante del eje de simetría del giroscopio. En un intervalo de tiempo *dt*, el cambio en cantidad de movimiento angular es $d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_f - \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\boldsymbol{\tau}}\,dt$. Ya que $d\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ no cambia ($|\vec{\mathbf{L}}_i| = |\vec{\mathbf{L}}_f|$). En vez de ello, lo que cambia



a) b)

Figura 11.14 a) El movimiento de un giroscopio simple articulado a una distancia h de su centro de masa. La fuerza gravitacional $M\vec{\mathbf{g}}$ produce un momento de torsión en torno al eje y este momento de torsión es perpendicular al eje. b) Vista superior de los vectores cantidad de movimiento angular inicial y final. El momento de torsión resulta en un cambio en cantidad de movimiento angular $d\vec{\mathbf{L}}$ en una dirección perpendicular al eje. El eje barre un ángulo $d\phi$ en un intervalo de tiempo dt.

es la *dirección* de $\vec{\mathbf{L}}$. Ya que el cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{\mathbf{L}}$ es en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, que se encuentra en el plano xy, el giroscopio se somete a movimiento de precesión.

Para simplificar la descripción del sistema, se supone que la cantidad de movimiento angular total de la rueda en precesión es la suma de la cantidad de movimiento angular $I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ debida al giro y la cantidad de movimiento angular debida al movimiento del centro de masa en torno al eje. En este tratamiento, se despreciará la contribución del movimiento del centro de masa y se tomará la cantidad de movimiento angular total como simplemente $I\vec{\boldsymbol{\omega}}$. En la práctica, esta aproximación es buena si $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ se hace muy grande.

El diagrama vectorial de la figura 11.14b muestra que, en el intervalo de tiempo dt, el vector cantidad de movimiento angular da vueltas a través de un ángulo $d\phi$, que también es el ángulo a través del que da vueltas el eje. A partir del triángulo vectorial formado por los vectores $\vec{\mathbf{L}}_i$, $\vec{\mathbf{L}}_f$ y $d\vec{\mathbf{L}}$, se ve que

$$\operatorname{sen}(d\phi) \approx d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau\, dt}{L} = \frac{(Mgh)\; dt}{L}$$

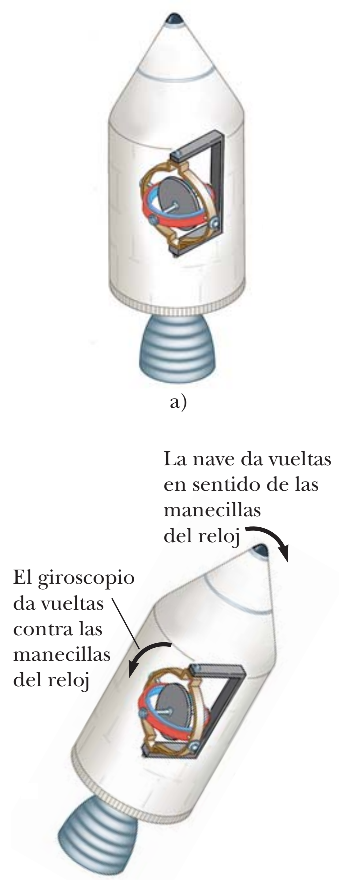
donde se usó que, para valores pequeños de cualquier ángulo θ, sen $\theta \approx \theta$. Al dividir entre dt y usar la correspondencia $L = I\omega$, se encuentra que la rapidez a la que da vueltas el eje en torno al eje vertical es

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgh}{I\omega} \qquad \textbf{(11.20)}$$

La rapidez angular ω_p se llama **frecuencia de precesión**. Este resultado sólo es válido cuando $\omega_p << \omega$. De otro modo, está involucrado un movimiento mucho más complicado. Como puede ver de la ecuación 11.20, la condición $\omega_p << \omega$ se satisface cuando ω es grande, es decir, cuando la rueda gira rápidamente. Además, note que la frecuencia de precesión disminuye conforme ω aumenta, es decir, conforme la rueda gira más rápido en torno a su eje de simetría.

Como ejemplo de la utilidad de los giroscopios, suponga que usted está en una nave en el espacio profundo y necesita alterar su trayectoria. Para encender los motores en la dirección correcta, necesita girar la nave. Sin embargo, ¿cómo gira una nave espacial en el espacio vacío? Una forma es tener pequeños motores cohete que encienden perpendicular al lado de la nave, lo que proporciona un momento de torsión en torno a su centro de masa. Tal configuración es deseable, y muchas naves tienen tales cohetes.

Sin embargo, considere otro método, que se relaciona con la cantidad de movimiento angular y no requiere el consumo de combustible. Suponga que la nave espacial porta un giroscopio que no gira, como en la figura 11.15a. En este caso, la cantidad de movimiento angular de la nave en torno a su centro de masa es cero. Suponga que el giroscopio se pone en rotación, lo que da al giroscopio una cantidad de movimiento angular distinta de cero. No hay momento de torsión externo sobre el sistema aislado (nave espacial y giroscopio), así que la cantidad de movimiento angular de este sistema debe permanecer cero de acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. Este principio se satisface si la nave da vueltas en la dirección opuesta a la del giroscopio, de modo



b)

Figura 11.15 a) Una nave espacial porta un giroscopio que no gira. b) Cuando el giroscopio se pone en rotación, la nave gira al otro lado de modo que la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

que se cancelan los vectores cantidad de movimiento angular del giroscopio y la nave, lo que resulta en ausencia de cantidad de movimiento angular del sistema. El resultado de girar el giroscopio, como en la figura 11.15b, ¡es que la nave da la vuelta! Al incluir tres giroscopios con ejes mutuamente perpendiculares, se logra cualquier rotación deseada en el espacio.

Este efecto creó una situación indeseable con la nave espacial *Voyager 2* durante su vuelo. La nave llevaba una grabadora cuyos carretes giraban a grandes magnitudes de velocidad. Cada vez que la grabadora se encendía, los carretes actuaban como giroscopios y la nave comenzaba una rotación indeseable en la dirección opuesta. ¡El mando de control de la misión tuvo que contrarrestar esta rotación al activar los cohetes de disparo lateral para detener la rotación!

Resumen

DEFINICIONES

Conocidos dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, el producto cruz $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es un vector $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene una magnitud

$$C = AB \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(11.3)}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. La dirección del vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

El momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ debido a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en torno a un eje a través del origen en un marco inercial se define como

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} \qquad \textbf{(11.1)}$$

La **cantidad de movimiento angular** $\vec{\mathbf{L}}$ de una partícula que tiene cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ en torno a un eje a través del origen es

$$\vec{\mathbf{L}} \equiv \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \qquad \textbf{(11.10)}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es la posición vectorial de la partícula en relación con el origen.

