



El pasatiempo malayo *gasing* es el giro de trompos que llegan a tener masas de hasta 5 kg. Los jugadores profesionales giran sus trompos de modo que puedan dar vueltas durante más de una hora antes de detenerse. En este capítulo se estudiará el movimiento rotacional de objetos como estos trompos. (Cortesía Turismo Malasia)

- 10.1 Posición, velocidad y aceleración angular
- 10.2 Cinemática rotacional: Objeto rígido bajo aceleración angular constante
- 10.3 Cantidades angulares y traslacionales
- 10.4 Energía cinética rotacional
- 10.5 Cálculo de momentos de inercia
- 10.6 Momento de torsión
- 10.7 Objeto rígido bajo un momento de torsión neto
- 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional
- 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo

El movimiento de un objeto extendido, como una rueda que gira en torno a su eje, no se puede explicar al representar el objeto como una partícula: en cualquier momento diferentes partes del objeto tienen distintas velocidades y aceleraciones lineales. Sin embargo, el movimiento de un objeto extendido se analiza al representarlo como un conjunto de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración lineales.

Al tratar con un objeto en rotación, la explicación se simplifica mucho al suponer que el objeto es rígido. Un **objeto rígido** no es deformable; es decir, las ubicaciones relativas de todas las partículas de que está compuesto permanecen constantes. Todos los objetos reales son deformables en cierta medida; no obstante, el modelo de objeto rígido es útil en muchas situaciones en que la deformación es despreciable.

10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

La figura 10.1 ilustra una vista desde arriba de un disco compacto, o CD, en rotación. El disco da vueltas en torno a un eje fijo perpendicular al plano de la figura que pasa a través del centro del disco en O . Un pequeño elemento del disco modelado como partícula en P está a una distancia fija r desde el origen y gira en torno a él en un círculo de radio r . (De hecho, *toda* partícula en el disco experimenta movimiento circular en torno a O .) Es conveniente representar la posición de P con sus coordenadas polares (r, θ) , donde r es la

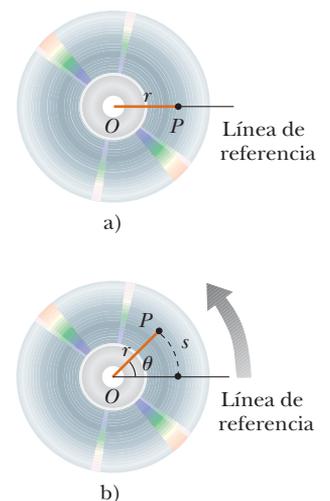


Figura 10.1 Disco compacto que gira en torno a un eje fijo a través de O perpendicular al plano de la figura. a) Para definir la posición angular del disco, se elige una línea de referencia fija. Una partícula en P se ubica a una distancia r desde el eje de rotación en O . b) Conforme el disco da vueltas, una partícula en P se mueve a través de una longitud de arco s sobre una trayectoria circular de radio r .

distancia desde el origen a P y θ se mide *contra las manecillas del reloj* desde cierta línea de referencia fija en el espacio, como se muestra en la figura 10.1a. En esta representación, el ángulo θ cambia en el tiempo mientras r permanece constante. A medida que la partícula se mueve a lo largo del círculo desde la línea de referencia, que está a un ángulo $\theta = 0$, se mueve a través de una longitud de arco s , como en la figura 10.1b. La longitud de arco s se relaciona con el ángulo θ mediante

$$s = r\theta \tag{10.1a}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{10.1b}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.1

Recuerde el radián

En las ecuaciones rotacionales, *debe* usar ángulos expresados en radianes. No caiga en la trampa de usar ángulos medidos en grados en las ecuaciones rotacionales.

Ya que θ es la relación de una longitud de arco y el radio del círculo, es un número puro. Sin embargo, por lo general, a θ se le da la unidad artificial **radián** (rad), donde **un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco**. Ya que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$, se sigue de la ecuación 10.1b que 360° corresponde a un ángulo de $(2\pi r/r)$ rad = 2π rad. Por tanto, $1 \text{ rad} = 360^\circ/2\pi \approx 57.3^\circ$. Para convertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes, se usa $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, de modo que

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ} \theta(\text{grados})$$

Por ejemplo, 60° es igual a $\pi/3$ rad y 45° es igual a $\pi/4$ rad.

Ya que el disco en la figura 10.1 es un objeto rígido, a medida que la partícula se mueve a través de un ángulo θ desde la línea de referencia, cualquier otra partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo θ . En consecuencia, **se puede asociar el ángulo θ con todo el objeto rígido así como con una partícula individual**, que permite definir la *posición angular* de un objeto rígido en su movimiento rotacional. Se elige una línea de referencia sobre el objeto, tal como una línea que conecte O y una partícula elegida sobre el objeto. La **posición angular** del objeto rígido es el ángulo θ entre esta línea de referencia sobre el objeto y la línea de referencia fija en el espacio, que con frecuencia se elige como el eje x . Tal identificación es similar a la forma en que se define la posición de un objeto en movimiento traslacional como la distancia x entre el objeto y la posición de referencia, que es el origen, $x = 0$.

Conforme la partícula en cuestión sobre el objeto rígido viaja de la posición \textcircled{A} a la posición \textcircled{B} en un intervalo de tiempo Δt , como en la figura 10.2, la línea de referencia fija al objeto cubre un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Esta cantidad $\Delta\theta$ se define como el **desplazamiento angular** del objeto rígido:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

La rapidez a la que se presenta este desplazamiento angular puede variar. Si el objeto rígido gira rápidamente, este desplazamiento puede ocurrir en un intervalo breve de tiempo. Si da vueltas lentamente, este desplazamiento se presenta en un intervalo de tiempo más largo. Estas diferentes relaciones de rotación se cuantifican al definir la **rapidez angular promedio** ω_{prom} (letra griega omega) como la relación del desplazamiento angular de un objeto rígido al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el desplazamiento:

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{10.2}$$

En analogía con la rapidez lineal, la **rapidez angular instantánea** ω se define como el límite de la rapidez angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

La rapidez angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que se pueden escribir como s^{-1} porque los radianes son adimensionales. ω se considera positiva cuando θ aumenta (movimiento contra las manecillas del reloj en la figura 10.2) y negativa cuando θ disminuye (en sentido de las manecillas del reloj en la figura 10.2).

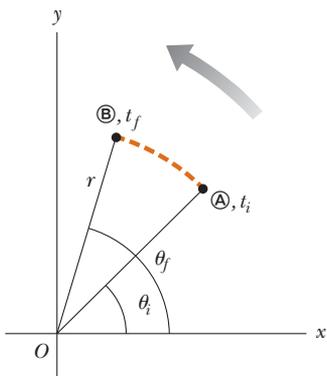


Figura 10.2 Una partícula sobre un objeto rígido en rotación se mueve de \textcircled{A} a \textcircled{B} a lo largo del arco de un círculo. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, la línea radial de longitud r se mueve a través de un desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

Rapidez angular promedio ▶

Rapidez angular instantánea ▶

Pregunta rápida 10.1 Un objeto rígido da vueltas en un sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a un eje fijo. Cada uno de los siguientes pares de cantidades representa una posición angular inicial y una posición angular final del objeto rígido. **i)** ¿Cuál de los conjuntos *sólo* puede ocurrir si el objeto rígido da vueltas a través de más de 180° ? a) 3 rad, 6 rad, b) -1 rad, 1 rad, c) 1 rad, 5 rad. **ii)** Suponga que el cambio en posición angular para cada uno de estos pares de valores se presenta en 1 s. ¿Cuál opción representa la rapidez angular promedio más baja?

Si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt , el objeto tiene una aceleración angular. La **aceleración angular promedio** α_{prom} (letra griega alfa) de un objeto rígido en rotación se define como la relación de cambio en la rapidez angular respecto al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el cambio en la rapidez angular:

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (10.4)$$

En analogía con la aceleración lineal, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (10.5)$$

La aceleración angular tiene unidades de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2), o simplemente s^{-2} . Note que α es positivo cuando un objeto rígido que gira contra las manecillas del reloj aumenta su velocidad o cuando un objeto rígido que gira en sentido de las manecillas del reloj disminuye su velocidad durante cierto intervalo de tiempo.

Cuando un objeto rígido en rotación respecto a un eje *fijo*, **cada partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo determinado y tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular**. Es decir, las cantidades θ , ω y α caracterizan el movimiento rotacional de todo el objeto rígido así como las partículas individuales en el objeto.

La posición angular (θ), la rapidez angular (ω) y la aceleración angular (α) son análogas a la posición traslacional (x), la rapidez traslacional (v) y la aceleración traslacional (a). Las variables θ , ω y α difieren dimensionalmente de las variables x , v y a sólo por un factor que tiene la unidad de longitud. (Vea la sección 10.3.)

No se especificó dirección alguna para la rapidez angular y la aceleración angular. Estrictamente hablando, ω y α son las magnitudes de los vectores velocidad angular y aceleración angular¹ $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$, respectivamente, y siempre deben ser positivos. No obstante, porque se considera rotación respecto a un eje fijo, se puede usar notación no vectorial e indicar las direcciones de los vectores al asignar un signo positivo o negativo a ω y α como se explicó anteriormente respecto de las ecuaciones 10.3 y 10.5. Para rotación respecto a un eje fijo, la única dirección que especifica el movimiento rotacional es la dirección a lo largo del eje de rotación. Por lo tanto, las direcciones de $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son a lo largo de este eje. Si una partícula da vueltas en el plano xy como en la figura 10.2, la dirección de $\vec{\omega}$ para la partícula es afuera del plano del diagrama cuando la rotación es contraria a las manecillas del reloj y hacia el plano del diagrama cuando la rotación es en sentido de las manecillas del reloj. Para ilustrar esta convención, es apropiado usar la *regla de la mano derecha* que se demuestra en la figura 10.3. Cuando los cuatro dedos de la mano derecha se enrollan en la dirección de rotación, el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de $\vec{\omega}$. La dirección de $\vec{\alpha}$ se sigue de su definición $\vec{\alpha} \equiv d\vec{\omega}/dt$. Está en la misma dirección de $\vec{\omega}$ si la rapidez angular aumenta en el tiempo, y es antiparalela a $\vec{\omega}$ si la rapidez angular disminuye en el tiempo.

¹ Aunque no se verificó en este caso, la velocidad angular instantánea y la aceleración angular instantánea son cantidades vectoriales, pero los correspondientes valores promedio no lo son porque los desplazamientos no se suman como cantidades vectoriales para rotaciones finitas.

◀ Aceleración angular promedio

◀ Aceleración angular instantánea

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.2

Especifique su eje

Al resolver problemas de rotación, debe especificar un eje de rotación. Esta nueva característica no existe en el estudio del movimiento traslacional. La elección es arbitraria, pero una vez que la hace, debe mantener dicha elección sin ceder en todo el problema. En algunos problemas, la situación física sugiere un eje natural, como el centro de la rueda de un automóvil. En otros problemas, puede no haber una opción obvia, y debe ejercitar su juicio.

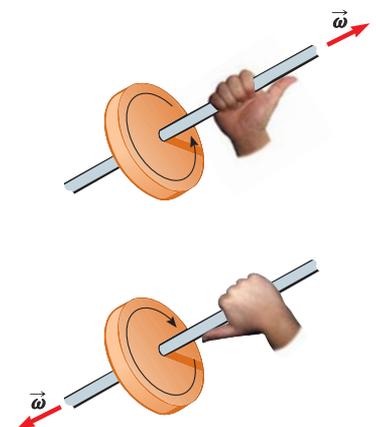


Figura 10.3 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular.

10.2 Cinemática rotacional: Objeto rígido bajo aceleración angular constante

Cuando un objeto rígido da vueltas respecto a un eje fijo, con frecuencia se somete a una aceleración angular constante. Por lo tanto, se genera un nuevo modelo de análisis para movimiento rotacional llamado **objeto rígido bajo aceleración angular constante**. Este modelo es el análogo rotacional del modelo de partícula bajo aceleración constante. En esta sección se desarrollan las correspondencias cinemáticas para este modelo. Al escribir la ecuación 10.5 en la forma $d\omega = \alpha dt$ e integrar desde $t_i = 0$ hasta $t_f = t$ se obtiene

Ecuaciones cinemáticas rotacionales ▶

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.6)$$

donde ω_i es la rapidez angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.6 permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto en cualquier tiempo posterior t . Al sustituir la ecuación 10.6 en la ecuación 10.3 e integrar una vez más, se obtiene

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.3

¿Tal como la traslación?

Las ecuaciones 10.6 a la 10.9 y la tabla 10.1 sugieren que la cinemática rotacional es tal como la cinemática traslacional. Esto es casi cierto, con dos diferencias clave. 1) En la cinemática rotacional, debe especificar un eje de rotación (ver Prevención de riesgos ocultos 10.2). 2) En movimiento rotacional, el objeto regresa a su orientación original; por lo tanto, se le puede preguntar el número de revoluciones hecho por un objeto rígido. Este concepto no tiene significado en el movimiento traslacional.

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.7)$$

donde θ_i es la posición angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.7 permite encontrar la posición angular θ_f del objeto en cualquier tiempo posterior t . Al eliminar t de las ecuaciones 10.6 y 10.7 se obtiene

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.8)$$

Esta ecuación permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto rígido para cualquier valor de su posición angular θ_f . Si se elimina α entre las ecuaciones 10.6 y 10.7, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.9)$$

Note que estas expresiones cinemáticas para el objeto rígido bajo aceleración angular constante son de la misma forma matemática que para una partícula bajo aceleración constante (capítulo 2). Se generan a partir de las ecuaciones para movimiento traslacional al hacer las sustituciones $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$ y $a \rightarrow \alpha$. La tabla 10.1 compara las ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional.

Pregunta rápida 10.2 Considere de nuevo los pares de posiciones angulares para el objeto rígido de la pregunta rápida 10.1. Si el objeto parte del reposo en la posición angular inicial, se mueve contra las manecillas del reloj con aceleración angular constante y llega a la posición angular final con la misma rapidez angular en los tres casos, ¿para cuál opción la aceleración angular es la más alta?

TABLA 10.1

Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional bajo aceleración constante	
Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2$
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

EJEMPLO 10.1 Rueda en rotación

Una rueda da vueltas con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2 .

A) Si la rapidez angular de la rueda es 2.00 rad/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento angular da vueltas la rueda en 2.00 s ?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 10.1. Imagine que el disco compacto se mueve con su rapidez angular que crece en una relación constante. El cronómetro se inicia cuando el disco en rotación a 2.00 rad/s . Esta imagen mental es un modelo para el movimiento de la rueda en este ejemplo.

Categorizar La frase “con aceleración angular constante” dice que se use el modelo de objeto rígido bajo aceleración constante.

Analizar Ordene la ecuación 10.7 de modo que exprese el desplazamiento angular del objeto:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}at^2$$

Sustituya los valores conocidos para encontrar el desplazamiento angular en $t = 2.00 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= (2.00 \text{ rad/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 \\ &= \mathbf{11.0 \text{ rad}} = (11.0 \text{ rad})(57.3^\circ/\text{rad}) = \mathbf{630^\circ}\end{aligned}$$

B) ¿Cuántas revoluciones dio la rueda durante este intervalo de tiempo?

SOLUCIÓN

Multiplique el desplazamiento que encontró en el inciso A) por un factor de conversión para encontrar el número de revoluciones:

$$\Delta\theta = 630^\circ \left(\frac{1 \text{ rev}}{360^\circ} \right) = \mathbf{1.75 \text{ rev}}$$

C) ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda en $t = 2.00 \text{ s}$?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.6 para encontrar la rapidez angular en $t = 2.00 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i + at = 2.00 \text{ rad/s} + (3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s}) \\ &= \mathbf{9.00 \text{ rad/s}}\end{aligned}$$

Finalizar También se podría obtener este resultado con la ecuación 10.8 y los resultados del inciso A). (¡Inténtelo!)