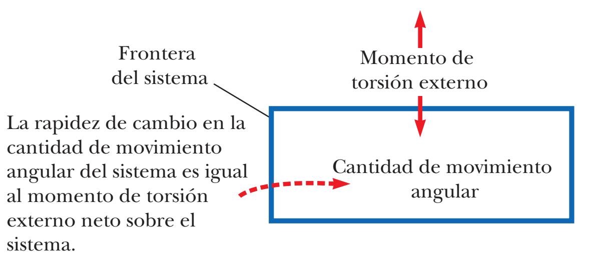
CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

La componente z de la cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje z fijo es

$$L_z = I\omega \qquad \textbf{(11.14)}$$

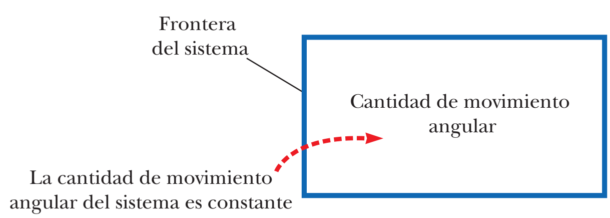
donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación y ω es su rapidez angular.

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema interactúa con su ambiente en el sentido de que sobre el sistema existe un momento de torsión externo, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento angular:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \qquad \textbf{(11.13)}$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema no experimenta momento de torsión externo desde el ambiente, la cantidad de movimiento angular total del sistema se conserva:

$$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{L}}_f \qquad \textbf{(11.18)}$$

Aplicar esta ley de conservación de la cantidad de movimiento angular a un sistema cuyo momento de inercia cambia produce

$$I_i\omega_i = I_f\,\omega_f = \text{constante} \qquad \textbf{(11.19)}$$

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

1. **O** ¿Es posible calcular el momento de torsión que actúa sobre un objeto rígido sin especificar un eje de rotación? ¿El momento de torsión es independiente de la ubicación del eje de rotación?

2. **O** El vector $\vec{\mathbf{A}}$ está en la dirección y negativa y el vector $\vec{\mathbf{B}}$ está en la dirección x negativa. **i)** ¿Cuál es la dirección de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$? a) y, b) $-y$, c) x, d) $-x$, e) z, f) $-z$, g) no hay dirección porque es cero, h) no hay dirección porque es un escalar. **ii)** ¿Cuál es la dirección de $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$? Elija entre las mismas posibilidades de la a) a la h).

3. **O** Nombre tres direcciones perpendiculares como derecha, arriba y hacia usted, como puede nombrarlas cuando está frente a una pantalla de televisión que se encuentra en un plano vertical. Los vectores unitarios para estas direcciones son $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$, respectivamente. Para la cantidad $(-3\hat{\mathbf{u}}$ m $\times$ $2\hat{\mathbf{t}}$ N$)$, identifique la magnitud, unidad y dirección, si la hay. **i)** La magnitud es a) 6, b) 3, c) 2, d) 0. **ii)** La unidad es a) newton metros, b) newtons, c) metros, d) no hay unidad. **iii)** La dirección es a) arriba, b) hacia usted, c) no hay dirección, d) arriba, e) alejándose de usted, f) izquierda, g) derecha.

4. **O** Sean las cuatro direcciones horizontales de la brújula norte, este, sur y oeste que se representan por los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\mathbf{s}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$. En forma vertical hacia arriba y abajo se representan como $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{d}}$. También identifique los vectores unitarios que están a la mitad entre dichas direcciones, como $\widehat{\mathbf{ne}}$ para noreste. Clasifique las magnitudes de los siguientes productos cruz de mayor a menor. Si algunas son iguales en magnitud, o iguales a cero, muéstrelo en su clasificación. a) $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}}$, b) $\hat{\mathbf{w}} \times \widehat{\mathbf{ne}}$, c) $\hat{\mathbf{u}} \times \widehat{\mathbf{ne}}$, d) $\hat{\mathbf{n}} \times \widehat{\mathbf{nw}}$, e) $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}$.

5. Si el momento de torsión que actúa sobre una partícula en torno a cierto origen es cero, ¿qué puede decir acerca de su cantidad de movimiento angular en torno a dicho origen?

6. Una bola se lanza en tal forma que no gira en torno a su propio eje. ¿Este enunciado implica que la cantidad de movimiento angular es cero en torno a un origen arbitrario? Explique.

7. **O** A veces se pueden confundir los términos compuestos. Por ejemplo, una hormiga león no es un tipo de león sino más bien un tipo diferente de insecto. a) ¿La energía cinética rotacional es un tipo de energía cinética? b) ¿El momento de torsión es un tipo de fuerza? c) ¿La cantidad de movimiento angular es un tipo de cantidad de movimiento?

8. ¿Por qué un poste largo de equilibrio ayuda a alguien que camina en la cuerda floja?

9. **O** Una patinadora de hielo comienza a girar con sus brazos estirados a los lados. Se equilibra sobre la punta de un patín para girar sin fricción. Luego jala sus brazos en tal forma que su momento de inercia disminuye en un factor de dos. En el proceso de hacer esto, ¿qué sucede con su energía cinética? a) Aumenta en un factor de cuatro. b) Aumenta en un factor de dos. c) Permanece constante. d) Disminuye en un factor de dos. e) Disminuye en un factor de cuatro. f) Es cero porque su centro de masa es estable. g) Se somete a un cambio por una cantidad que obviamente depende de qué tan rápido la patinadora jala sus brazos hacia adentro.

10. En una grabadora el mecanismo impulsor jala la cinta para que pase por las cabezas de lectura y escritura con una rapidez constante. Considere el carrete del que se jala la cinta. Conforme la cinta se jala de él, el radio del rollo de cinta restante disminuye. ¿Cómo cambia con el tiempo el momento de torsión del carrete? ¿Cómo cambia con el tiempo la rapidez angular del carrete? Si el mecanismo impulsor se enciende de modo que la cinta recibe un súbito jalón con una gran fuerza, ¿la cinta tiene más probabilidad de romperse cuando se jala de un carrete casi lleno o de un carrete casi vacío?

11. **O** Un ratón mascota duerme cerca del borde este de una tornamesa horizontal estable que se apoya en un eje vertical sin fricción a través de su centro. El ratón despierta y comienza a caminar al norte sobre la tornamesa. **i)** Conforme da sus primeros pasos, ¿cuál es el desplazamiento del ratón en relación con el suelo fijo abajo? a) norte, b) sur, c) ninguno. **ii)** En este proceso, el punto sobre la tornamesa donde dormitaba el ratón experimenta ¿qué desplazamiento en relación con el suelo abajo? a) norte, b) sur, c) ninguno. **iii)** En este proceso para el sistema ratón–tornamesa, ¿se conserva la energía mecánica? **(iv)** ¿Se conserva la cantidad de movimiento? **v)** ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular?

12. **O** Una fiesta de empleados para una compañía muy exitosa presenta un carrusel con animales reales. La tornamesa horizontal no tiene motor, pero gira libremente sobre un eje vertical sin fricción a través de su centro. Dos ponis de igual masa están amarrados con una cuerda en puntos diametralmente opuestos sobre el borde. Los niños los desatan y las plácidas bestias comienzan a andar con dificultad uno hacia el otro a través de la tornamesa. **i)** Mientras camina, ¿qué sucede con la rapidez angular del carrusel? a) Aumenta. b) Permanece constante. c) Disminuye. Considere el sistema ponis–tornamesa en este proceso. **ii)** ¿La energía mecánica se conserva? **iii)** ¿La cantidad de movimiento se conserva? **iv)** ¿La cantidad de movimiento angular se conserva?

13. **O** Un disco horizontal con momento de inercia I_1 da vueltas con velocidad angular ω_0 sobre un eje vertical sin fricción. Un segundo disco horizontal, que tiene momento de inercia I_2 e inicialmente no gira, cae sobre el primero. Debido a fricción entre la superficie de los discos, los dos alcanzan la misma velocidad angular. ¿Cuál es? a) $I_1\omega_0/I_2$, b) $I_2\omega_0/I_1$, c) $I_1\omega_0/(I_1 + I_2)$, d) $I_2\omega_0/(I_1 + I_2)$, e) $(I_1 + I_2)\ \omega_0/I_1$, f) $(I_1 + I_2)\ \omega_0/I_2$.

14. En alguna competencia de motocicletas, los conductores pasan sobre pequeñas colinas y la motocicleta se convierte en aérea durante un corto intervalo de tiempo. Si el corredor de motocicleta mantiene el acelerador abierto mientras deja la colina y va al aire, la motocicleta tiende a dirigirse hacia arriba. ¿Por qué?

15. Si el calentamiento global continúa durante los siguientes 100 años, es probable que algo de hielo polar se funda y el agua escurrirá hacia el ecuador. ¿Cómo cambiaría eso el momento de inercia de la Tierra? ¿La duración del día (una revolución) aumentaría o disminuiría?

16. Un científico que llega a un hotel pide a un botones que lleve una pesada maleta. Cuando el botones rodea una esquina, la maleta se balancea súbitamente alejándose de él por alguna razón desconocida. El alarmado botones suelta la maleta y sale corriendo. ¿Qué podría haber en la maleta?

Problemas

Sección 11.1 Producto vectorial y momento de torsión

1. Conocidos $\vec{\mathbf{M}} = 6\,\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{N}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, calcule el producto vectorial $\vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{N}}$.

2. Los vectores 42.0 cm a 15.0° y 23.0 cm a 65.0° parten del origen. Ambos ángulos se miden contra las manecillas del reloj desde el eje *x*. Los vectores forman dos lados de un paralelogramo. a) Encuentre el área del paralelogramo. b) Encuentre la longitud de su diagonal más larga.

3. Dos vectores se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre a) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y b) el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

4. Dos vectores se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 6\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$. Evalúe las cantidades a) $\cos^{-1}[|\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}|/AB]$ y b) $\text{sen}^{-1}[|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|/AB]$. c) ¿Cuál da el ángulo entre los vectores?

5. El viento ejerce sobre una flor la fuerza horizontal de 0.785 N hacia el este. El tallo de la flor mide 0.450 m de largo y se inclina hacia el este, formando un ángulo de 14.0° con la vertical. Encuentre el vector momento de torsión de la fuerza del viento en torno a la base del tallo.

6. ● Un estudiante afirma que encontró un vector $\vec{\mathbf{A}}$ tal que $(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) \times \vec{\mathbf{A}} = (4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})$. ¿Usted cree esta afirmación? Explique.

7. Suponga $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$?

8. ● Una partícula se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m y sobre ella se ejerce una fuerza conocida por $\vec{\mathbf{F}} = (3.00\hat{\mathbf{i}} + 2.00\hat{\mathbf{j}})$ N. a) ¿Cuál es el momento de torsión que actúa sobre la partícula en torno al origen? b) ¿Hay otro punto respecto al cual el momento de torsión causado por esta fuerza en la partícula estará en la dirección opuesta con la mitad de la magnitud? ¿Puede haber más de uno de tales puntos? ¿Dicho punto se encuentra sobre el eje *y*? ¿Puede haber más de uno de tales puntos sobre el eje *y*? Determine el vector de posición de tal punto.

9. Dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ actúan a lo largo de los dos lados de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P11.9. El punto *O* es la intersección de las altitudes del triángulo. Encuentre una tercera fuerza $\vec{\mathbf{F}}_3$ a aplicar en *B* y a lo largo de *BC* tal que el momento de torsión total sea cero en torno al punto *O*. **¿Qué pasaría si?** ¿El momento de torsión total cambiará si $\vec{\mathbf{F}}_3$ se aplica no en *B* sino en cualquier otro punto a lo largo de *BC*?

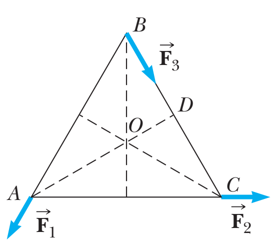


Figura P11.9

10. Use la definición del producto vectorial y las definiciones de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ para probar las ecuaciones 11.7. Suponga que el eje *x* apunta hacia la derecha, el eje *y* hacia arriba y el eje *z* es horizontal hacia usted (no alejándose de usted). Se dice que esta elección hace que el sistema coordenado sea un sistema *de mano derecha*.

Sección 11.2 Cantidad de movimiento angular: el sistema no aislado

11. Una barra rígida ligera de 1.00 m de largo une a dos partículas, con masas de 4.00 kg y 3.00 kg, en sus extremos. La combinación da vueltas en el plano *xy* en torno a un eje a través del centro de la barra (figura P11.11). Determine la cantidad de movimiento angular del sistema en torno al origen, cuando la rapidez de cada partícula sea 5.00 m/s.

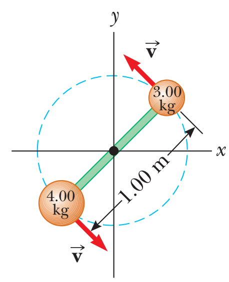


Figura P11.11

12. Una partícula de 1.50 kg se mueve en el plano *xy* con una velocidad de $\vec{\mathbf{v}} = (4.20\hat{\mathbf{i}} - 3.60\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen cuando su vector de posición es $\vec{\mathbf{r}} = (1.50\hat{\mathbf{i}} + 2.20\hat{\mathbf{j}})$ m.

13. El vector de posición de una partícula de 2.00 kg de masa como función del tiempo se conoce por $\vec{\mathbf{r}} = (6.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00t\hat{\mathbf{j}})$ m. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen como función del tiempo.

14. Un péndulo cónico consiste de una plomada de masa *m* en movimiento en una trayectoria circular en un plano horizontal, como se muestra en la figura P11.14. Durante el movimiento, el alambre de soporte, de longitud ℓ, mantiene el ángulo constante θ con la vertical. Demuestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la plomada en torno al centro del círculo es

$$L = \left(\frac{m^2 g \ell^3 \,\text{sen}^4\theta}{\cos\theta}\right)^{1/2}$$

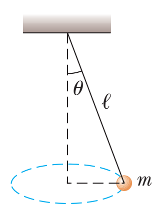


Figura P11.14

15. Una partícula de masa m se mueve en un círculo de radio R con una rapidez constante v, como se muestra en la figura P11.15. El movimiento comienza en el punto Q en el tiempo $t = 0$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al punto P como función del tiempo.