¿Qué pasaría si? Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 . Si la velocidad de la partícula es 2.00 m/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento se mueve la partícula en 2.00 s ? ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 2.00 \text{ s}$?

Respuesta Advierta que estas preguntas son análogos traslacionales a los incisos A) y C) del problema original. La solución matemática sigue exactamente la misma forma. Para el desplazamiento,

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= (2.00 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.50 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 = 11.0 \text{ m}\end{aligned}$$

y para la velocidad

$$v_f = v_i + at = 2.00 \text{ m/s} + (3.50 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 9.00 \text{ m/s}$$

No hay análogo traslacional a la parte B) porque el movimiento traslacional bajo aceleración constante no es repetitivo.

10.3 Cantidades angulares y traslacionales

De esta sección se deducen algunas relaciones útiles entre la rapidez y la aceleración angulares de un objeto rígido en rotación y la rapidez y la aceleración traslacionales de un punto en el objeto. Para hacerlo, debe tener en mente que, cuando un objeto rígido

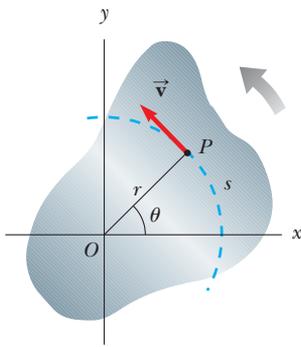


Figura 10.4 A medida que un objeto rígido da vueltas en torno al eje fijo a través de O , el punto P tiene una velocidad tangencial \vec{v} que siempre es tangente a la trayectoria circular de radio r .

da vueltas respecto a un eje fijo, como en la figura 10.4, **toda partícula del objeto se mueve en un círculo cuyo centro está en el eje de rotación.**

Ya que el punto P en la figura 10.4 se mueve en un círculo, el vector velocidad traslacional \vec{v} siempre es tangente a la trayectoria circular y por ende se llama *velocidad tangencial*. La magnitud de la velocidad tangencial del punto P es por definición la rapidez tangencial $v = ds/dt$, donde s es la distancia que recorre este punto medida a lo largo de la trayectoria circular. Al recordar que $s = r\theta$ (ecuación 10.1a) y notar que r es constante, se obtiene

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que $d\theta/dt = \omega$ (vea la ecuación 10.3), se sigue que

$$v = r\omega \tag{10.10}$$

Es decir, la rapidez tangencial de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular de dicho punto desde el eje de rotación, multiplicada por la rapidez angular. En consecuencia, aunque cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez *angular*, no todo punto tiene la misma rapidez *tangencial* porque r no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto. La ecuación 10.10 muestra que la rapidez tangencial de un punto sobre el objeto en rotación aumenta a medida que uno se mueve alejándose del centro de rotación, como se esperaría por intuición. Por ejemplo, el extremo exterior de un palo de golf que se balancea se mueve mucho más rápido que el mango.

La aceleración angular del objeto rígido en rotación se puede relacionar con la aceleración tangencial del punto P al tomar la derivada en el tiempo de v :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha \tag{10.11}$$

Es decir, la componente tangencial de la aceleración traslacional de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular del punto desde el eje de rotación, multiplicada por la aceleración angular.

En la sección 4.4 se encontró que un punto que se mueve en una trayectoria circular se somete a una aceleración radial a_r , dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta v^2/r (figura 10.5). Ya que $v = r\omega$ para un punto P en un objeto en rotación, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular como

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{10.12}$$

El vector aceleración total en el punto es $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$, donde la magnitud de \vec{a} , es la aceleración centrípeta a_c . Ya que \vec{a} es un vector que tiene una componente radial y una componente tangencial, la magnitud de \vec{a} en el punto P sobre el objeto rígido en rotación es

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{10.13}$$

Relación entre aceleración tangencial y angular

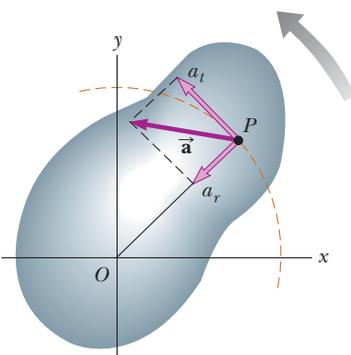


Figura 10.5 A medida que un objeto rígido gira respecto a un eje fijo a través de O , el punto P experimenta una componente tangencial de aceleración traslacional a_t y una componente radial de aceleración traslacional a_r . La aceleración traslacional de este punto es $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$.

Pregunta rápida 10.3 Alex y Brian viajan en un carrusel. Alex viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Brian, quien viaja en un caballo interior. **i)** Cuando el carrusel en rotación a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Alex? a) el doble de la de Brian, b) la misma que la de Brian, c) la mitad de la de Brian, d) imposible de determinar. **ii)** Cuando el carrusel en rotación con una rapidez angular constante, describa la rapidez tangencial de Alex con la misma lista de opciones.

EJEMPLO 10.2

Reproductor de CD

En un disco compacto (figura 10.6), la información de audio se almacena digitalmente en una serie de depresiones (pits) y áreas planas en la superficie del disco. Las alternaciones entre depresiones y áreas planas sobre la superficie representan unos y ceros binarios a leer por el reproductor de CD y convertir de regreso en ondas sonoras. Las depresiones y áreas planas se detectan mediante un sistema que consiste de un láser y lentes. La longitud de una cadena de unos y ceros que representa una porción de información es la misma en cualquier parte del disco, ya sea que la información esté cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior. De modo que, para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema láser–lente en el mismo intervalo de tiempo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la posición del lente debe ser constante. De acuerdo con la ecuación 10.10, la rapidez angular debe variar a medida que el sistema láser–lente se mueve radialmente a lo largo del disco. En un reproductor de CD común, la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema láser–lente es 1.3 m/s.

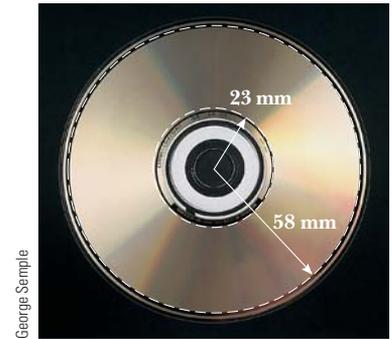


Figura 10.6 (Ejemplo 10.2) Disco compacto.

A) Encuentre la rapidez angular del disco en revoluciones por minuto cuando la información se lee desde la primera pista más interna ($r = 23 \text{ mm}$) y la pista final más externa ($r = 58 \text{ mm}$).

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.6 muestra una fotografía de un disco compacto. Recorra con su dedo el círculo marcado “23 mm” en un intervalo de tiempo de aproximadamente 3 s. Ahora recorra con su dedo el círculo marcado “58 mm” en el mismo intervalo de tiempo. Advierta cuán rápido se mueve su dedo en relación con la página alrededor del círculo más grande. Si su dedo representa el láser que lee el disco, se mueve sobre la superficie del disco mucho más rápido en el círculo exterior que en el círculo interior.

Categorizar Esta parte del ejemplo se clasifica como un simple problema de sustitución. En partes posteriores, se necesitará para identificar modelos de análisis.

Aplique la ecuación 10.10 para encontrar la rapidez angular que da la rapidez tangencial requerida en la posición de la pista interna:

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{v}{r_i} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{2.3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 57 \text{ rad/s} \\ &= (57 \text{ rad/s}) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 5.4 \times 10^2 \text{ rev/min}\end{aligned}$$

Haga lo mismo para la pista exterior:

$$\omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{5.8 \times 10^{-2} \text{ m}} = 22 \text{ rad/s} = 2.1 \times 10^2 \text{ rev/min}$$

El reproductor de CD ajusta la rapidez angular ω del disco dentro de este intervalo de modo que la información se mueve por el lente objetivo en una relación constante.

B) El máximo tiempo de reproducción de un disco de música estándar es 74 min y 33 s. ¿Cuántas revoluciones realiza el disco durante dicho tiempo?

SOLUCIÓN

Categorizar Del inciso A), la rapidez angular disminuye a medida que el disco se reproduce. Suponga que disminuye de manera estable, con α constante. Por lo tanto se puede usar el modelo de objeto rígido bajo aceleración angular constante.

Analizar Si $t = 0$ es el instante cuando el disco comienza su rotación, con rapidez angular de 57 rad/s, el valor final del tiempo t es $(74 \text{ min})(60 \text{ s/min}) + 33 \text{ s} = 4\,473 \text{ s}$. Se busca el desplazamiento angular $\Delta\theta$ durante este intervalo de tiempo.

Aplique la ecuación 10.9 para encontrar el desplazamiento angular del disco en $t = 4\,473 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \theta_f - \theta_i = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \\ &= \frac{1}{2}(57 \text{ rad/s} + 22 \text{ rad/s})(4\,473 \text{ s}) = 1.8 \times 10^5 \text{ rad}\end{aligned}$$

Convierta este desplazamiento angular a revoluciones:

$$\Delta\theta = (1.8 \times 10^5 \text{ rad}) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 2.8 \times 10^4 \text{ rev}$$

C) ¿Cuál es la aceleración angular del disco compacto sobre el intervalo de tiempo de 4 473 s?

SOLUCIÓN

Categorizar De nuevo modele el disco como un objeto rígido bajo aceleración angular constante. En este caso, la ecuación 10.6 da el valor de la aceleración angular constante. Otra aproximación es usar la ecuación 10.4 para encontrar la aceleración angular promedio. En este caso, no se supone que la aceleración angular sea constante. La respuesta es la misma de ambas ecuaciones; sólo la interpretación del resultado es diferente.

Analizar Use la ecuación 10.6 para encontrar la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22 \text{ rad/s} - 57 \text{ rad/s}}{4\,473 \text{ s}} = -7.8 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

Finalizar El disco experimenta una disminución muy gradual en su rapidez de rotación, como se espera del largo intervalo de tiempo requerido para que la rapidez angular cambie del valor inicial al valor final. En realidad, la aceleración angular del disco no es constante. El problema 20 le permite explorar el comportamiento del tiempo real de la aceleración angular.

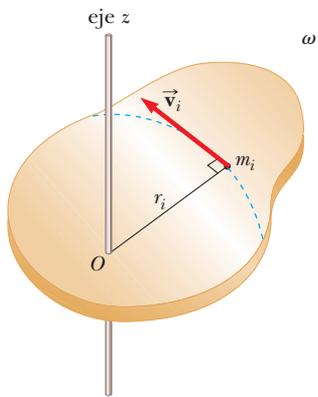


Figura 10.7 Un objeto rígido en rotación en torno al eje z con rapidez angular ω . La energía cinética de la partícula de masa m_i es $\frac{1}{2}m_iv_i^2$. La energía cinética total del objeto se llama energía cinética rotacional.

10.4 Energía cinética rotacional

En el capítulo 7 se definió la energía cinética de un objeto como la energía asociada con su movimiento a través del espacio. Un objeto rotatorio en torno a un eje fijo permanece estacionario en el espacio, así que no hay energía cinética asociada con el movimiento traslacional. No obstante, las partículas individuales que conforman el objeto en rotación se mueven a través del espacio; siguen trayectorias circulares. En consecuencia, con el movimiento rotacional hay energía cinética asociada.

Considere un objeto como un conjunto de partículas y suponga que da vueltas en torno a un eje fijo z con una rapidez angular ω . La figura 10.7 muestra al objeto en rotación e identifica una partícula sobre el objeto ubicada a una distancia r_i del eje de rotación. Si la masa de la i -ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i , su energía cinética es

$$K_i = \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

Para continuar, recuerde que aunque cada partícula en el objeto rígido tiene la misma rapidez angular ω , las magnitudes de velocidad tangenciales individuales dependen de la distancia r_i desde el eje de rotación de acuerdo con la ecuación 10.10. La energía cinética *total* del objeto rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_ir_i^2\omega^2$$

Esta expresión se puede escribir en la forma

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_ir_i^2 \right) \omega^2 \tag{10.14}$$

donde ω^2 se factorizó de la suma porque es común a toda partícula. Esta expresión se simplifica al definir la cantidad entre paréntesis como el **momento de inercia I**:

Momento de inercia ▶

$$I \equiv \sum_i m_ir_i^2 \tag{10.15}$$

De la definición de momento de inercia,² se ve que tiene dimensiones de ML^2 ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$ en unidades del SI). Con esta notación, la ecuación 10.14 se convierte

Energía cinética rotacional ▶

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{10.16}$$

Aunque comúnmente la cantidad $\frac{1}{2}I\omega^2$ se refiere como **energía cinética rotacional**, no es una forma nueva de energía. Es energía cinética ordinaria porque se deduce de una suma

² Los ingenieros civiles usan el momento de inercia para caracterizar las propiedades elásticas (rigidez) de estructuras tales como las vigas de carga. En consecuencia, con frecuencia es útil incluso en un contexto no rotacional.

sobre energías cinéticas individuales de las partículas contenidas en el objeto rígido. La forma matemática de la energía cinética conocida por la ecuación 10.16 es conveniente cuando se trata con movimiento rotacional, siempre que se sepa cómo calcular I .

Es importante reconocer la analogía entre la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ asociada con el movimiento traslacional y la energía cinética rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$. Las cantidades I y ω en el movimiento rotacional son análogas a m y v en el movimiento traslacional, respectivamente. (De hecho, I toma el lugar de m y ω toma el lugar de v cada vez que se compara una ecuación de movimiento traslacional con su contraparte rotacional.) El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a cambios en su movimiento rotacional, tal como la masa es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento traslacional.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.4

No hay un solo momento de inercia

Existe una gran diferencia entre masa y momento de inercia. La masa es una propiedad inherente de un objeto. El momento de inercia de un objeto depende de su elección del eje de rotación. Por lo tanto, no hay un solo valor del momento de inercia para un objeto. Existe un valor *mínimo* del momento de inercia, que es el calculado en torno a un eje que pasa a través del centro de masa del objeto.

EJEMPLO 10.3 Cuatro objetos en rotación

Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano xy (figura 10.8). Se supondrá que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

A) Si el sistema da vueltas en torno al eje y (figura 10.8a) con una rapidez angular ω , encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.8 es una representación gráfica que ayuda a formar ideas del sistema de esferas y cómo gira.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución porque es una aplicación directa de las definiciones analizadas en esta sección.

Aplice la ecuación 10.15 al sistema:

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.16:

Que las dos esferas de masa m no entren en este resultado tiene sentido, porque no tienen movimiento en torno al eje de rotación; por tanto, no tienen energía cinética rotacional. Por similitud, se espera que el momento de inercia en torno al eje x sea $I_x = 2mb^2$ con una energía cinética rotacional en torno a dicho eje de $K_R = mb^2\omega^2$.

B) Suponga que el sistema da vueltas en el plano xy en torno a un eje (el eje z) a través de O (figura 10.8b). Calcule el momento de inercia y la energía cinética rotacional en torno a este eje.

SOLUCIÓN

Aplice la ecuación 10.15 a este nuevo eje de rotación:

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.16:

Al comparar los resultados de los incisos A) y B), se concluye que el momento de inercia y, por lo tanto, la energía cinética rotacional asociada con una rapidez angular dada depende del eje de rotación. En la parte B) se espera que el resultado incluya las cuatro esferas y distancias porque las cuatro esferas están girando en el plano xy . En función del teorema trabajo-energía cinética, el que la energía cinética rotacional del inciso A) sea menor que la del inciso B) indica que requeriría menos trabajo poner el sistema en rotación en torno al eje y que en torno al eje z .

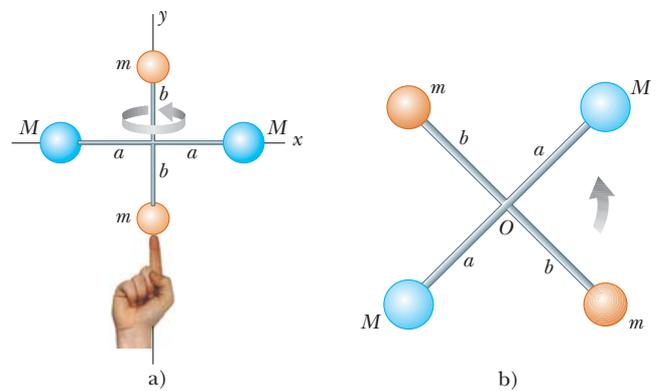


Figura 10.8 (Ejemplo 10.3) Cuatro esferas forman un bastón inusual. a) El bastón rota en torno al eje y . b) El bastón rota en torno al eje z .

$$I_y = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}I_y\omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2)\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_R = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}(2Ma^2 + 2mb^2)\omega^2 = (Ma^2 + mb^2)\omega^2$$

¿Qué pasaría si? ¿Y si la masa M es mucho mayor que m ? ¿Cómo se comparan las respuestas a los incisos A) y B)?

Respuesta Si $M \gg m$, en tal caso m se puede despreciar y el momento de inercia y la energía cinética rotacional en el inciso B) se vuelven

$$I_z = 2Ma^2 \quad \text{y} \quad K_R = Ma^2\omega^2$$

que son lo mismo que las respuestas en el inciso A). Si las masas m de las dos esferas anaranjadas en la figura 10.8 son despreciables, dichas esferas se pueden retirar de la figura y las rotaciones en torno a los ejes y y z son equivalentes.

10.5 Cálculo de momentos de inercia

El momento de inercia de un objeto extendido se evalúa al considerar el objeto dividido en muchos elementos pequeños, cada uno de los cuales tiene masa Δm_i . Se usa la definición $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ y se toma el límite de esta suma a medida que $\Delta m_i \rightarrow 0$. En este límite, la suma se convierte en una integral sobre el volumen del objeto:

Momento de inercia de un objeto rígido ▶

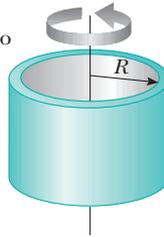
$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \quad (10.17)$$

Por lo común es más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen de los elementos en lugar de su masa, y es fácil hacer dicho cambio al usar la ecuación 1.1,

TABLA 10.2

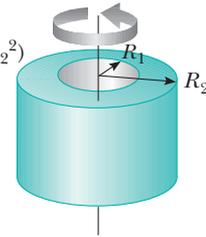
Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías

Aro o cascarón cilíndrico delgado
 $I_{CM} = MR^2$

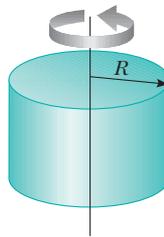


Cilindro hueco

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$

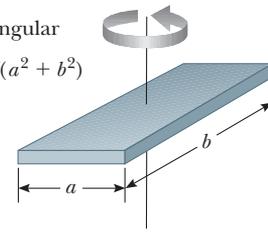


Cilindro sólido o disco
 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$



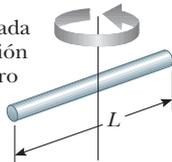
Placa rectangular

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



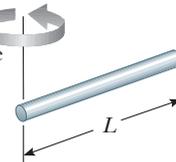
Barra larga delgada con eje de rotación a través del centro

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$

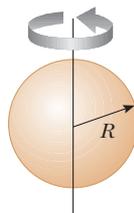


Barra larga delgada con eje de rotación a través de un extremo

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

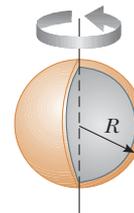


Esfera sólida
 $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$



Cascarón esférico delgado

$$I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$$



$\rho \equiv m/V$, donde ρ es la densidad del objeto y V su volumen. De esta ecuación, la masa de un pequeño elemento es $dm = \rho dV$. Al sustituir este resultado en la ecuación 10.17 se obtiene

$$I = \int \rho r^2 dV$$

Si el objeto es homogéneo, ρ es constante y la integral se puede evaluar para una geometría conocida. Si ρ no es constante, se debe conocer su variación con la posición para completar la integración.

La densidad conocida por $\rho = m/V$ a veces se conoce como *densidad de masa volumétrica* porque representa masa por unidad de volumen. Con frecuencia se usan otras formas de expresar la densidad. Por ejemplo, cuando se trata con una hoja de grosor uniforme t , se puede definir una *densidad de masa superficial* $\sigma = \rho t$, que representa *masa por unidad de área*. Por último, cuando la masa se distribuye a lo largo de una barra de área de sección transversal uniforme A , a veces se usa la *densidad de masas lineal* $\lambda = M/L = \rho A$, que es la *masa por unidad de longitud*.

La tabla 10.2 proporciona los momentos de inercia para algunos objetos respecto a ejes específicos. Los momentos de inercia de objetos rígidos con geometría simple (gran simetría) son relativamente fáciles de calcular siempre que el eje de rotación coincida con un eje de simetría, como en los ejemplos siguientes.

Pregunta rápida 10.4 Una sección de tubería hueca y un cilindro sólido tienen los mismos radio, masa y longitud. Ambos dan vueltas en torno a su largo eje central con la misma rapidez angular. ¿Cuál objeto tiene la mayor energía cinética rotacional? a) La tubería hueca. b) El cilindro sólido. c) Tienen la misma energía cinética rotacional. d) Es imposible de determinar.

EJEMPLO 10.4 Barra rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud L y masa M (figura 10.9) en torno a un eje perpendicular a la barra (el eje y) y que pasa a través de su centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que con sus dedos hace girar la barra de la figura 10.9 en torno a su punto medio. Si tiene una regleta a la mano, úsela para simular el giro de una barra delgada.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, que usa la definición de momento de inercia en la ecuación 10.17. Como con cualquier problema de cálculo, la solución supone reducir el integrando a una sola variable.

El elemento de longitud sombreado dx en la figura 10.9 tiene una masa dm igual a la masa por unidad de longitud λ multiplicada por dx .

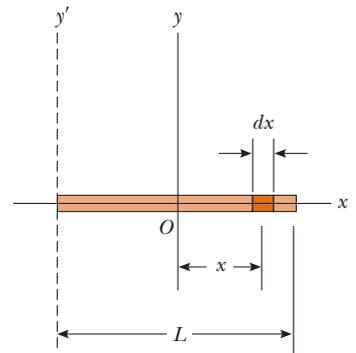


Figura 10.9 (Ejemplo 10.4) Barra rígida uniforme de longitud L . El momento de inercia en torno al eje y es menor que en el eje y' . Este último eje se examina en el ejemplo 10.6.

Expresa dm en términos de dx :

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.17 con $r^2 = x^2$:

$$\begin{aligned} I_y &= \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \\ &= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2 \end{aligned}$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

EJEMPLO 10.5 Cilindro sólido uniforme

Un cilindro sólido uniforme tiene un radio R , masa M y longitud L . Calcule su momento de inercia en torno a su eje central (el eje z en la figura 10.10).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Para simular esta situación, imagine que hace girar una lata de jugo congelado en torno a su eje central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, con el uso de la definición de momento de inercia. Como con el ejemplo 10.4, se debe reducir el integrando a una sola variable.

Es conveniente dividir el cilindro en muchos cascarones cilíndricos, cada uno con radio r , grosor dr y longitud L , como se muestra en la figura 10.10. La densidad del cilindro es ρ . El volumen dV de cada cascarón es su área de sección transversal multiplicada por su longitud: $dV = L dA = L(2\pi r) dr$.

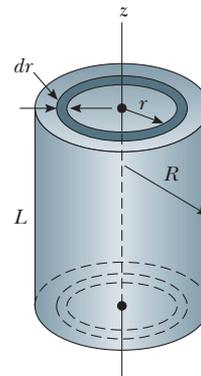


Figura 10.10 (Ejemplo 10.5) Cálculo de I en torno al eje z para un cilindro sólido uniforme.

Expresa dm en términos de dr :

$$dm = \rho dV = 2\pi\rho Lr dr$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.17:

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 (2\pi\rho Lr dr) = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho LR^4$$

Use el volumen total $\pi R^2 L$ del cilindro para expresar su densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

Sustituya este valor en la expresión para I_z :

$$I_z = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{M}{\pi R^2 L} \right) LR^4 = \frac{1}{2}MR^2$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

¿Qué pasaría si? ¿Qué pasa si la longitud del cilindro en la figura 10.10 aumenta a $2L$, mientras la masa M y el radio R se mantienen fijos? ¿Cómo cambia el momento de inercia del cilindro?

Respuesta Observe que el resultado para el momento de inercia de un cilindro no depende de L , la longitud del cilindro. Se aplica igualmente bien a un largo cilindro y a un disco plano que tengan los mismos masa M y radio R . Debido a eso, el momento de inercia del cilindro no sería afectado por cambiar su longitud.

El cálculo de momentos de inercia de un objeto en torno a un eje arbitrario puede ser complicado, incluso para un objeto considerablemente simétrico. Por fortuna, el uso de un importante teorema, llamado **teorema de ejes paralelos**, con frecuencia simplifica el cálculo.

Para generar el teorema de ejes paralelos, suponga que un objeto da vueltas en torno al eje z , como se muestra en la figura 10.11. El momento de inercia no depende de cómo se distribuye la masa a lo largo del eje z ; como se encontró en el ejemplo 10.5, el momento de inercia de un cilindro es independiente de su longitud. Imagine colapsar el objeto tridimensional en un objeto plano como en la figura 10.11b. En este proceso imaginario, toda la masa se mueve paralela al eje z hasta que se encuentra en el plano xy . Las coordenadas del centro de masa del objeto ahora son x_{CM}, y_{CM} y $z_{CM} = 0$. Sea el elemento de masa dm que tiene coordenadas $(x, y, 0)$. Ya que este elemento está a una distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del eje z , el momento de inercia en torno al eje z es

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

Se pueden relacionar las coordenadas x, y del elemento de masa dm a las coordenadas de este mismo elemento ubicadas en un sistema coordenado que tenga el centro de masa del objeto como su origen. Si las coordenadas del centro de masa son x_{CM}, y_{CM} y $z_{CM} = 0$

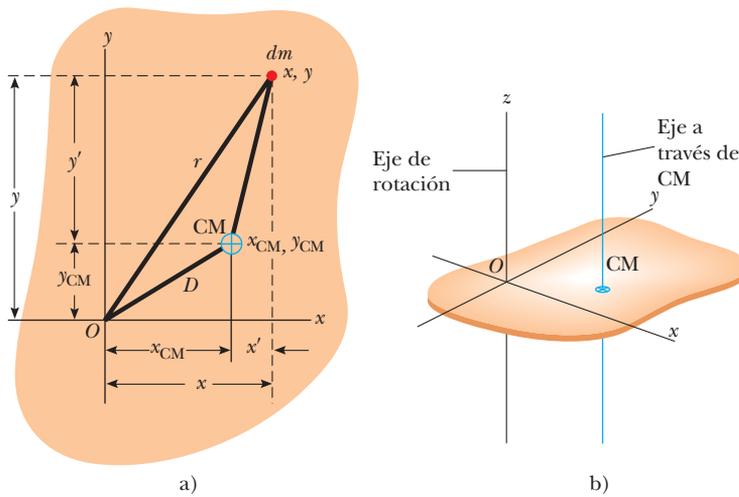


Figura 10.11 a) Teorema de ejes paralelos. Si el momento de inercia en torno a un eje perpendicular a la figura a través del centro de masa es I_{CM} , el momento de inercia en torno al eje z es $I_z = I_{CM} + MD^2$. b) Dibujo en perspectiva que muestra el eje z (el eje de rotación) y el eje paralelo a través del centro de masa.

en el sistema coordenado original con centro en O , se ve en la figura 10.11a que las correspondencias entre las coordenadas no primas y primas son $x = x' + x_{CM}$, $y = y' + y_{CM}$, $y z = z' = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 I &= \int [(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2] dm \\
 &= \int [(x')^2 + (y')^2] dm + 2x_{CM} \int x' dm + 2y_{CM} \int y' dm + (x_{CM}^2 + y_{CM}^2) \int dm
 \end{aligned}$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia I_{CM} en torno a un eje que es paralelo al eje zy y pasa a través del centro de masa. Las segundas dos integrales son cero porque, por definición del centro de masa, $\int x' dm = \int y' dm = 0$. La última integral es simplemente MD^2 porque $\int dm = M$ y $D^2 = x_{CM}^2 + y_{CM}^2$. En consecuencia, se concluye que

$$\boxed{I = I_{CM} + MD^2} \tag{10.18} \quad \blacktriangleleft \text{Teorema de ejes paralelos}$$

EJEMPLO 10.6 **Aplicación del teorema de ejes paralelos**

Considere una vez más la barra rígida uniforme de masa M y longitud L que se muestra en la figura 10.9. Encuentre el momento de inercia de la barra en torno a un eje perpendicular a la barra a través de un extremo (el eje y' en la figura 10.9).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que hace girar la barra en torno al punto final en lugar de hacerlo en el punto medio. Si tiene una regleta a la mano, inténtelo y note el grado de dificultad al girarlo alrededor del extremo en comparación con girarlo alrededor del centro.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, que supone el teorema de ejes paralelos.

Por intuición, se espera que el momento de inercia sea mayor que el resultado $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ del ejemplo 10.4 porque hay masa hasta una distancia L lejos del eje de rotación, mientras que la distancia más lejana en el ejemplo 10.4 fue sólo $L/2$. La distancia entre el eje del centro de masa y el eje y' es $D = L/2$.

Use el teorema de ejes paralelos:

$$I = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{3}ML^2}$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

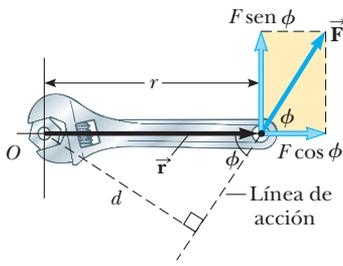


Figura 10.12 La fuerza \vec{F} tiene una mayor tendencia de rotación en torno a un eje a través de O a medida que F aumenta y a medida que el brazo de momento d aumenta. La componente $F \text{ sen } \phi$ tiende a dar vueltas a la llave en torno a O .

10.6 Momento de torsión

Imagine que intenta dar vuelta una puerta y aplica una fuerza de magnitud F , perpendicular a la superficie de la puerta cerca de las bisagras y luego en diferentes distancias desde las bisagras. Usted logrará una relación de rotación más rápida para la puerta al aplicar la fuerza cerca de la perilla que al aplicarla cerca de las bisagras.

Cuando se ejerce una fuerza en un objeto rígido que se articula en torno a un eje, el objeto tiende a dar vuelta en torno a dicho eje. La tendencia de una fuerza a dar vuelta un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada **momento de torsión** $\vec{\tau}$ (letra griega tau). El momento de torsión es un vector, pero aquí sólo se considerará su magnitud y en el capítulo 11 se explorará su naturaleza vectorial.