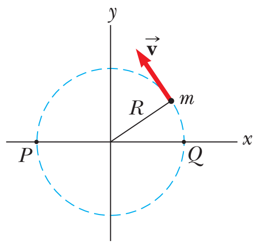


Figura P11.15 Problemas 15 y 30.

16. Un contrapeso de 4.00 kg se une a una cuerda ligera que se enreda alrededor de un carrete (consulte la figura 10.19). El carrete es un cilindro sólido uniforme de 8.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. a) ¿Cuál es el momento de torsión neto sobre el sistema en torno al punto O? b) Cuando el contrapeso tiene una rapidez v, el carrete tiene una rapidez angular $\omega = v/R$. Determine la cantidad de movimiento angular total del sistema en torno a O. c) Con el hecho de que $\vec{\boldsymbol{\tau}} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$ y su resultado del inciso b), calcule la aceleración del contrapeso.

17. ● Una partícula de masa m se dispara con una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_i$ que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura P11.17. La partícula se mueve en el campo gravitacional de la Tierra. Encuentre la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen cuando la partícula está a) en el origen, b) en el punto más alto de su trayectoria y c) justo antes de golpear el suelo. d) ¿Qué momento de torsión hace que cambie su cantidad de movimiento angular?

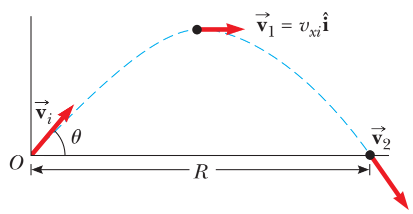


Figura P11.17

18. Con dirección justo hacia la cima de los Pikes Peak, un avión de 12 000 kg de masa vuela sobre las planicies de Kansas a una altitud casi constante de 4.30 km con velocidad constante de 175 m/s oeste. a) ¿Cuál es el vector cantidad de movimiento angular del avión en relación con una granja de trigo sobre el suelo directamente bajo el avión? b) ¿Este valor cambia a medida que el avión continúa su movimiento a lo largo de una línea recta? c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular en relación con la cima de los Pikes Peak?

19. ● Una bola que tiene masa m está amarrada al extremo de un asta que está conectada al lado de un alto edificio en el punto P, que se muestra en la figura P11.19. La longitud del asta es ℓ y forma un ángulo θ con el eje x. La bola se afloja y comienza a caer con aceleración $-g\hat{\mathbf{j}}$. a) Determine la cantidad de movimiento angular de la bola en torno al punto P como función del tiempo. b) ¿Por qué razón física cambia la cantidad de movimiento angular? c) ¿Cuál es su relación de cambio?

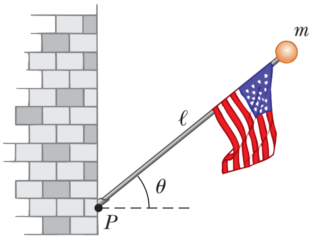


Figura P11.19

20. ● Una partícula de 5.00 kg parte del origen en el tiempo cero. Su velocidad como función del tiempo está dada por

$$\vec{\mathbf{v}} = (6\ \text{m/s}^3)t^2\hat{\mathbf{i}} + (2\ \text{m/s}^2)t\hat{\mathbf{j}}$$

a) Encuentre su posición como función del tiempo. b) Describa su movimiento cualitativamente. c) Encuentre su aceleración como función del tiempo. d) Halle la fuerza neta que se ejerce sobre la partícula como función del tiempo. e) Encuentre el momento de torsión neto en torno al origen que se ejerce sobre la partícula como función del tiempo. f) Halle la cantidad de movimiento angular de la partícula como función del tiempo. g) Encuentre la energía cinética de la partícula como función del tiempo. h) Encuentre la potencia inyectada en la partícula como función del tiempo.

Sección 11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido giratorio

21. Demuestre que la energía cinética de un objeto giratorio en torno a un eje fijo con cantidad de movimiento angular $L = I\omega$ se puede escribir como $K = L^2/2I$.

22. Una esfera sólida uniforme de 0.500 m de radio y 15.0 kg de masa gira contra las manecillas del reloj en torno a un eje vertical a través de su centro. Encuentre su vector cantidad de movimiento angular cuando su rapidez angular es 3.00 rad/s.

23. Un disco sólido uniforme de 3.00 kg de masa y 0.200 m de radio da vueltas en torno a un eje fijo perpendicular a su cara con frecuencia angular de 6.00 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación a) pasa a través de su centro de masa y b) pasa a través de un punto a la mitad entre el centro y el borde.

24. ● a) Modele la Tierra como una esfera uniforme. Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento de giro en torno a su eje. b) Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. c) ¿Los dos resultados de cantidad de movimiento angular son casi iguales o muy diferentes? ¿Cuál es mayor en magnitud? ¿En qué factor?

25. Una partícula de 0.400 kg de masa está unida a la marca de 100 cm de una regleta de 0.100 kg de masa. La regleta da vueltas sobre una mesa horizontal sin fricción con una rapidez angular de 4.00 rad/s. Calcule la cantidad de movimiento angular del sistema cuando la regleta se articula en torno a un eje a) perpendicular a la mesa a través de la marca de 50.0 cm y b) perpendicular a la mesa a través de la marca de 0 cm.

26. El Big Ben (figura P10.42), el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene manecillas horaria y minutero con longitudes de 2.70 m y 4.50 m y masas de 60.0 kg y 100 kg, respectivamente. Calcule la cantidad de movimiento angular de dichas manecillas en torno al punto central. Trate las manecillas como largas barras uniformes delgadas.

27. Se construye una estación espacial en forma de anillo hueco de 5.00×10^4 kg de masa. Los integrantes de la tripulación caminan sobre una cubierta formada por la superficie interior de la pared cilíndrica exterior del anillo, con 100 m de radio. En reposo, cuando se construyó, el anillo se puso a girar en torno a su eje de modo que las personas en el interior experimentan una aceleración en caída libre efectiva igual a g. (La figura P11.27 muestra el anillo junto con algunas otras partes que forman una aportación despreciable al momento de inercia total.) La rotación se logra al encender dos pequeños cohetes unidos tangencialmente a puntos opuestos sobre el exterior del anillo. a) ¿Qué cantidad de movimiento angular adquiere la estación espacial? b) ¿Durante qué intervalo de tiempo se deben encender los cohetes si cada uno ejerce un empuje de 125 N? c) Pruebe que el momento de torsión total sobre el anillo, multiplicado por el intervalo de tiempo que encontró en el inciso b), es igual al cambio en cantidad de movimiento angular encontrado en el inciso a). Esta igualdad representa el *teorema de impulso angular–cantidad de movimiento angular*.

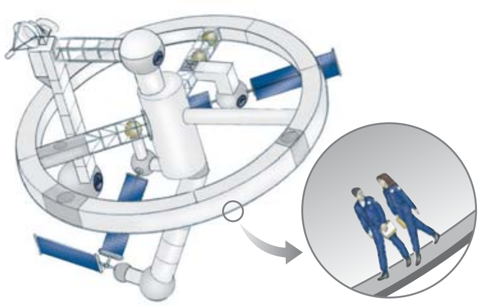


Figura P11.27 Problemas 27 y 38.

28. La distancia entre los centros de las ruedas de una motocicleta es 155 cm. El centro de masa de la motocicleta, incluido el conductor, está a 88.0 cm sobre el suelo y a la mitad entre las ruedas. Suponga que la masa de cada rueda es pequeña comparada con el cuerpo de la motocicleta. El motor sólo impulsa la rueda trasera. ¿Qué aceleración horizontal de la motocicleta hará que la rueda frontal se eleve del suelo?

Sección 11.4 El sistema aislado: conservación de cantidad de movimiento angular

29. Un cilindro con momento de inercia I_1 da vueltas en torno a un eje vertical sin fricción con rapidez angular ω_i. Un segundo cilindro, con momento de inercia I_2 y que inicialmente no gira, cae sobre el primer cilindro (figura P11.29). Debido a la fricción entre las superficies, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular ω_f. a) Calcule ω_f. b) Demuestre que la energía cinética del sistema disminuye en esta interacción y calcule la proporción de la energía rotacional final a la inicial.

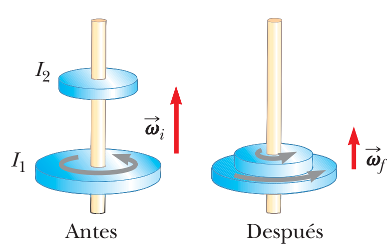


Figura P11.29

30. ● La figura P11.15 representa un pequeño disco plano con masa $m = 2.40$ kg que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Se mantiene en una órbita circular en torno a un eje fijo mediante una barra con masa despreciable y longitud $R = 1.50$ m, articulado en un extremo. Al inicio, el disco tiene una rapidez $v = 5.00$ m/s. Una bola de arcilla de 1.30 kg se deja caer verticalmente sobre el disco desde una pequeña distancia sobre éste y de inmediato se pega al disco. a) ¿Cuál es el nuevo periodo de rotación? b) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema disco–arcilla en torno al eje de rotación? c) ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva en el proceso de la arcilla que se pega al disco? d) ¿La energía mecánica del sistema se conserva en el proceso?

31. ● Una tornamesa cilíndrica uniforme de 1.90 m de radio y 30.0 kg de masa da vueltas contra las manecillas del reloj en un plano horizontal con una rapidez angular inicial de 4π rad/s. Los cojinetes fijos de la tornamesa no tienen fricción. Un bulto de barro de 2.25 kg de masa y tamaño despreciable se deja caer sobre la tornamesa desde una pequeña distancia sobre ésta y de inmediato se pega a la tornamesa en un punto a 1.80 m al este del eje. a) Encuentre la rapidez angular final del barro y la tornamesa. b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema tornamesa–barro? Explique y use resultados numéricos para verificar su respuesta. c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema? Explique su respuesta.

32. Un estudiante se sienta sobre un banco rotatorio libremente sosteniendo dos mancuernas, cada una de 3.00 kg de masa (figura P11.32). Cuando el estudiante extiende los brazos horizontalmente (figura P11.32a), las mancuernas están a 1.00 m del eje de rotación y el estudiante da vueltas con una rapidez angular de 0.750 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es de 3.00 kg·m^2 y se supone constante. El estudiante jala las mancuernas horizontalmente hacia adentro a una posición 0.300 m del eje de rotación (figura P11.32b). a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante. b) Encuentre la energía cinética del sistema rotatorio antes y después de jalar las mancuernas hacia adentro.

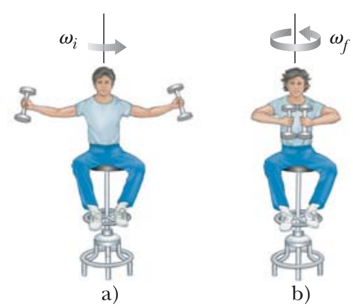


Figura P11.32

33. Un carrusel de jardín con radio $R = 2.00$ m tiene un momento de inercia $I = 250$ kg·m^2 y es rotatorio a 10.0 rev/min en torno a un eje vertical sin fricción. Frente al eje, un niño de 25.0 kg salta hacia el tiovivo y logra sentarse en el borde. ¿Cuál es la nueva rapidez angular del tiovivo?

34. ● Una barra uniforme de 300 g de masa y 50.0 cm de longitud rota en un plano horizontal en torno a una clavija fija vertical sin fricción a través de su centro. Dos pequeñas cuentas densas, cada una de masa m, se montan sobre la barra de modo que puedan deslizar sin fricción a lo largo de su longitud. Al inicio, las cuentas se sostienen mediante broches en posiciones a 10.0 cm en cada lado del centro, y el sistema está girando con una rapidez angular de 36.0 rad/s. Los broches se liberan simultáneamente y las cuentas se deslizan hacia afuera a lo largo de la barra. a) Encuentre la rapidez angular ω_f del sistema, dependiente de m, en el instante en que las cuentas se deslizan de los extremos de la barra. b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles para ω_f y los valores de m a los que corresponden? Describa la forma de una gráfica de ω_f con m.

35. ● Una mujer de 60.0 kg está de pie en el borde oeste de una tornamesa horizontal que tiene un momento de inercia de 500 kg · m^2 y un radio de 2.00 m. La tornamesa inicialmente está en reposo y es libre de dar vuelta en torno a un eje vertical sin fricción a través de su centro. Después la mujer comienza a caminar alrededor del borde en sentido de las manecillas del reloj (visto desde arriba del sistema) con una rapidez constante de 1.50 m/s en relación con la Tierra. a) Considere el sistema mujer–tornamesa mientras comienza el movimiento. ¿La energía mecánica del sistema se conserva? ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva? ¿La cantidad de movimiento angular del sistema se conserva? b) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular da vuelta la tornamesa? c) ¿Cuánta energía química convierte el cuerpo de la mujer en energía mecánica conforme la mujer se pone ella misma y a la tornamesa en movimiento?

36. Un disco de 80.0 g de masa y 4.00 cm de radio se desliza a través de una mesa de aire con una rapidez de 1.50 m/s, como se muestra en la figura P11.36a. Forma una colisión oblicua con un segundo disco de 6.00 cm de radio y 120 g de masa (inicialmente en reposo) tal que sus bordes apenas se tocan. Ya que sus bordes están recubiertos con pegamento de acción instantánea, los discos quedan unidos y giran después de la colisión (figura P11.36b). a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema relativa al centro de masa? b) ¿Cuál es la rapidez angular en torno al centro de masa?