Considere la llave de la figura 10.12 que se quiere dar vuelta en torno a un eje perpendicular a la página y a través del centro del tornillo. La fuerza aplicada \vec{F} actúa a un ángulo ϕ con la horizontal. La magnitud del momento de torsión asociada con la fuerza \vec{F} se define mediante la expresión

$$\tau \equiv rF \text{ sen } \phi = Fd \tag{10.19}$$

donde r es la distancia entre el eje de rotación y el punto de aplicación de \vec{F} y d es la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de \vec{F} . (La *línea de acción* de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende hacia ambos extremos del vector que representa la fuerza. La línea discontinua que se extiende desde la cola de \vec{F} en la figura 10.12 es parte de la línea de acción de \vec{F} .) A partir del triángulo recto de la figura 10.12 que tiene la llave como su hipotenusa, se ve que $d = r \text{ sen } \phi$. La cantidad d se llama **brazo de momento** (o *brazo de palanca*) de \vec{F} .

En la figura 10.12, la única componente de \vec{F} que tiende a causar rotación de la llave en torno a un eje a través de O es $F \text{ sen } \phi$, la componente perpendicular a la línea dibujada desde el eje de rotación hacia el punto de aplicación de la fuerza. La componente horizontal $F \text{ cos } \phi$, dado que su línea de acción pasa a través de O , no tiene tendencia a producir rotación en torno a un eje que pase a través de O . De la definición de momento de torsión, la tendencia a la rotación aumenta a medida que F aumenta y a medida que d aumenta, lo que explica por qué es más fácil dar vuelta a una puerta si se empuja por la perilla en lugar de hacerlo en un punto cerca de las bisagras. También podemos aplicar un empujón casi perpendicular a la puerta, tanto como sea posible, de tal modo que ϕ esté cerca de 90° . Empujar de manera lateral en la perilla de la puerta ($\phi = 0$) no causará que ésta dé vuelta.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura 10.13, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O . En este ejemplo, \vec{F}_2 el objeto tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj y \vec{F}_1 tiende a dar vuelta contra las manecillas del reloj. Se usa la convención de que el signo del momento de torsión que resulta de una fuerza es positivo si la tendencia a girar de la fuerza es contra las manecillas del reloj y negativo si la tendencia a girar es en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, en la figura 10.13, el momento de torsión resultante de \vec{F}_1 , que tiene un brazo de momento d_1 , es positivo e igual a $+F_1d_1$; el momento de torsión de \vec{F}_2 es negativo e igual a $-F_2d_2$. En consecuencia, el momento de torsión *neto* en torno a un eje a través de O es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1d_1 - F_2d_2$$

No se debe confundir el momento de torsión con la fuerza. Las fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento traslacional, como se describió mediante la segunda ley de Newton. Las fuerzas también pueden causar un cambio en el movimiento rotacional, pero la efectividad de las fuerzas en causar este cambio depende tanto de las magnitudes de las fuerzas como de los brazos de momento de las fuerzas, en la combinación que se llama *momento de torsión*. El momento de torsión tiene unidades de fuerza por longitud (newton metros en unidades del SI) y se debe reportar en estas unidades. No confunda momento de torsión y trabajo, que tiene las mismas unidades pero son conceptos muy diferentes.

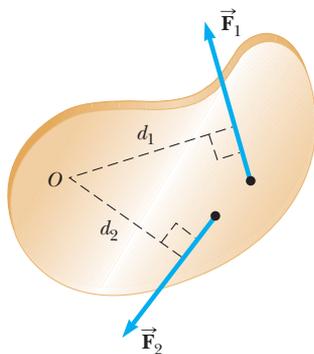


Figura 10.13 La fuerza \vec{F}_1 tiende a dar vuelta el objeto contra las manecillas del reloj en torno a un eje a través de O , y \vec{F}_2 tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj.

Brazo de momento ▶

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.5

El momento de torsión depende de su elección del eje

Como el momento de inercia, no hay un valor único del momento de torsión sobre un objeto. Su valor depende de su elección del eje de rotación.

Pregunta rápida 10.5 i) Si usted intenta aflojar un obstinado tornillo de una pieza de madera con un destornillador y fracasa, ¿debe encontrar un destornillador con un mango a) más largo, o b) más gordo? ii) Si intenta aflojar un tornillo terco de una pieza de metal con una llave y fracasa, ¿debe encontrar una llave con un mango a) más largo o b) más gordo?

EJEMPLO 10.7 El momento de torsión neto sobre un cilindro

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura 10.14, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una sogá enrollada en torno al tambor, que tiene radio R_1 , ejerce una fuerza \vec{T}_1 hacia la derecha sobre el cilindro. Una sogá enrollada en torno a la parte central, que tiene radio R_2 , ejerce una fuerza \vec{T}_2 hacia abajo sobre el cilindro.

A) ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa en el cilindro en torno al eje de rotación (que es el eje z en la figura 10.14)?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el cilindro en la figura 10.14 es un eje en una máquina. La fuerza \vec{T}_2 podría aplicarse mediante una banda transportadora enrollada en torno al tambor. La fuerza \vec{T}_1 podría aplicarse mediante un freno de fricción a la superficie de la parte central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en el que se evalúa el momento de torsión neto con el uso de la ecuación 10.19.

El momento de torsión debido a \vec{T}_1 en torno al eje de rotación es $-R_1 T_1$. (El signo es negativo porque el momento de torsión tiende a producir rotación en sentido de las manecillas del reloj.) El momento de torsión debido a \vec{T}_2 es $+R_2 T_2$. (El signo es positivo porque el momento de torsión tiende a producir rotación contra las manecillas del reloj del cilindro.)

Evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de rotación:

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2 T_2 - R_1 T_1$$

Como una verificación rápida, observe que si las dos fuerzas son de igual magnitud, el momento de torsión neto es negativo porque $R_1 > R_2$. Si parte del reposo con ambas fuerzas de igual magnitud actuando sobre él, el cilindro daría vuelta en sentido de las manecillas del reloj porque \vec{T}_1 sería más efectivo para girarlo de lo que sería \vec{T}_2 .

B) Suponga $T_1 = 5.0 \text{ N}$, $R_1 = 1.0 \text{ m}$, $T_2 = 15.0 \text{ N}$ y $R_2 = 0.50 \text{ m}$. ¿Cuál es el momento de torsión neto en torno al eje de rotación, y de qué forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?

SOLUCIÓN

Sustituya los valores conocidos:

$$\sum \tau = (0.50 \text{ m})(15 \text{ N}) - (1.0 \text{ m})(5.0 \text{ N}) = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ya que este momento de torsión es positivo, el cilindro comienza a dar vuelta en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

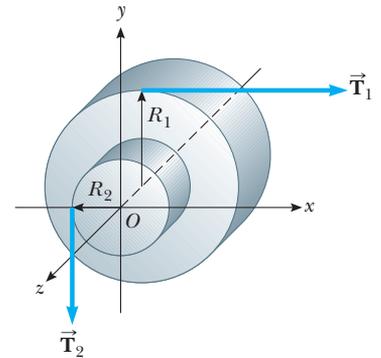


Figura 10.14 (Ejemplo 10.7) Un cilindro sólido articulado en torno al eje z a través de O . El brazo de momento \vec{T}_1 es R_1 , y el brazo de momento de \vec{T}_2 es R_2 .

10.7 Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

En el capítulo 5 aprendió que una fuerza neta sobre un objeto ocasiona una aceleración del objeto y que la aceleración es proporcional a la fuerza neta. Estos hechos son la base del modelo de partícula bajo una fuerza neta cuya representación matemática es la segunda ley de Newton. En esta sección se muestra el análogo rotacional de la segunda ley de Newton: la aceleración angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es proporcional al momento de torsión neto que actúa en torno a dicho eje. Sin embargo, antes de explicar el caso más complejo de rotación de un objeto rígido, es instructivo discutir primero el caso de una partícula móvil en una trayectoria circular en torno de algún punto fijo bajo la influencia de una fuerza externa.

Considere una partícula de masa m rotativa en un círculo de radio r bajo la influencia de una fuerza neta tangencial $\Sigma \vec{F}_t$ y una fuerza neta radial $\Sigma \vec{F}_r$, como se muestra en la figura 10.15. La fuerza neta radial hace que la partícula se mueva en la trayectoria circular con una aceleración centrípeta. La fuerza tangencial proporciona una aceleración tangencial \vec{a}_t y

$$\sum F_t = ma_t$$

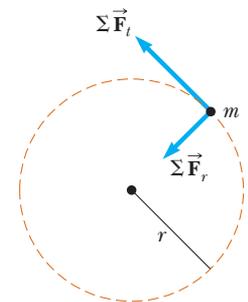


Figura 10.15 Una partícula que da vueltas en un círculo bajo la influencia de una fuerza tangencial neta $\Sigma \vec{F}_t$. También debe estar presente una fuerza neta $\Sigma \vec{F}_r$ en la dirección radial para mantener el movimiento circular.

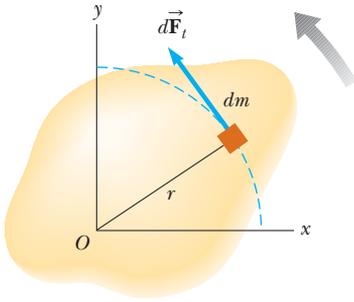


Figura 10.16 Un objeto rígido giratorio en torno a un eje a través de O . Cada elemento de masa dm da vueltas en torno al eje con la misma aceleración angular α .

La magnitud del momento de torsión neto debida a $\Sigma \vec{F}_i$ en la partícula en torno a un eje a través del centro del círculo es

$$\Sigma \tau = \Sigma F_i r = (ma_i)r$$

Ya que la aceleración tangencial se relaciona con la aceleración angular a través de la correspondencia $a_i = r\alpha$ (ecuación 10.11), el momento de torsión neto se expresa como

$$\Sigma \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

Recuerde de la ecuación 10.15 que mr^2 es el momento de inercia de la partícula en torno al eje z que pasa a través del origen, de modo que

$$\Sigma \tau = I\alpha \tag{10.20}$$

Es decir, **el momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular**, y la constante de proporcionalidad es el momento de inercia. Advertida que $\Sigma \tau = I\alpha$ tiene la misma forma matemática que la segunda ley de movimiento de Newton, $\Sigma F = ma$.

Ahora la explicación se extenderá a un objeto rígido de forma arbitraria rotativo en torno a un eje fijo, como en la figura 10.16. El objeto puede considerarse como un número infinito de elementos de masa dm de tamaño infinitesimal. Si sobre el objeto se impone un sistema coordenado cartesiano, cada elemento de masa da vueltas en un círculo en torno al origen y cada uno tiene una aceleración tangencial \vec{a}_t producida por una fuerza tangencial externa $d\vec{F}_t$. Para cualquier elemento determinados, se sabe de la segunda ley de Newton que

$$dF_t = (dm)a_t$$

El momento de torsión $d\tau$ asociado con la fuerza $d\vec{F}_t$ actúa en torno al origen y se conoce por

$$d\tau = r dF_t = a_t r dm$$

Ya que $a_t = r\alpha$, la expresión para $d\tau$ se convierte en

$$d\tau = \alpha r^2 dm$$

Aunque cada elemento de masa del objeto rígido debe tener una diferente aceleración traslacional \vec{a}_t , todos ellos tienen la *misma* aceleración angular α . Con esto en mente, se puede integrar la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto $\Sigma \tau$ en torno a un eje a través de O debido a las fuerzas externas:

$$\Sigma \tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

donde α se puede sacar de la integral porque es común a todos los elementos de masa. De la ecuación 10.17 se sabe que $\int r^2 dm$ es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación a través de O , y por ende, la expresión para $\Sigma \tau$ se convierte en

$$\Sigma \tau = I\alpha \tag{10.21}$$

El momento de torsión es proporcional a la aceleración angular ▶

Esta ecuación para un objeto rígido es la misma que para una partícula móvil en una trayectoria circular (ecuación 10.20). El momento de torsión neto en torno al eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del objeto, con un factor de proporcionalidad I , una cantidad que depende del eje de rotación y del tamaño y la forma del objeto. La ecuación 10.21 es la representación matemática del modelo de análisis de un **objeto rígido bajo un momento de torsión neto**, el análogo rotacional a la partícula bajo una fuerza neta.

Por último, note que el resultado $\Sigma \tau = I\alpha$ también se aplica cuando las fuerzas que actúan sobre los elementos de masa tienen componentes radiales así como componentes tangenciales. Esto es porque la línea de acción de todas las componentes radiales debe pasar a través del eje de rotación; en consecuencia, todas las componentes radiales producen momento de torsión cero en torno a dicho eje.

Pregunta rápida 10.6 Enciende su taladro eléctrico y descubre que el intervalo de tiempo para que la broca giratoria llegue al reposo debido al momento de torsión friccionante en el taladro es Δt . Sustituye la broca con una más grande que resulta en la duplicación

del momento de inercia de todo el mecanismo giratorio del taladro. Cuando esta broca más grande da vueltas a la misma rapidez angular que la primera y el taladro se apaga, el momento de torsión friccionante permanece igual que para la situación previa. ¿Cuál es el intervalo de tiempo para que esta segunda broca llegue al reposo? a) $4 \Delta t$, b) $2 \Delta t$, c) Δt , d) $0.5 \Delta t$, e) $0.25 \Delta t$, f) imposible de determinar.

EJEMPLO 10.8**Barra giratoria**

Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 10.17. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido?

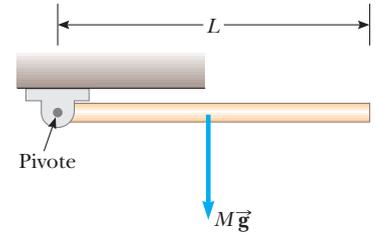


Figura 10.17 (Ejemplo 10.8) Una barra es libre de dar vuelta en torno a un pivote en el extremo izquierdo. La fuerza gravitacional sobre la barra actúa en su centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en lo que le sucede a la barra de la figura 10.17 cuando se libera. Da vueltas en sentido de las manecillas del reloj en torno al pivote en el extremo izquierdo.

Categorizar La barra se clasifica como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto. El momento de torsión se debe sólo a la fuerza gravitacional sobre la barra si se elige que el eje de rotación pase a través del pivote en la figura 10.17. *No se puede* clasificar la barra como un objeto rígido bajo aceleración angular constante porque el momento de torsión ejercido sobre la barra y, por lo tanto, la aceleración angular de la barra, varían con su posición angular.

Analizar La única fuerza que contribuye al momento de torsión en torno a un eje a través del pivote es la fuerza gravitacional $M\vec{g}$ que se ejerce sobre la barra. (La fuerza que ejerce el pivote sobre la barra tiene momento de torsión cero en torno al pivote, porque su brazo de momento es cero.) Para calcular el momento de torsión sobre la barra, se supone que la fuerza gravitacional actúa en el centro de masa de la barra, como se muestra en la figura 10.17.

Escriba una expresión para la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza gravitacional en torno a un eje a través del pivote:

$$\tau = Mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

Aplice la ecuación 10.21 para obtener la aceleración angular de la barra:

$$1) \quad \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Use la ecuación 10.11 con $r = L$ para encontrar la aceleración traslacional inicial del extremo rígido de la barra:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Finalizar Estos valores son los valores *iniciales* de las aceleraciones angular y traslacional. Una vez que la barra comienza a dar vuelta, la fuerza gravitacional ya no es perpendicular a la barra y los valores de las dos aceleraciones disminuyen y cambian a cero en el momento en que la barra pasa a través de la orientación vertical.

¿Qué pasaría si? ¿Y si se coloca una moneda en el extremo de la barra y después se libera la barra? ¿La moneda permanecería en contacto con la barra?