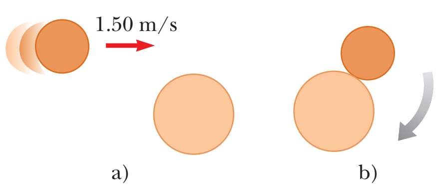


Figura P11.36

37. Un bloque de madera de masa M, que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable (figura P11.37). La barra se articula en el otro extremo. Una bala de masa m, que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la barra con rapidez v, golpea al bloque y queda incrustada en él. a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala–bloque? b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se convierte en energía interna en la colisión?

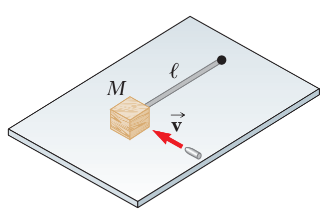


Figura P11.37

38. Una estación espacial con forma de rueda gigante tiene un radio de 100 m y un momento de inercia de 5.00×10^8 kg · m^2. Una tripulación de 150 personas vive en el borde, y la rotación de la estación hace que la tripulación experimente una aceleración aparente en caída libre de g (figura P11.27). Cuando 100 personas se mueven hacia el centro de la estación para una junta, la rapidez angular cambia. ¿Qué aceleración aparente en caída libre experimentan los tripulantes que permanecen en el borde? Suponga que la masa promedio de cada habitante es 65.0 kg.

39. ● Un tapón de barro pegajoso con masa m y velocidad $\vec{v}_i$ se dispara a un cilindro sólido de masa M y radio R (figura P11.39). El cilindro inicialmente está en reposo y se monta sobre un eje horizontal fijo que corre a través de su centro de masa. La línea de movimiento del proyectil es perpendicular al eje y a una distancia $d < R$ desde el centro. a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo antes de que el barro golpee y se pegue a la superficie del cilindro. b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema barro–cilindro? Explique su respuesta. c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema barro–cilindro? Explique su respuesta.

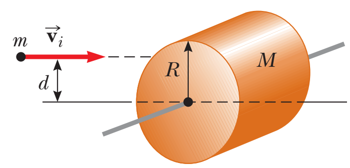


Figura P11.39

40. Una señal rectangular, uniforme y delgada cuelga verticalmente sobre la puerta de una tienda. La señal tiene bisagras con una barra horizontal estable a lo largo de su borde superior. La masa de la señal es 2.40 kg, y su dimensión vertical es 50.0 cm. La señal se balancea sin fricción, de modo que es un blanco tentador para niños armados con bolas de nieve. El máximo desplazamiento angular de la señal es 25.0° en ambos lados de la vertical. En un momento cuando la señal está vertical y se mueve a la izquierda, una bola de nieve de 400 g de masa, que viaja en sentido horizontal hacia la derecha con una velocidad de 160 cm/s, golpea perpendicularmente el borde inferior de la señal y se pega ahí. a) Calcule la rapidez angular de la señal justo antes del impacto. b) Calcule su rapidez angular inmediatamente después del impacto. c) ¿A qué ángulo máximo se balanceará la señal salpicada?

41. Suponga que un meteoro de 3.00×10^{13} kg, que se mueve a 30.0 km/s en relación con el centro de la Tierra, golpea la Tierra. ¿Cuál es el orden de magnitud de la máxima disminución posible en la rapidez angular de la Tierra debido a esta colisión? Explique su respuesta.

Sección 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

42. Una nave espacial está en el espacio vacío. Porta en cubierta un giroscopio con un momento de inercia $I_g = 20.0$ kg · m^2 en torno al eje del giroscopio. El momento de inercia de la nave espacial en torno al mismo eje es $I_s = 5.00 \times 10^5$ kg · m^2. Ni la nave espacial ni el giroscopio giran originalmente. El giroscopio se puede activar en un periodo despreciable de tiempo a una rapidez angular de 100 s^{-1}. Si la orientación de la nave debe cambiar en 30.0°, ¿durante qué intervalo de tiempo se debe hacer funcionar el giroscopio?

43. El vector cantidad de movimiento angular de un giroscopio en precesión barre un cono como se muestra en la figura 11.13b.

Su rapidez angular, llamada su frecuencia precesional, se conoce por $\omega_p = \tau/L$, donde τ es la magnitud del momento de torsión sobre el giroscopio y L es la magnitud de su cantidad de movimiento angular. En el movimiento llamado *precesión de los equinoccios*, el eje de rotación de la Tierra precede en torno a la perpendicular a su plano orbital con un periodo de 2.58×10^4 años. Modele la Tierra como una esfera uniforme y calcule el momento de torsión sobre la Tierra que provoca esta precesión.

Problemas adicionales

44. Todo mundo se queja de que no hay suficientes horas en un día. En un intento por componer esto, suponga que todas las personas en el mundo se alinean en el ecuador y comienzan a correr hacia el este a 2.50 m/s en relación con la superficie de la Tierra. ¿En cuánto aumenta la longitud de un día? Suponga que la población mundial es de 7.00×10^9 personas, con una masa promedio de 55.0 kg cada una, y que la Tierra es una esfera homogénea sólida. Además, puede usar la aproximación $1/(1 - x) \approx 1 + x$ para x pequeña.

45. Un juego de futbol americano se canceló por mal clima en Cleveland, y dos jugadores retirados se deslizan como niños sobre un estacionamiento cubierto de hielo sin fricción. William “Refrigerador” Perry, de 162 kg de masa, se desliza hacia la derecha a 8.00 m/s, y Doug Flutie, de 81.0 kg de masa, se desliza hacia la izquierda a 11.0 m/s a lo largo de la misma línea. Cuando se encuentran, se toman de las manos y se sujetan con fuerza. a) ¿Cuál es su velocidad inmediatamente después? b) ¿Qué fracción de su energía cinética original todavía es energía mecánica después de su colisión? Los atletas se divierten tanto que repiten la colisión con las mismas velocidades originales, pero esta vez moviéndose a lo largo de líneas paralelas separadas 1.20 m. En su aproximación más cercana se toman de los brazos y comienzan a girar en torno a su centro de masa común. Modele a los hombres como partículas y sus brazos como una cuerda que no se estira. c) Encuentre la velocidad de su centro de masa. d) Encuentre su rapidez angular. e) ¿Qué fracción de su energía cinética original todavía es energía mecánica después de ligar sus brazos?

46. ● Un patinador con su patineta se modelan como una partícula de 76.0 kg de masa, ubicada en su centro de masa. Como se muestra en la figura P8.37 del capítulo 8, el patinador parte del reposo en una posición encogida en un extremo de una media tubería (punto Ⓐ). La media tubería forma la mitad de un cilindro de 6.80 m de radio con su eje horizontal. En su descenso, el patinador se mueve sin fricción y mantiene su postura de modo que su centro de masa se mueve a través de un cuarto de círculo de 6.30 m de radio. a) Encuentre su rapidez en la parte baja de la media tubería (punto Ⓑ). b) Encuentre su cantidad de movimiento angular en torno al centro de curvatura. c) Inmediatamente después de pasar el punto Ⓑ, se pone de pie y eleva los brazos, lo que eleva su centro de gravedad de 0.500 m a 0.950 m sobre el concreto (punto Ⓒ). Explique por qué su cantidad de movimiento linear es constante en esta maniobra, mientras que su cantidad de movimiento lineal y su energía mecánica no son constantes. d) Encuentre su rapidez inmediatamente después de que se pone de pie, cuando su centro de masa se mueve en un cuarto de círculo de 5.85 m de radio. e) ¿Cuánta energía química en las piernas del patinador se convirtió en energía mecánica mientras se puso de pie? A continuación, el patinador se desliza hacia arriba con su centro de masa moviéndose en un cuarto de círculo de 5.58 m de radio. Su cuerpo está horizontal cuando pasa el punto Ⓓ, el extremo lejano de la media tubería. f) Encuentre su rapidez en esta posición. Por último se vuelve balístico y gira mientras su centro de masa se mueve en forma vertical. g) ¿Qué tan alto sobre el punto Ⓓ se eleva? h) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en el aire antes de tocar tierra, viendo hacia abajo y enconchado de nuevo, 2.34 m abajo del nivel del punto Ⓓ? i) Compare la solución a este problema con la solución al problema 8.37. ¿Cuál es más precisa? ¿Por qué? *Precaución:* No intente esta acrobacia sin la habilidad ni el equipo de protección requeridos ni en un canal de desagüe al que no tenga acceso legal.

47. Una barra rígida sin masa tiene tres partículas con masas iguales unidas a ella, como se muestra en la figura P11.47. La barra es libre de dar vuelta en un plano vertical en torno a un eje sin fricción perpendicular a la barra a través del punto P y se libera del reposo en la posición horizontal en $t = 0$. Si supone que se conocen m y d, encuentre: a) el momento de inercia del sistema (barra más partículas) en torno al eje, b) el momento de torsión que actúa sobre el sistema en $t = 0$, c) la aceleración angular del sistema en $t = 0$, d) la aceleración lineal de la partícula 3 en $t = 0$, e) la máxima energía cinética del sistema, f) la máxima rapidez angular alcanzada por la barra, g) la máxima cantidad de movimiento angular del sistema y h) la máxima rapidez alcanzada por la partícula 2.

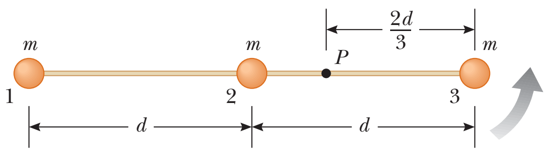


Figura P11.47

48. ● Una soga ligera pasa sobre una polea ligera sin fricción. Un extremo está unido a un racimo de plátanos de masa M y un mono de masa M escala por el otro extremo (figura P11.48). El mono escala la cuerda con la intención de llegar a los plátanos. a) Al tratar el sistema que consiste de mono, plátanos, soga y polea, evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de la polea. b) Use los resultados de a) y determine la cantidad de movimiento angular total en torno al eje de la polea y describa el movimiento del sistema. ¿El mono alcanzará los plátanos?

Figura P11.48

49. El cometa Halley se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica, su aproximación más cercana al Sol es más o menos 0.590 UA y su mayor distancia 35.0 UA (1 UA = distancia Tierra−Sol). La rapidez del cometa en la aproximación más cercana es 54.0 km/s. ¿Cuál es su rapidez cuando está más alejado del

2 = intermedio; 3 = desafiante; ▭ = razonamiento simbólico; ● = razonamiento cualitativo

Sol? La cantidad de movimiento angular del cometa en torno al Sol se conserva porque sobre el cometa no actúa momento de torsión. La fuerza gravitacional que ejerce el Sol tiene brazo de momento cero.

50. Un proyectil de masa m se mueve hacia la derecha con una rapidez v_i (figura P11.50a). El proyectil golpea y se pega al extremo de una barra estable de masa M y longitud d articulada en torno a un eje sin fricción a través de su centro (figura P11.50b). a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión. b) Determine la pérdida fraccional en energía mecánica debido a la colisión.

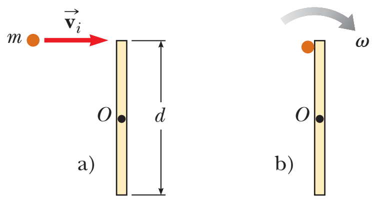


Figura P11.50

51. Un disco de masa m se amarra a una cuerda que pasa a través de un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (figura P11.51). El disco inicialmente orbita con rapidez v_i en un círculo de radio r_i. Luego la cuerda se jala lentamente desde abajo, lo que disminuye el radio del círculo a r. a) ¿Cuál es la rapidez del disco cuando el radio es r? b) Encuentre la tensión en la cuerda como función de r. c) ¿Cuánto trabajo W se realiza al mover m de r_i a r? *Nota:* La tensión depende de r. d) Obtenga valores numéricos para v, T y W cuando $r = 0.100$ m, $m = 50.0$ g, $r_i = 0.300$ m y $v_i = 1.50$ m/s.

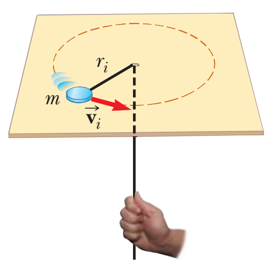


Figura P11.51

52. ● Dos niños juegan sobre los taburetes del mostrador de un restaurante. Sus pies no llegan a los reposapiés y lo alto de los taburetes tiene libertad de dar vuelta sin fricción sobre pedestales fijos al suelo. Uno de los niños atrapa una bola lanzada en un proceso descrito por la ecuación

$$(0.730\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(2.40\hat{\mathbf{j}}\ \text{rad/s})$$
$$+\ (0.120\ \text{kg})(0.350\hat{\mathbf{i}}\ \text{m}) \times (4.30\hat{\mathbf{k}}\ \text{m/s})$$
$$= [0.730\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (0.120\ \text{kg})(0.350\ \text{m})^2]\ \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

a) Resuelva la ecuación para la incógnita $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. b) Complete el enunciado del problema al que se aplica esta ecuación. Su enunciado debe incluir la información numérica conocida y la especificación de la incógnita a determinar. c) ¿La ecuación podría describir igualmente bien al otro niño que lanza la bola? Explique su respuesta.

53. Dos astronautas (figura P11.53), cada uno con 75.0 kg de masa, están conectados mediante una cuerda de 10.0 m de masa despreciable. Están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de velocidad de 5.00 m/s. Al tratar a los astronautas como partículas, calcule a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema y b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, un astronauta acorta la distancia entre ellos a 5.00 m. c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de velocidad de los astronautas? e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? f) ¿Cuánto trabajo hace el astronauta al acortar la cuerda?

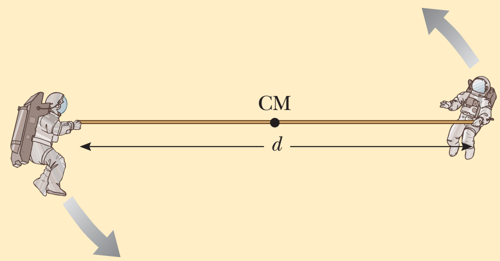


Figura P11.53 Problemas 53 y 54.