Respuesta El resultado para la aceleración inicial de un punto sobre el extremo de la barra muestra que $a_t > g$. Una moneda sin apoyo cae con aceleración g . De este modo, si se coloca una moneda en el extremo de la barra y luego se libera la barra, ¡el extremo de la barra cae más rápido que la moneda! La moneda no permanece en contacto con la barra. (¡Intente esto con una moneda y una regleta!)

La cuestión ahora es encontrar la ubicación sobre la barra a la que se puede colocar una moneda que *permanecerá* en contacto en cuanto ambas comiencen a caer. Para encontrar la aceleración traslacional de un punto arbitrario sobre la barra a una distancia $r < L$ desde el punto del pivote, se combina la ecuación 1) con la ecuación 10.11:

$$a_t = r\alpha = \frac{3g}{2L}r$$

Para que la moneda permanezca en contacto con la barra, el caso límite es que la aceleración traslacional es igual a la que se espera de la gravedad:

$$a_t = g = \frac{3g}{2L} r$$

$$r = \frac{2}{3}L$$

Debido a eso, una moneda colocada más cerca del pivote a menos de dos tercios de la longitud de la barra permanece en contacto con la barra que cae, pero una moneda más lejos de este punto pierde contacto.

EJEMPLO CONCEPTUAL 10.9 Chimeneas que caen y bloques tambaleantes

Cuando una chimenea alta cae, con frecuencia se rompe en alguna parte a lo largo de su longitud antes de golpear el suelo, como se muestra en la figura 10.18. ¿Por qué?

SOLUCIÓN

Cuando la chimenea da vuelta en torno a su base, cada porción más alta de la chimenea cae con una aceleración tangencial más grande que la porción debajo de ella, de acuerdo con la ecuación 10.11. La aceleración angular aumenta a medida que la chimenea se inclina más. Al final, las porciones más altas de la chimenea experimentan una aceleración mayor que la aceleración que podría resultar sólo de la gravedad; esta situación es similar a la que se describió en el ejemplo 10.8. Sólo puede ocurrir si dichas porciones se jalen hacia abajo por otra fuerza además de la fuerza gravitacional. La fuerza que lo ocasiona es la fuerza de corte de las porciones más bajas de la chimenea. Al final, la fuerza de corte que proporciona esta aceleración es mayor a lo que puede soportar la chimenea, y la chimenea se rompe. Lo mismo sucede con una torre alta de bloques de juguete de los niños. Pida prestados algunos bloques a un niño y construya tal torre. Empújela y observe cómo se separa en algún punto antes de golpear el suelo.



Figura 10.18 (Ejemplo conceptual 10.9) Una chimenea que cae se rompe en algún punto a lo largo de su longitud.

EJEMPLO 10.10 Aceleración angular de una rueda

Una rueda de radio R , masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como en la figura 10.10. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa m . Calcule la aceleración angular de la rueda, la aceleración lineal del objeto y la tensión en la cuerda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el objeto es una cubeta en un antiguo pozo de los deseos. Está amarrada a una cuerda que pasa alrededor de un cilindro equipado con una manivela para elevar la cubeta. Después de elevar la cubeta, el sistema se libera y la cubeta acelera hacia abajo mientras la cuerda se desenrolla del cilindro.

Categorizar El objeto se modela como una partícula bajo una fuerza neta. La rueda se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto.

Analizar La magnitud del momento de torsión que actúa sobre la rueda en torno a su eje de rotación es $\tau = TR$, donde T es la fuerza que ejerce la cuerda sobre el borde de la rueda. (La fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la rueda y la fuerza normal que ejerce el eje sobre la rueda, ambas, pasan a través del eje de rotación y no producen momento de torsión.)

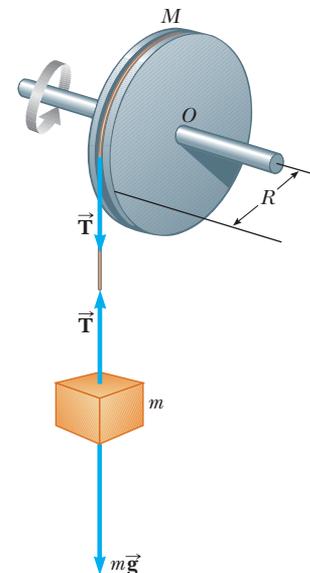


Figura 10.19 (Ejemplo 10.10) Un objeto cuelga de una cuerda enrollada alrededor de una rueda.

Escriba la ecuación 10.21:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Resuelva para α y sustituya el momento de torsión neto:

$$1) \quad \alpha = \frac{\sum \tau}{I} = \frac{TR}{I}$$

Aplice la segunda ley de Newton al movimiento del objeto y considere la dirección hacia abajo como positiva:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

Resuelva para la aceleración a :

$$2) \quad a = \frac{mg - T}{m}$$

Las ecuaciones 1) y 2) tienen tres incógnitas: α , a y T . Ya que el objeto y la rueda están conectados mediante una cuerda que no desliza, la aceleración traslacional del objeto suspendido es igual a la aceleración tangencial de un punto sobre el borde de la rueda. Debido a eso, la aceleración angular α de la rueda y la aceleración traslacional del objeto se relacionan mediante $a = R\alpha$.

Use este hecho junto con las ecuaciones 1) y 2):

$$3) \quad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

Resuelva para la tensión T :

$$4) \quad T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

Sustituya la ecuación 4) en la ecuación 2) y resuelva para a :

$$5) \quad a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

Use $a = R\alpha$ y la ecuación 5) para resolver para α :

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$

Finalizar Este problema se concluye al imaginar el comportamiento del sistema en algunos límites extremos.

¿Qué pasaría si? ¿Y si la rueda se volviese tan pesada que I se volviera muy grande? ¿Qué sucede con la aceleración a del objeto y la tensión T ?

Respuesta Si la rueda se vuelve infinitamente pesada, se puede imaginar que el objeto de masa m simplemente colgará de la cuerda sin causar el giro de la rueda.

Esto se puede demostrar matemáticamente al tomar el límite $I \rightarrow \infty$. Entonces la ecuación 5) se convierte en

$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)} \rightarrow 0$$

lo que concuerda con la conclusión conceptual de que el objeto colgará en reposo. Además, la ecuación 4) se convierte en

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} \rightarrow \frac{mg}{1 + 0} = mg$$

que es consistente porque el objeto simplemente cuelga en reposo en equilibrio entre la fuerza gravitacional y la tensión en la cuerda.

10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

Hasta este punto de la explicación del movimiento rotacional en este capítulo, el enfoque fundamental ha sido sobre un planteamiento que involucra fuerza, lo que conduce a una descripción del momento de torsión sobre un objeto rígido. En la sección 10.4 se explicó

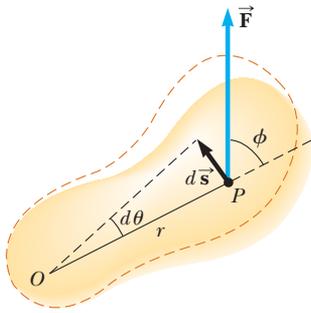


Figura 10.20 Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa \vec{F} aplicada a P .

la energía cinética rotacional de un objeto rígido. Ahora se extiende la explicación de dicha energía inicial y se verá cómo una aproximación energética es útil para resolver problemas rotacionales.

Comience por considerar la correspondencia entre el momento de torsión que actúa en un objeto rígido y su movimiento rotacional resultante a fin de generar expresiones para la potencia y un análogo rotacional con el teorema trabajo–energía cinética. Observe el objeto rígido articulado en O en la figura 10.20. Suponga que una sola fuerza externa \vec{F} se aplica en P , donde \vec{F} yace en el plano de la página. El trabajo consumido en el objeto por \vec{F} a medida que su punto de aplicación da vueltas a través de una distancia infinitesimal $ds = r d\theta$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \text{ sen } \phi) r d\theta$$

donde $F \text{ sen } \phi$ es la componente tangencial de \vec{F} o, en otras palabras, la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento. Note que el vector componente radial de \vec{F} no realiza trabajo sobre el objeto porque es perpendicular al desplazamiento del punto de aplicación de \vec{F} .

Ya que la magnitud del momento de torsión debida a \vec{F} en torno a un eje a través de O es definida como $rF \text{ sen } \phi$, por la ecuación 10.19, el trabajo consumido por la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$dW = \tau d\theta \tag{10.22}$$

La rapidez a la que \vec{F} realiza trabajo a medida que el objeto rota en torno al eje fijo a través del ángulo $d\theta$ en un intervalo de tiempo dt es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que dW/dt es la potencia instantánea \mathcal{P} (vea la sección 8.5) entregada por la fuerza y $d\theta/dt = \omega$, esta expresión se reduce a

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \tag{10.23}$$

Esta ecuación es análoga a $\mathcal{P} = Fv$ en el caso del movimiento traslacional, y la ecuación 10.22 es análoga a $dW/F_x dx$.

Al estudiar el movimiento traslacional, los modelos de acuerdo con la aproximación energética pueden ser extremadamente útiles para describir el comportamiento de un sistema. De lo aprendido del movimiento traslacional, se espera que, cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo invertido por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Para probar este hecho, comience con $\Sigma \tau = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo, es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\Sigma \tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\Sigma \tau d\theta = dW$ se obtiene

$$\Sigma \tau d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total invertido por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotativo

$$\Sigma W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \tag{10.24}$$

donde la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f . La ecuación 10.24 es el **teorema trabajo–energía cinética para movimiento rotacional**. Similar al teorema trabajo–energía cinética en movimiento traslacional (sección 7.5), este teorema afirma que el trabajo neto invertido por fuerzas externas en un objeto rígido simétrico en rotación en torno a un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Este teorema es una forma del modelo de sistema no aislado explicado en el capítulo 8. En el sistema del objeto rígido se invierte trabajo, que representa una transferencia de energía a través de la frontera del sistema que aparece como un aumento en la energía cinética rotacional del objeto.

Potencia entregada a un objeto rígido en rotación

Teorema trabajo–energía cinética para movimiento rotacional

TABLA 10.3

Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
Rapidez angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez traslacional $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración traslacional $a = dv/dt$
Momento de torsión neto $\Sigma \tau = I\alpha$	Fuerza neta $\Sigma F = ma$
Si $\alpha = \text{constante}$ $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si $a = \text{constante}$ $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $\mathcal{P} = \tau\omega$	Potencia $\mathcal{P} = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento lineal $p = mv$
Momento de torsión neto $\Sigma \tau = dL/dt$	Fuerza neta $\Sigma F = dp/dt$

En general, es posible combinar este teorema con la forma traslacional del teorema trabajo–energía cinética del capítulo 7. Por lo tanto, el trabajo neto invertido por fuerzas externas sobre un objeto es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinética traslacional y rotacional. Por ejemplo, cuando un pitcher lanza una pelota de beisbol, el trabajo invertido por la mano del pitcher aparece como energía cinética asociada con la pelota móvil a través del espacio, así como energía cinética rotacional asociada con el giro de la bola.

Además del teorema trabajo–energía cinética, también se aplican otros principios de energía a situaciones rotacionales. Por ejemplo, si un sistema que involucra objetos rotativos se aísla y dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se pueden usar el modelo de sistema aislado y el principio de conservación de la energía mecánica para analizar el sistema como en el ejemplo 10.11 siguiente.

Por último, en algunas situaciones una aproximación energética no proporciona suficiente información para resolver el problema y se debe combinar con un planteamiento de cantidad de movimiento. Tal caso se ilustra en el ejemplo 10.14 de la sección 10.9.

La tabla 10.3 menciona las diversas ecuaciones que explican características del movimiento rotacional con las expresiones análogas para movimiento traslacional. Las últimas dos ecuaciones de la tabla 10.3, que involucran cantidad de movimiento angular L , se explican en el capítulo 11 y se incluyen sólo por motivo de integridad.

EJEMPLO 10.11 Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo (figura 10.21). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 10.21 e imagine que la barra giratoria hacia abajo a través de un cuarto de vuelta en torno al pivote en el extremo izquierdo. También regresa a ver el ejemplo 10.8. Esta situación física es la misma.

Categorizar Como se mencionó en el ejemplo 10.8, la aceleración angular de la barra no es constante. Por lo tanto, las ecuaciones cinemáticas para rotación (sección 10.2) no se pueden usar para resolver este ejemplo. El sistema de la barra y la Tierra se clasifica como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas actuantes y usa el principio de conservación de energía mecánica.

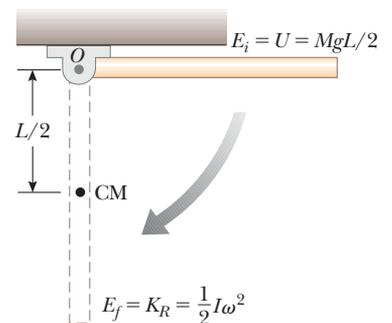


Figura 10.21 (Ejemplo 10.11) Una barra rígida uniforme con centro de giro en O da vueltas en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.

Analizar Elija la configuración en que la barra cuelga recta hacia abajo, como la configuración de referencia para energía potencial gravitacional y asigne un valor de cero para esta configuración. Cuando la barra está en la posición horizontal, no tiene energía cinética rotacional. La energía potencial del sistema en esta configuración respecto a la configuración de referencia es $MgL/2$ porque el centro de masa de la barra está a una altura $L/2$ más alto que su posición en la configuración de referencia. Cuando la barra llega a su posición más baja, la energía del sistema es enteramente energía rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia de la barra en torno a un eje que pasa a través del pivote.

Escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}MgL$$

Resuelva para ω y use $I = \frac{1}{3}ML^2$ (vea la tabla 10.2) para la barra:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.10 y el resultado del inciso A):

$$v_{CM} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

Ya que r para el punto más bajo en la barra es el doble de lo que es para el centro de masa, el punto más bajo tiene rapidez tangencial que el centro de masa:

$$v = 2v_{CM} = \sqrt{3gL}$$

Finalizar La configuración inicial en este ejemplo es la misma que en el ejemplo 10.8. Sin embargo, en el ejemplo 10.8, sólo se podría encontrar la aceleración angular inicial de la barra. Una aplicación energética en el ejemplo actual permite encontrar información adicional, la rapidez angular de la barra en otro instante de tiempo.

EJEMPLO 10.12 Energía y la máquina de Atwood

Dos cilindros que tienen masas diferentes m_1 y m_2 están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 10.22. La polea tiene un radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. La cuerda no se desliza sobre la polea y el sistema se libera desde el reposo. Encuentre las magnitudes de velocidad traslacionales de los cilindros después de que el cilindro 2 desciende una distancia h , y encuentre la rapidez angular de la polea en este momento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya se vieron ejemplos que involucran la máquina de Atwood, así que el movimiento de los objetos en la figura 10.22 debe ser fácil de visualizar.

Categorizar Ya que la cuerda no se desliza, la polea da vueltas en torno al eje. Se puede despreciar la fricción en el eje porque el radio del eje es pequeño en relación con el de la polea. Por tanto, el momento de torsión friccionante es mucho menor que el momento de torsión neto aplicado por los dos cilindros siempre que sus masas sean significativamente diferentes. En consecuencia, el sistema que consiste en los dos cilindros, la polea y la Tierra es un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en acción; debido a eso, la energía mecánica del sistema se conserva.