54. Dos astronautas (figura P11.53), cada uno con masa M, están conectados mediante una cuerda de longitud d que tiene masa despreciable. Están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de velocidad v. Al tratar a los astronautas como partículas, calcule a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema y b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, un astronauta acorta la distancia entre ellos a $d/2$. c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de velocidad de los astronautas? e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? f) ¿Cuánto trabajo hace el astronauta al acortar la cuerda?

55. ● Los nativos de Sudamérica usan *boleadoras* para cazar aves y animales. Una boleadora puede consistir de tres piedras, cada una con masa m, en los extremos de tres cuerdas ligeras, cada una con longitud ℓ. Los otros extremos de las cuerdas se amarran juntos para formar una Y. El cazador sostiene una piedra y gira las otras dos piedras sobre su cabeza (figura P11.55a). Ambas piedras se mueven juntas en un círculo horizontal de radio 2ℓ con rapidez v_0. En el momento en que el componente horizontal de su velocidad se dirige hacia la presa, el cazador suelta la piedra de su mano. A medida que la boleadora vuela a través del aire, las cuerdas rápidamente toman un ordenamiento estable con ángulos constantes de 120 grados entre ellas (figura P11.55b). En la dirección vertical, la boleadora está en caída libre. Las fuerzas gravitacionales que ejerce la Tierra hacen que la unión de las cuerdas se mueva con la aceleración descendente $\vec{\mathbf{g}}$. Usted puede ignorar el movimiento vertical mientras procede a describir el movimiento horizontal

a) b)

Figura P11.55

de la boleadora. En términos de m, ℓ, y v_0, calcule a) la magnitud de la cantidad de movimiento, b) la rapidez horizontal del centro de masa, c) la cantidad de movimiento angular en torno al centro de masa y d) la rapidez angular de la boleadora en torno a su centro de masa. Calcule la energía cinética de la boleadora e) en el instante de liberación y f) en su forma Y estable. g) Explique cómo se aplican las leyes de conservación a la boleadora mientras cambia su configuración. Robert Beichner sugirió la idea para este problema.

56. Un cubo sólido de madera, de lado $2a$ y masa M, descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a dar vuelta en torno a un eje fijo AB (figura P11.56). Una bala de masa m y rapidez v se dispara a la cara opuesta $ABCD$ a una altura de $4a/3$. La bala se incrusta en el cubo. Encuentre el valor mínimo de v que se requiere para voltear al cubo de modo que caiga sobre la cara $ABCD$. Suponga $m << M$.

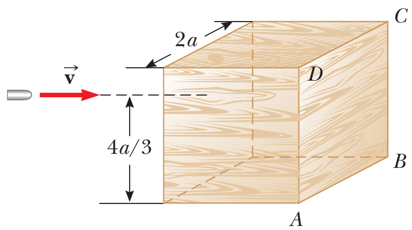


Figura P11.56

57. ● El calentamiento global causa preocupación porque incluso pequeños cambios en la temperatura de la Tierra pueden tener consecuencias significativas. Por ejemplo, si las capas de hielo polar de la Tierra se derritieran por completo, el agua adicional resultante en los océanos inundaría muchas áreas costeras. Calcule el cambio resultante en la duración de un día. Modele el hielo polar con una masa de 2.30×10^{19} kg y que forma dos discos planos de 6.00×10^5 m de radio. Suponga que el agua se dispersa en un delgado cascarón esférico irrompible después de derretirse. ¿Es apreciable el cambio en la duración de un día?

58. Un disco sólido uniforme se pone en rotación con una rapidez angular ω_i en torno a un eje a través de su centro. Mientras todavía gira con esta rapidez, el disco entra en contacto con una superficie horizontal y se libera como se muestra en la figura P11.58. a) ¿Cuál es la rapidez angular del disco una vez que tiene lugar el rodamiento puro? b) Encuentre la pérdida fraccionaria en energía cinética desde el momento en que se libera el disco hasta que ocurre rodamiento puro. *Sugerencia:* Considere momentos de torsión en torno al centro de masa.

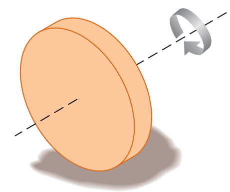


Figura P11.58 Problemas 58 y 59.

59. Suponga que a un disco sólido de radio R se le da una rapidez angular ω_i en torno a un eje a través de su centro y luego se baja a una superficie horizontal y se libera como se muestra en la figura P11.58. Además, suponga que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es μ. a) Demuestre que el intervalo de tiempo antes de que ocurra movimiento de rodamiento puro es $R\omega_i/3\mu g$. b) Demuestre que la distancia que recorre el disco antes de que se presente rodamiento puro es $R^2\omega_i^2/18\,\mu g$.

60. Un cubo sólido, de lado $2a$ y masa M, se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme $\vec{v}$, como se muestra en la figura P11.60a. Golpea un pequeño obstáculo al final de la mesa, lo que hace que el cubo se incline como se muestra en la figura P11.60b. Encuentre el valor mínimo de $\vec{v}$ tal que el cubo caiga de la mesa. El momento de inercia del cubo en torno a un eje a lo largo de uno de sus bordes es $8Ma^2/3$. *Nota:* El cubo se somete una colisión inelástica en el borde.

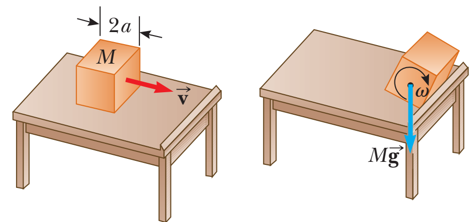


Figura P11.60

Respuestas a las preguntas rápidas

11.1 d). Debido a la función sen θ, $|\vec{A} \times \vec{B}|$ es o igual o menor que AB, dependiendo del ángulo θ.

11.2 **i**), a). Si $\vec{p}$ y $\vec{r}$ son paralelos o antiparalelos, la cantidad de movimiento angular es cero. Para una cantidad de movimiento angular distinta de cero, el vector cantidad de movimiento lineal debe estar corrido del eje de rotación. **ii**), c). La cantidad de movimiento angular es el producto de la cantidad de movimiento lineal y la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea a lo largo de la que se encuentra el vector cantidad de movimiento lineal.

11.3 b). La esfera hueca tiene un mayor momento de inercia que la esfera sólida.

11.4 **i**), a). La clavadista está en un sistema aislado, de modo que el producto $I\omega$ permanece constante. Puesto que su momento de inercia disminuye, su rapidez angular aumenta. **ii**), a). A medida que el momento de inercia de la clavadista disminuye, la rapidez angular aumenta en el mismo factor. Por ejemplo, si i baja en un factor de 2, en tal caso ω sube en un factor de 2. La energía cinética rotacional varía como el cuadrado de ω. Si I se reduce a la mitad, en tal caso ω^2 aumenta en un factor de 4 y la energía aumenta en un factor de 2.