Analizar La configuración cero para energía potencial gravitacional se define como la que existe cuando el sistema se libera desde el reposo. De la figura 10.22 se ve que el

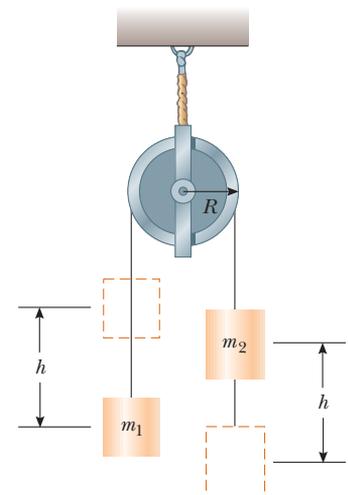


Figura 10.22 (Ejemplo 10.12) Una máquina de Atwood con una polea pesada.

descenso del cilindro 2 se asocia con una disminución en la energía potencial del sistema y que la elevación del cilindro 1 representa un aumento en energía potencial.

Escriba una ecuación de conservación de energía para el sistema:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$\left(\frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2\right) + (m_1gh - m_2gh) = 0 + 0$$

Use $v_f = R\omega_f$ para sustituir por ω_f :

$$\frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}v_f^2 = m_2gh - m_1gh$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = m_2gh - m_1gh$$

Resuelva para v_f :

$$1) \quad v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right]^{1/2}$$

Use $v_f = R\omega_f$ para resolver para ω_f :

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R} \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right]^{1/2}$$

Finalizar Cada uno de los cilindros se modela como una partícula bajo aceleración constante porque experimenta una fuerza neta constante. Piense qué necesitaría hacer para usar la ecuación 1) para encontrar la aceleración de uno de los cilindros y reducir el resultado de modo que coincida con el resultado del ejemplo 5.9. ¡En tal caso hágalo y vea si funciona!

10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

En esta sección se trata el movimiento de un objeto rígido que rueda a lo largo de una superficie plana. En general, tal movimiento es complejo. Por ejemplo, suponga que un cilindro rueda sobre una trayectoria recta tal que el eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio. Como exhibe la figura 10.23, un punto sobre el borde del cilindro se mueve en una trayectoria compleja llamada *cicloide*. Sin embargo, se pueden simplificar el tema al concentrarse en el centro de la masa en lugar de hacerlo en un punto en el borde del objeto rodante. Como se muestra en la figura 10.23, el centro de masa se mueve en línea recta. Si un objeto como un cilindro rueda sin deslizarse sobre la superficie (llamado *movimiento de rodamiento puro*), existe una correspondencia simple entre sus movimientos rotacional y traslacional.

Considere un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal (figura 10.24). Conforme el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ ,

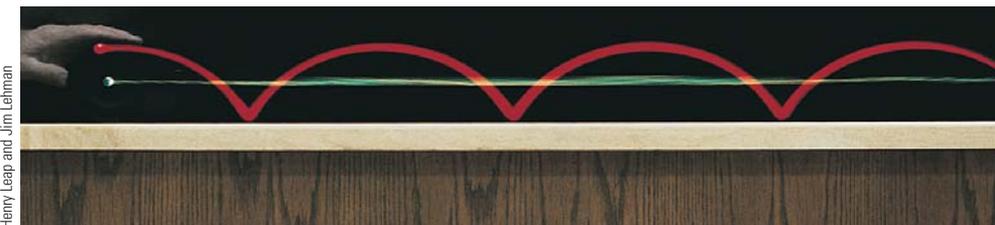


Figura 10.23 Una fuente de luz en el centro de un cilindro en rodamiento y otra en un punto en el borde ilustran las diferentes trayectorias que toman estos dos puntos. El centro se mueve en una línea recta (línea verde), mientras que el punto en el borde se mueve en la trayectoria llamada cicloide (curva roja).

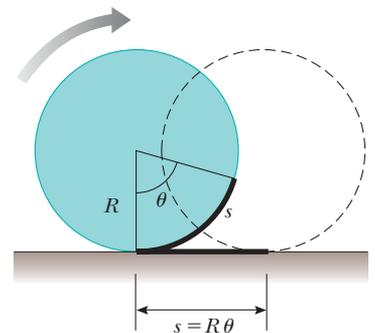


Figura 10.24 Para movimiento de rodamiento puro, a medida que el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ , su centro se traslada una distancia lineal $s = R\theta$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS

OCULTOS 10.6

La ecuación 10.25 parece familiar

La ecuación 10.25 parece muy similar a la ecuación 10.10, así que asegúrese de ser claro con la diferencia. La ecuación 10.10 da la rapidez *tangencial* de un punto en un objeto *giratorio* ubicado a una distancia r de un eje de rotación fijo si el objeto está girando con rapidez angular ω . La ecuación 10.25 da la rapidez *traslacional* del centro de masa de un objeto *en rodamiento* de radio R rodando con rapidez angular ω .

su centro de masa se mueve una distancia lineal $s = R\theta$ (vea la ecuación 10.1a). Por lo tanto, la rapidez traslacional del centro de masa para movimiento de rodamiento puro se conoce por

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{10.25}$$

donde ω es la rapidez angular del cilindro. La ecuación 10.25 se cumple siempre que un cilindro o esfera rueda sin deslizarse y es la **condición para movimiento de rodamiento puro**. La magnitud de la aceleración lineal del centro de masa para movimiento de rodamiento puro es

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{10.26}$$

donde α es la aceleración angular del cilindro.

Imagine que está móvil junto con un objeto que rueda con rapidez v_{CM} , y permanece en un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del objeto. Mientras observa el objeto, lo verá en rotación pura alrededor de su centro de masa. La figura 10.25a muestra las velocidades de puntos a la cabeza, en el centro y en la parte baja del objeto según lo observa. Además de estas velocidades, cada punto sobre el objeto se mueve en la misma dirección con rapidez v_{CM} respecto a la superficie sobre la que rueda. La figura 10.25b muestra estas velocidades para un objeto que no gira. En el marco de referencia en reposo respecto de la superficie, la velocidad de un punto determinado sobre el objeto es la suma de las velocidades que se muestran en las figuras 10.25a y 10.25b. La figura 10.25c muestra los resultados de sumar estas velocidades.

Observe que el punto de contacto entre la superficie y el cilindro en la figura 10.25c tiene una rapidez traslacional cero. En este instante, el objeto que rueda es móvil en exactamente la misma forma que si la superficie se retirara y el objeto fuera articulado en el punto P y girara en torno a un eje que pasa a través de P . La energía cinética total de este objeto que se piensa que está girando se expresa como

$$K = \frac{1}{2}I_P \omega^2 \tag{10.27}$$

donde I_P es el momento de inercia en torno a un eje de rotación a través de P .

Ya que el movimiento objeto que se piensa que está girando es el mismo en este instante que el del verdadero objeto en rodamiento, la ecuación 10.27 también da la energía cinética del objeto en rodamiento. Al aplicar el teorema de ejes paralelos, se puede sustituir $I_P = I_{CM} + MR^2$ en la ecuación 10.27 para obtener

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Al usar $v_{CM} = R\omega$, esta ecuación se puede expresar como

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \tag{10.28}$$

El término $\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ representa la energía cinética rotacional del cilindro en torno a su centro de masa, y el término $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ representa la energía cinética que tendría el cilindro si

Energía cinética total de un objeto en rodamiento ▶

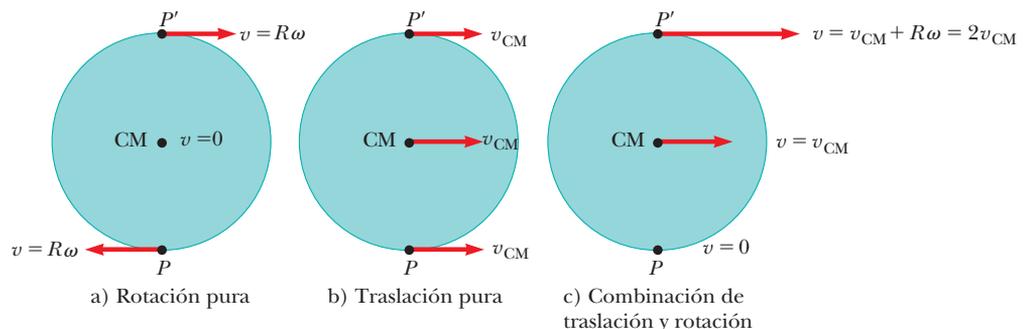


Figura 10.25 El movimiento de un objeto que rueda se puede modelar como una combinación de traslación pura y rotación pura.

sólo se trasladara a través del espacio sin girar. En consecuencia, la **energía cinética total de un objeto en rodamiento es la suma de la energía cinética rotacional en torno al centro de masa y la energía cinética traslacional del centro de masa**. Este enunciado es consistente con la situación que se ilustra en la figura 10.25, que muestra que la velocidad de un punto en el objeto es la suma de la velocidad del centro de masa y la velocidad tangencial en torno al centro de masa.

Se pueden usar métodos energéticos para tratar una clase de problemas concernientes con el movimiento de rodamiento de un objeto sobre un plano inclinado rugoso. Por ejemplo, considere la figura 10.26, que muestra una esfera que rueda sin deslizarse después de liberarla desde el reposo en la parte superior del plano. El movimiento de rodamiento acelerado sólo es posible si una fuerza de fricción está presente entre la esfera y el plano para producir un momento de torsión neto en torno al centro de masa. A pesar de la presencia de fricción, no se presenta pérdida de energía mecánica, porque el punto de contacto está en reposo en relación con la superficie en cualquier instante. (Por otra parte, si la esfera se deslizara, la energía mecánica del sistema esfera–plano inclinado–Tierra se perdería debido a la fuerza no conservativa de la fricción cinética.)

En realidad, la *fricción de rodamiento* hace que la energía mecánica se transforme en energía interna. La fricción de rodamiento se debe a deformaciones de la superficie y el objeto que rueda. Por ejemplo, las llantas de los automóviles se flexionan conforme ruedan sobre una autopista, lo que representa una transformación de energía mecánica en energía interna. La autopista también se deforma una pequeña cantidad, lo que representa una fricción de rodamiento adicional. En los modelos de resolución de problemas se ignora la fricción de rodamiento a menos que se establezca de otro modo.

Al usar $v_{\text{CM}} = R\omega$ para movimiento de rodamiento puro, la ecuación 10.28 se puede expresar como

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\left(\frac{v_{\text{CM}}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + M\right)v_{\text{CM}}^2 \quad (10.29)$$

Para el sistema esfera–Tierra, la configuración cero de energía potencial gravitacional se define cuando la esfera está en la parte baja del plano inclinado. Por lo tanto, la conservación de energía mecánica produce

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + M\right)v_{\text{CM}}^2 + 0 = 0 + Mgh$$

$$v_{\text{CM}} = \left[\frac{2gh}{1 + (I_{\text{CM}}/MR^2)}\right]^{1/2} \quad (10.30)$$

Pregunta rápida 10.7 Una bola rueda sin deslizarse por un plano inclinado A, partiendo del reposo. Al mismo tiempo, una caja parte del reposo y se desliza por el plano inclinado B, que es idéntico al plano A excepto que no tiene fricción. ¿Cuál llega primero al fondo? a) La bola. b) La caja. c) Ambas. d) Imposible de determinar.

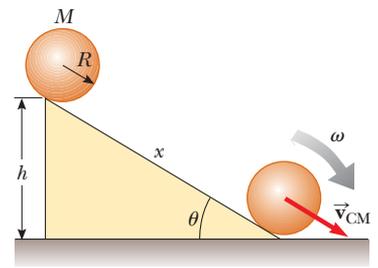


Figura 10.26 Una esfera rueda por un plano inclinado. La energía mecánica del sistema esfera–Tierra se conserva si no se presenta deslizamiento.

EJEMPLO 10.13 Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado

Para la esfera sólida que se muestra en la figura 10.26, calcule la rapidez traslacional del centro de masa en la parte baja del plano y la magnitud de la aceleración traslacional del centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que rueda la esfera por el plano inclinado. En su mente compárela con un libro que se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción. Quizá ha experimentado con objetos rodando hacia abajo por planos y es posible que esté tentado a pensar que la esfera se movería más rápido en el plano que el libro. No obstante, ¡no ha experimentado con objetos que se deslizan hacia abajo por planos inclinados *sin fricción*! Así que, ¿cuál objeto llegará primero a la parte baja? (Vea la pregunta rápida 10.7.)

Categorizar La esfera y la Tierra se modelan como un sistema aislado sin fuerzas no conservativas en acción. Este modelo es el que condujo a la ecuación 10.30, así que se puede usar dicho resultado.

Analizar Evalúe la rapidez del centro de masa de la esfera a partir de la ecuación 10.30:

$$1) \quad v_{\text{CM}} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(\frac{2}{5}MR^2/MR^2\right)} \right]^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

Este resultado es menor que $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez que tendría un objeto si simplemente se deslizará por el plano sin girar. (Elimine la rotación al hacer $I_{\text{CM}} = 0$ en la ecuación 10.30.)

Para calcular la aceleración traslacional del centro de masa, note que el desplazamiento vertical de la esfera se relaciona con la distancia x que se mueve a lo largo del plano mediante la correspondencia $h = x \text{ sen } \theta$.

Aplice esta relación para escribir la ecuación 1):

$$v_{\text{CM}}^2 = \frac{10}{7}gx \text{ sen } \theta$$

Escriba la ecuación 2.17 para un objeto que parte del reposo y se mueve una distancia x :

$$v_{\text{CM}}^2 = 2a_{\text{CM}}x$$

Igualé las dos expresiones anteriores para encontrar a_{CM} :

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7}g \text{ sen } \theta$$

Finalizar Tanto la rapidez como la aceleración del centro de masa son *independientes* de la masa y el radio de la esfera. Es decir: **todas las esferas homogéneas sólidas experimentan la misma rapidez y aceleración en un plano inclinado determinado**. Intente verificar esta afirmación experimentalmente con bolas de diferentes tamaños, como una canica y una bola de croquet.

Si tuviera que repetir el cálculo de la aceleración para una esfera hueca, un cilindro sólido o un aro, obtendría resultados similares que sólo diferirían en el factor enfrente de $g \text{ sen } \theta$. Los factores constantes que aparecen en las expresiones para v_{CM} y a_{CM} sólo dependen del momento de inercia en torno al centro de masa para el objeto específico. En todos los casos, la aceleración del centro de masa es *menor* que $g \text{ sen } \theta$, el valor que tendría la aceleración si el plano no tuviera fricción y no ocurriera rodamiento.

EJEMPLO 10.14 Jalar un carrete³

Un carrete simétrico de masa m y radio R está en reposo sobre una mesa horizontal con fricción (figura 10.27). Con su mano en una cuerda sin masa enrollada alrededor del eje de radio r , jala del carrete con una fuerza horizontal constante de magnitud T hacia la derecha. Como resultado, el carrete rueda sin deslizarse una distancia L a lo largo de la mesa sin fricción de rodamiento.

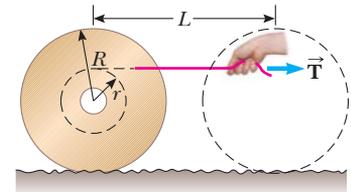


Figura 10.27 (Ejemplo 10.14) Un carrete en reposo sobre una mesa horizontal. Una cuerda está enrollada alrededor del eje y una mano lo jala hacia la derecha.

A) Encuentre la rapidez traslacional final del centro de masa del carrete.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 10.27 para visualizar el movimiento del carrete cuando jala la cuerda. Para que el carrete ruede una distancia L , note que su mano en la cuerda debe jalar una distancia *diferente* de L .

Categorizar El carrete es un objeto rígido bajo un momento de torsión neto, pero el momento de torsión incluye la fuerza de fricción, acerca de la que no sabe nada. Por lo tanto, un planteamiento en función del modelo de objeto rígido bajo momento de torsión neto no será exitoso. Su mano realiza trabajo en el carrete y la cuerda, que forman un sistema no aislado. Vea si una aproximación respecto al modelo de sistema no aislado es fructífero.

³ El ejemplo 10.14 lo inspiró en parte C. E. Mungan, "A primer on work-energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher*, 43, p. 10, 2005.

Analizar El único tipo de energía que cambia en el sistema es la energía cinética del carrete. No hay fricción de rodamiento, de modo que no hay cambio en la energía interna. La única forma en que la energía cruza la frontera del sistema es mediante el trabajo realizado por su mano en la cuerda. La fuerza de fricción estática no invierte trabajo en la parte baja del carrete porque el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de ningún desplazamiento.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2:

$$1) \quad W = \Delta K = \Delta K_{\text{trans}} + \Delta K_{\text{rot}}$$

donde W es el trabajo invertido en la cuerda por su mano. Para hallar este trabajo, necesita encontrar el desplazamiento de su mano durante el proceso.

Primero encuentre la longitud de la cuerda que se desenrolla del carrete. Si el carrete rueda una distancia L , el ángulo total que da vuelta es $\theta = L/R$. El eje también da vueltas a través de este ángulo.

Use la ecuación 10.1a para encontrar la longitud de arco total que gira el eje:

$$\ell = r\theta = \frac{r}{R}L$$

Este resultado también da la longitud de la cuerda que se jala del eje. Su mano se moverá esta distancia *más* la distancia L a través de la que se mueve el carrete. Por lo tanto, la magnitud del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada por su mano es $\ell + L = L(1 + r/R)$.

Evalúe el trabajo realizado por su mano sobre la cuerda:

$$2) \quad W = TL\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Sustituya la ecuación 2) en la ecuación 1):

$$TL\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde I es el momento de inercia del carrete en torno a su centro de masa y v_{CM} y ω son los valores finales después de que la rueda recorre una distancia L .

Aplique la condición de rodamiento sin deslizamiento $\omega = v_{\text{CM}}/R$:

$$TL\left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2}$$

Resuelva para v_{CM} :

$$3) \quad v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)}}$$

B) Encuentre el valor de la fuerza de fricción f .

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que la fuerza de fricción no realiza trabajo, no se le puede evaluar de un planteamiento energético. El carrete se modela como un sistema no aislado, pero esta vez en términos de cantidad de movimiento. La cuerda aplica una fuerza a través de la frontera del sistema, lo que resulta en un impulso en el sistema. Ya que las fuerzas en el carrete son constantes, el centro de masa del carrete se modela como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Escriba el teorema impulso–cantidad de movimiento (ecuación 9.40) para el carrete:

$$4) \quad (T - f)\Delta t = m(v_{\text{CM}} - 0) = mv_{\text{CM}}$$

Para una partícula bajo aceleración constante que parte del reposo, la ecuación 2.14 dice que la velocidad promedio del centro de masa es la mitad de la velocidad final.

Use la ecuación 2.2 para encontrar el intervalo de tiempo para el centro de masa del carrito para mover una distancia L desde el reposo a una rapidez final v_{CM} :

$$5) \quad \Delta t = \frac{L}{v_{CM, \text{prom}}} = \frac{2L}{v_{CM}}$$

Sustituya la ecuación 5) en la ecuación 4):

$$(T - f) \frac{2L}{v_{CM}} = mv_{CM}$$

Resuelva para la fuerza de fricción f :

$$f = T - \frac{mv_{CM}^2}{2L}$$

Sustituya v_{CM} de la ecuación 3):

$$\begin{aligned} f &= T - \frac{m}{2L} \left[\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)} \right] \\ &= T - T \frac{(1 + r/R)}{(1 + I/mR^2)} = T \left[1 - \frac{(1 + r/R)}{(1 + I/mR^2)} \right] \end{aligned}$$

Finalizar ¡Note que podría usar el teorema impulso–cantidad de movimiento para el movimiento traslacional del carrito mientras ignora que el carrito está girando! Este hecho demuestra el poder de la creciente lista de planteamientos para resolver problemas.

Resumen

DEFINICIONES

La **posición angular** de un objeto rígido se define como el ángulo θ entre una línea de referencia unida al objeto y una línea de referencia fija en el espacio. El **desplazamiento angular** de una partícula móvil en una trayectoria circular o un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es $\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$.

La **rapidez angular instantánea** de una partícula móvil en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad (10.3)$$

La **aceleración angular instantánea** de una partícula móvil en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} \quad (10.5)$$

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, cada parte del objeto tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.

El **momento de inercia de un sistema de partículas** se define como

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (10.15)$$

donde m_i es la masa de la i -ésima partícula y r_i es su distancia desde el eje de rotación.

La magnitud del **momento de torsión** asociado con una fuerza \vec{F} que actúa sobre un objeto a una distancia r desde el eje de rotación es

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd \quad (10.19)$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza y el vector fuerza, y d es el brazo de momento de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, la posición angular, la rapidez angular y la aceleración angular se relacionan con la posición, la rapidez y la aceleración traslacionales mediante las relaciones

$$s = r\theta \quad (10.1a)$$

$$s = r\omega \quad (10.10)$$

$$s = r\alpha \quad (10.11)$$

Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo con rapidez angular ω , su **energía cinética rotacional** se puede escribir

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (10.16)$$

donde I es el momento de inercia en torno al eje de rotación.

El **momento de inercia de un objeto rígido** es

$$I = \int r^2 dm \quad (10.17)$$

donde r es la distancia desde el elemento de masa dm hasta el eje de rotación.

La rapidez a la que una fuerza externa realiza trabajo para girar un objeto rígido en torno a un eje fijo, o la **potencia** entregada, es

$$\mathcal{P} = \tau\omega \quad (10.23)$$

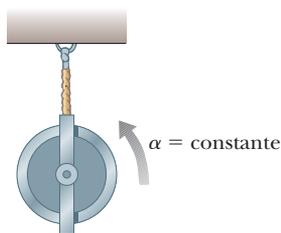
Si sobre un objeto rígido se consume trabajo y el único resultado del trabajo es rotación en torno a un eje fijo, el trabajo neto consumido por las fuerzas externas para girar el objeto es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto:

$$\sum W = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \quad (10.24)$$

La **energía cinética total** de un objeto rígido que rueda sobre una superficie rugosa sin deslizamiento es igual a la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa más la energía cinética traslacional del centro de masa:

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \quad (10.28)$$

MODELO DE ANÁLISIS PARA RESOLVER PROBLEMAS



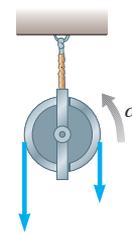
Objeto rígido bajo aceleración angular constante. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo bajo aceleración angular constante, uno puede aplicar las ecuaciones de la cinemática que son análogas a las del movimiento traslacional de una partícula bajo aceleración constante:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (10.6)$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (10.7)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (10.8)$$

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (10.9)$$



Objeto rígido bajo momento de torsión neto. Si sobre un objeto rígido libre que da vueltas en torno a un eje fijo actúa un momento de torsión externo neto, el objeto se somete a una aceleración angular α , donde

$$\sum \tau = I\alpha \quad (10.21)$$

Esta ecuación es el análogo rotacional a la segunda ley de Newton en el modelo de partícula bajo una fuerza neta.

Preguntas

O indica pregunta complementaria.

- ¿Cuál es la rapidez angular del segundero de un reloj? ¿Cuál es la dirección de $\vec{\omega}$ cuando ve un reloj que cuelga de una pared vertical? ¿Cuál es la magnitud del vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ del segundero?
- Una hoja de un par de tijeras da vueltas contra las manecillas del reloj en el plano xy . ¿Cuál es la dirección de $\vec{\omega}$? ¿Cuál es la dirección de $\vec{\alpha}$ si la magnitud de la velocidad angular disminuye con el tiempo?
- O Una rueda se mueve con aceleración angular constante de 3 rad/s^2 . En diferentes momentos su rapidez angular es -2 rad/s , 0 y $+2 \text{ rad/s}$. En estos momentos, analice la magnitud de la componente tangencial de la aceleración y la magnitud de la componente radial de aceleración para un punto sobre el borde de la rueda. Clasifique los siguientes seis elementos de mayor a menor: a) $|a_t|$ cuando $\omega = -2 \text{ rad/s}$, b) $|a_t|$ cuando $\omega = -2 \text{ rad/s}$, c) $|a_t|$ cuando $\omega = 0$, d) $|a_t|$ cuando $\omega = 0$, e) $|a_t|$ cuando $\omega = 2 \text{ rad/s}$, f) $|a_t|$ cuando $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Si dos elementos son iguales, muéstrelos como iguales en su clasificación. Si una cantidad es igual a cero, muéstrelo en su clasificación.
- O i) Suponga que las llantas estándar de un automóvil se sustituyen con llantas 1.30 veces mayores en diámetro. En tal caso, ¿cuál será la lectura del velocímetro? a) 1.69 veces mayor, b) 1.30 veces mayor, c) exacta, d) 1.30 veces menor, e) 1.69 veces menor, d) inexacta por un factor impredecible. ii) ¿Cuál será la economía de combustible del automóvil en millas por galón o km/L ? a) 1.69 veces mejor, b) 1.30 veces mejor, c) esencialmente la misma, d) 1.30 veces peor, e) 1.69 veces peor.
- O La figura 10.8 muestra un sistema de cuatro partículas unidas mediante barras rígidas ligeras. Suponga $a = by$ M es un poco mayor que m . i) ¿Respecto a cuál de los ejes coordenados el sistema tiene el menor momento de inercia? a) El eje x . b) El eje y . c) El eje z . d) El momento de inercia tiene el mismo valor pequeño para dos ejes. e) El momento de inercia es el mismo para todos los ejes. ii) ¿En torno a cuál eje el sistema tiene el mayor momento de inercia? a) El eje x . b) El eje y . c) El eje z . d) El momento de inercia tiene el mismo gran valor para dos ejes. e) El momento de inercia es el mismo para todos los ejes.
- Suponga que sólo dos fuerzas externas actúan sobre un objeto rígido estable y las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección. ¿Bajo qué condiciones el objeto comienza a dar vuelta?
- O Como se muestra en la figura 10.19, un cordón está enrollado sobre un carrete cilíndrico montado sobre un eje fijo horizontal sin fricción. Se llevan a cabo dos experimentos. a) El cordón se jala con una fuerza constante de 50 N . b) Un objeto de 50 N de peso cuelga del cordón y se libera. ¿Las aceleraciones angulares son iguales en los dos experimentos? Si no, ¿en cuál experimento la aceleración angular es mayor en magnitud?
- Explique cómo puede usar el aparato descrito en el ejemplo 10.10 para determinar el momento de inercia de la rueda. (Si la rueda no tiene una densidad de masa uniforme, el momento de inercia no necesariamente es igual a $\frac{1}{2}MR^2$.)
- O Sobre un objeto se ejerce un momento de torsión neto constante distinto de cero. ¿Cuál de los siguientes *no* puede ser constante? Elija todos los que apliquen. a) Posición angular, b) velocidad angular, c) aceleración angular, d) momento de inercia, e) energía cinética, f) ubicación del centro de masa.
- Con los resultados del ejemplo 10.10, ¿cómo calcularía la rapidez angular de la rueda y la rapidez lineal del contrapeso suspendido en $t = 2 \text{ s}$, si supone que el sistema se libera desde el reposo en $t = 0$? ¿La expresión $v = R\omega$ es válida en esta situación?
- Si una pequeña esfera de masa M se coloca al final de la barra en la figura 10.21, ¿el resultado para ω sería mayor, menor o igual que el valor obtenido en el ejemplo 10.11?
- O Una esfera sólida de aluminio de radio R tiene momento de inercia I en torno a un eje a través de su centro. ¿Cuál es el momento de inercia en torno a un eje central de una esfera sólida de aluminio de radio $2R$? a) I , b) $2I$, c) $4I$, d) $8I$, e) $16I$, f) $32I$.
- Explique porqué al cambiar el eje de rotación de un objeto cambia su momento de inercia.
- Suponga que saca dos huevos del refrigerador, uno cocido y el otro crudo. Quiere determinar cuál es el huevo cocido sin romper los huevos. Esta determinación se puede hacer al girar los dos huevos sobre el suelo y comparar los movimientos rotacionales. ¿Cuál huevo gira más rápido? ¿Cuál huevo da vueltas de manera más uniforme? Explique.
- ¿Cuál de las entradas de la tabla 10.2 se aplica para encontrar el momento de inercia de una larga tubería de desagüe recta giratoria en torno a su eje de simetría? ¿De un aro de bordado giratorio en torno a un eje a través de su centro y que es perpendicular a su plano? ¿De una puerta uniforme que gira en sus bisagras? ¿De una moneda que gira en torno a un eje a través de su centro y es perpendicular a sus caras?
- ¿Es posible cambiar la energía cinética traslacional de un objeto sin cambiar su energía rotacional?
- ¿Un objeto debe estar girando para tener un momento de inercia distinto de cero?
- Si ve un objeto giratorio, ¿necesariamente existe un momento de torsión neto actuando sobre él?
- O Una decoración cuelga del techo de su habitación en el extremo inferior de una cuerda. Su aburrido compañero de cuarto gira la decoración en sentido de las manecillas del reloj varias veces para enrollar la cuerda. Cuando su compañero la libera, la decoración comienza a girar contra las manecillas del reloj, lentamente al principio y después cada vez más rápido. Considere la dirección contra las manecillas del reloj como positiva y suponga que la fricción es despreciable. Cuando la cuerda está completamente desenrollada, el ornamento tiene su máxima rapidez de rotación. i) En este momento, ¿su aceleración angular es a) positiva, b) negativa o c) cero? ii) La decoración continúa girando, y enrolla la cuerda contra las manecillas del reloj mientras frena. En el momento, cuando finalmente se detiene, ¿su aceleración angular es a) positiva, b) negativa o c) cero?
- El diámetro polar de la Tierra es ligeramente menor que el diámetro ecuatorial. ¿Cómo cambiaría el momento de inercia de la Tierra en torno a su eje de rotación, si algún material cerca del ecuador se retira y transfiere a las regiones polares para hacer de la Tierra una esfera perfecta?

21. **O** Un balón de basquetbol rueda sobre un suelo sin deslizarse, y su centro de masa móvil a cierta velocidad. Un bloque de hielo de la misma masa se pone a deslizarse a través del suelo con la misma rapidez a lo largo de una línea paralela. **i)** ¿Cómo se comparan sus energías? a) El balón tiene más energía cinética. b) El hielo tiene más energía cinética. c) Tienen energías cinéticas iguales. **ii)** ¿Cómo se comparan sus cantidades de movimiento? a) El balón tiene más cantidad de movimiento. b) El hielo tiene más cantidad de movimiento. c) Tienen iguales cantidades de movimiento. d) Sus cantidades de movimiento tienen iguales magnitudes pero son vectores diferentes. **iii)** Los dos objetos encuentran una rampa que se eleva hacia arriba. a) El balón viajará a mayor distancia sobre la rampa. b) El hielo viajará a mayor distancia sobre la rampa. c) Ambos viajarán igualmente muy arriba sobre la rampa.
22. Suponga que pone su libro de texto a deslizar sobre el suelo de un gimnasio con cierta rapidez inicial. Rápidamente deja de moverse debido a una fuerza de fricción que el suelo ejerce sobre él. A continuación, pone a rodar un balón de basquetbol con la misma rapidez inicial. Sigue rodando de un extremo del gimnasio al otro. ¿Por qué el balón rueda tanto? ¿La fricción afecta significativamente su movimiento?
23. Tres objetos de densidad uniforme (una esfera sólida, un cilindro sólido y un cilindro hueco) se colocan en lo alto de un plano inclinado (figura P10.23). Todos se liberan desde

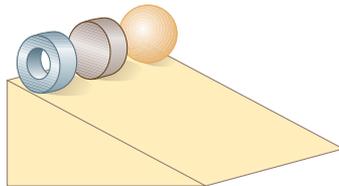


Figura P10.23

el reposo en la misma elevación y ruedan sin deslizarse. ¿Cuál objeto llega primero a la parte baja? ¿Cuál llega al último? Intente este experimento en casa y observe que el resultado es independiente de las masas y los radios de los objetos.

24. La figura P10.24 muestra una vista lateral de un triciclo infantil con llantas de caucho sobre una acera horizontal de concreto. Si una cuerda se une al pedal superior del extremo lejano y se jala hacia adelante horizontalmente, el triciclo rueda hacia adelante. En vez de ello, suponga que una cuerda se une al pedal inferior en el lado cercano y se jala hacia adelante horizontalmente, como se muestra en A. ¿El triciclo comienza a rodar? Si es así, ¿en qué dirección? Responda las mismas preguntas si a) la cuerda se jala hacia adelante y arriba como se muestra en B, b) la cuerda se jala recto hacia abajo como se muestra en C, y c) la cuerda se jala hacia adelante y abajo como se muestra en D. d) **¿Qué pasaría si?** La cuerda se amarra al borde de la rueda frontal y se jala arriba y atrás, como se muestra en E? e) Explique un patrón de razonamiento, con base en el diagrama, que facilite el responder estas preguntas. ¿Qué cantidad física debe evaluar?

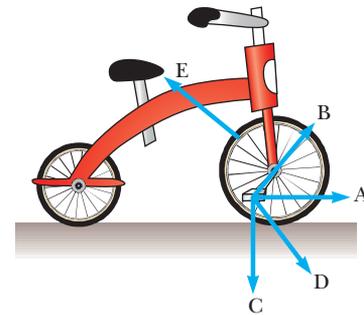


Figura P10.24

Problemas

Sección 10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

1. Durante cierto periodo, la posición angular de una puerta que se balancea se describe mediante $\theta = 5.00 + 10.0t + 2.00t^2$, donde θ está en radianes y t en segundos. Determine la posición, rapidez y aceleración angulares de la puerta en a) a $t = 0$ y b) a $t = 3.00$ s.
2. Una barra en una bisagra parte del reposo y da vueltas con una aceleración angular $\alpha = (10 + 6t)$ rad/s², donde t está en segundos. Determine el ángulo en radianes que recorre la barra en los primeros 4.00 s.

Sección 10.2 Cinemática rotacional: Objeto rígido bajo aceleración angular constante

3. Una rueda parte del reposo y da vueltas con aceleración angular constante para alcanzar una rapidez angular de 12.0 rad/s en 3.00 s. Encuentre a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda y b) el ángulo en radianes que da vueltas en este intervalo de tiempo.
4. Una centrífuga en un laboratorio médico da vueltas a una rapidez angular de 3 600 rev/min. Cuando se apaga da vueltas a 50.0 revoluciones antes de llegar al reposo. Encuentre la aceleración angular constante de la centrífuga.

5. Un motor eléctrico que hace girar una rueda de molino a 100 rev/min se apaga. Después la rueda se mueve con aceleración angular negativa constante de 2.00 rad/s^2 de magnitud.
 - a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la rueda llega al reposo?
 - b) ¿Cuántos radianes gira mientras va frenando?
6. Una rueda giratoria requiere 3.00 s para dar vueltas 37.0 revoluciones. Su rapidez angular al final del intervalo de 3.00 s es 98.0 rad/s . ¿Cuál es la aceleración angular constante de la rueda?
7. a) Encuentre la rapidez angular de la rotación de la Tierra sobre su eje. Mientras la Tierra gira hacia el este, se ve el cielo girar hacia el oeste a esta misma rapidez.

b) *Las lluviosas Pléyades occidentales
Y buscan más allá del mar
La cabeza con la que soñaré
Que no soñará conmigo.*

—A.E. Housman
(© Robert E. Symons)

Cambridge, Inglaterra, está a una longitud 0° , y Saskatoon, Saskatchewan, Canadá, está a una longitud 107° oeste. ¿Cuánto tiempo transcurre después de que las Pléyades se ponen en Cambridge hasta que dichas estrellas caen bajo el horizonte occidental en Saskatoon?

8. Un carrusel está estable. Un perro corre sobre el suelo justo afuera de la circunferencia del carrusel, y se mueve con una rapidez angular constante de 0.750 rad/s . El perro no cambia su ritmo cuando ve lo que ha estado buscando: un hueso que descansa en el borde del carrusel a un tercio de revolución enfrente de él. En el instante en que el perro ve el hueso ($t = 0$), el carrusel comienza a moverse en la dirección en que corre el animal, con una aceleración angular constante igual a 0.0150 rad/s^2 .
 - a) ¿En qué tiempo el perro alcanzará el hueso?
 - b) El confundido perro sigue corriendo y pasa el hueso. ¿Cuánto tiempo después de que el carrusel comienza a girar el perro y el hueso se emparejan por segunda vez?
9. La tina de una lavadora comienza su ciclo de giro, parte del reposo y gana rapidez angular de manera estable durante 8.00 s, momento en que gira a 5.00 rev/s . En este punto, la persona que lava abre la tapa y un interruptor de seguridad apaga la máquina. La tina frena lentamente hasta el reposo en 12.0 s. ¿Cuántas revoluciones realiza la tina mientras está en movimiento?

Sección 10.3 Cantidades angulares y traslacionales

10. Un automóvil de carreras viaja en una pista circular de 250 m de radio. Si supone que el automóvil se mueve con una rapidez constante de 45.0 m/s , encuentre a) su rapidez angular y b) la magnitud y dirección de su aceleración.
11. Haga una estimación de un orden de magnitud del número de revoluciones que da en un año la llanta de un automóvil común. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.
12. ● La figura P10.12 muestra el mecanismo conductor de una bicicleta que tiene ruedas de 67.3 cm de diámetro y manivela de pedal de 17.5 cm de largo. El ciclista pedalea a una cadencia estable de 76.0 rev/min. La cadena se engancha con un piñón frontal de 15.2 cm de diámetro y una cuerda de cadena trasera de 7.00 cm de diámetro.
 - a) Calcule la rapidez de la cadena en relación con el cuadro de la bicicleta.
 - b) Calcule la rapidez angular de las ruedas de la bicicleta.
 - c) Calcule la rapidez de la bicicleta en relación con el camino.
 - d) ¿Qué parte de la información, si alguna, no es necesaria para los cálculos?



Figura P10.12

13. Una rueda de 2.00 m de diámetro se encuentra en un plano vertical y da vueltas con una aceleración angular constante de 4.00 rad/s^2 . La rueda parte del reposo en $t = 0$ y el vector radio de cierto punto P sobre el borde forma un ángulo de 57.3° con la horizontal en este tiempo. En $t = 2.00 \text{ s}$, encuentre
 - a) la rapidez angular de la rueda,
 - b) la rapidez tangencial y la aceleración total del punto P y
 - c) la posición angular del punto P .
14. Un lanzador de disco (figura P10.14) acelera un disco desde el reposo a una rapidez de 25.0 m/s al girarlo 1.25 rev. Suponga que el disco se mueve en el arco de un círculo de 1.00 m de radio.
 - a) Calcule la rapidez angular final del disco.
 - b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, si supone que es constante.
 - c) Calcule el intervalo de tiempo requerido para que el disco acelere desde el reposo a 25.0 m/s .



Figura P10.14

15. Un objeto pequeño con 4.00 kg de masa se mueve contra las manecillas del reloj con rapidez constante de 4.50 m/s en un círculo de 3.00 m de radio con centro en el origen. Comienza en el punto con vector de posición $(3.00\hat{i} + 0\hat{j})$. Después se somete a un desplazamiento angular de 9.00 rad.
 - a) ¿Cuál es su vector de posición? Use notación de vector unitario para todas las respuestas vectoriales.
 - b) ¿En qué cuadrante se ubica la partícula y qué ángulo forma su vector de posición con el eje positivo x ?
 - c) ¿Cuál es su velocidad?
 - d) ¿En qué dirección se mueve? Bosqueje sus vectores de posición, velocidad y aceleración.
 - e) ¿Cuál es su aceleración?
 - f) ¿Qué fuerza total se ejerce sobre el objeto?
16. Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una rapidez de 22.0 m/s en 9.00 s. Las llantas tienen 58.0 cm de diámetro y no se deslizan sobre el pavimento.
 - a) Encuentre

el número de revoluciones que hace cada llanta durante este movimiento. b) ¿Cuál es la rapidez angular final de una llanta en revoluciones por segundo?

17. Un disco de 8.00 cm de radio da vueltas con una rapidez constante de 1 200 rev/min en torno a su eje central. Determine: a) su rapidez angular, b) la rapidez tangencial en un punto a 3.00 cm de su centro, c) la aceleración radial de un punto sobre el borde y d) la distancia total que recorre en 2.00 s un punto en el borde.
18. ● Una escalera recta se apoya contra la pared de una casa. La escalera tiene rieles de 4.90 m de largo, unidos mediante peldaños de 0.410 m de largo. Su extremo inferior está sobre suelo sólido pero inclinado de modo que la parte superior de la escalera está 0.690 m a la izquierda de donde debe estar, y es inseguro ascender por la escalera. Usted quiere poner una roca bajo un pie de la escalera para compensar la pendiente del terreno. a) ¿Cuál debe ser el grosor de la roca plana? b) ¿Usar las ideas de este capítulo hace más fácil explicar la solución al inciso a)? Explique su respuesta.
19. Un automóvil que viaja sobre una pista circular plana (sin perralte) acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración tangencial de 1.70 m/s². El automóvil recorre un cuarto del camino alrededor del círculo antes de derrapar de la pista. Determine el coeficiente de fricción estática entre el automóvil y la pista a partir de estos datos.

20. En el inciso B) del ejemplo 10.2, el disco compacto se modeló como un objeto rígido bajo aceleración angular constante para encontrar el desplazamiento angular total durante el tiempo de reproducción del disco. En realidad, la aceleración angular de un disco no es constante. En este problema, explore el tiempo real dependiente de la aceleración angular. a) Suponga que la pista en el disco es una espiral tal que bucles adyacentes de la pista están separados por una distancia pequeña h . Demuestre que el radio r de una porción conocida de la pista se proporciona por

$$r = r_i + \frac{h}{2\pi} \theta$$

donde r_i es el radio de la porción más interna de la pista y θ es el ángulo que el disco recorre para llegar a la posición de la pista de radio r . b) Demuestre que la rapidez de cambio del ángulo θ se conoce por

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r_i + (h/2\pi)\theta}$$

donde v es la rapidez constante con que la superficie del disco pasa el láser. c) A partir del resultado del inciso b), use integración para encontrar una expresión para el ángulo θ como función del tiempo. d) A partir del resultado del inciso c), use diferenciación para encontrar la aceleración angular del disco como función del tiempo.

Sección 10.4 Energía cinética rotacional

21. Las cuatro partículas de la figura P10.21 están conectadas mediante barras rígidas de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. El sistema da vueltas en torno al eje z con una rapidez angular de 6.00 rad/s. Calcule a) el momento de inercia del sistema en torno al eje z y b) la energía cinética rotacional del sistema.
22. ● Barras rígidas de masa despreciable que yacen a lo largo del eje y conectan tres partículas (figura P10.22). El sistema da vueltas en torno al eje x con una rapidez angular de 2.00

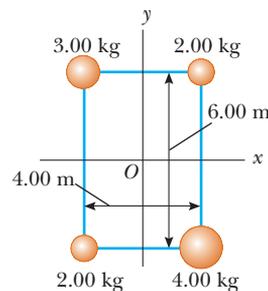


Figura P10.21

rad/s. Encuentre a) el momento de inercia en torno al eje x y la energía cinética rotacional total evaluada a partir de $\frac{1}{2}I\omega^2$ y b) la rapidez tangencial de cada partícula y la energía cinética total evaluada a partir $\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$. c) Compare las respuestas para energía cinética en los incisos a) y b).

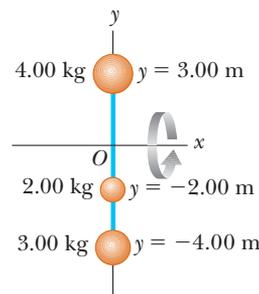


Figura P10.22

23. Dos bolas con masas M y m se conectan mediante una barra rígida de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la figura P10.23. Para un eje perpendicular a la barra, muestre que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa a través del centro de masa. Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM/(m + M)$.

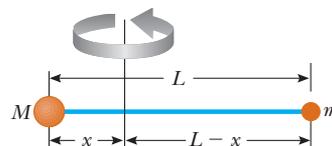


Figura P10.23

24. Mientras funciona un motor de gasolina, un volante que da vuelta con el cigüeñal almacena energía después de cada explosión de combustible para proporcionar la energía requerida para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En el motor de cierto tractor de pasto, suponga que un volante debe tener no más de 18.0 cm de diámetro. Su grosor, medido a lo largo de su eje de rotación, debe no ser mayor a 8.00 cm. El volante debe liberar 60.0 J de energía cuando su rapidez angular cae de 800 rev/min a 600 rev/min. Diseñe un volante de acero de refuerzo para satisfacer estos requisitos con la masa más pequeña que pueda lograr razonablemente. Suponga que el material tiene la densidad que se menciona en la tabla 14.1. Especifique la forma y masa del volante.

25. ● Una *war-wolf* o *trebuchet* (catapulta) es un dispositivo que se usó durante la edad media para lanzar rocas a los castillos, y ahora a veces se usa para arrojar grandes vegetales y pianos como deporte. En la figura P10.25 se muestra un *trebuchet* simple. Modélelo como una barra rígida de masa despreciable de 3.00 m de largo que une partículas de 60.0 kg y 0.120 kg de masa en sus extremos. Puede dar vuelta sobre un eje horizontal sin fricción perpendicular a la barra y a 14.0 cm de la partícula con mayor masa. La barra se libera desde el reposo en una orientación horizontal. a) Encuentre la rapidez máxima que logra el objeto de 0.120 kg. b) Mientras el objeto de 0.120 kg gana rapidez, ¿se mueve con aceleración constante? ¿Se mueve con aceleración tangencial constante? ¿El *trebuchet* se mueve con aceleración angular constante? ¿Tiene cantidad de movimiento constante? ¿El sistema *trebuchet*-Tierra tiene energía mecánica constante?

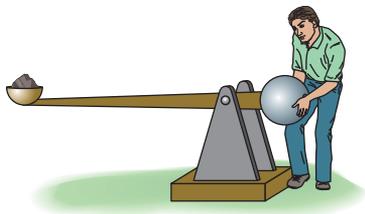


Figura P10.25

Sección 10.5 Cálculo de momentos de inercia

26. Tres delgadas barras idénticas, cada una de longitud L y masa m , se sueldan mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura P10.26. El ensamble da vueltas en torno a un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a la otra. Determine el momento de inercia de esta estructura.

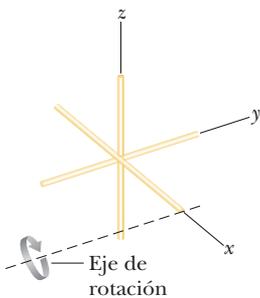


Figura P10.26

27. La figura P10.27 muestra una vista lateral de la llanta de un automóvil. Haga un modelo que tenga dos paredes laterales

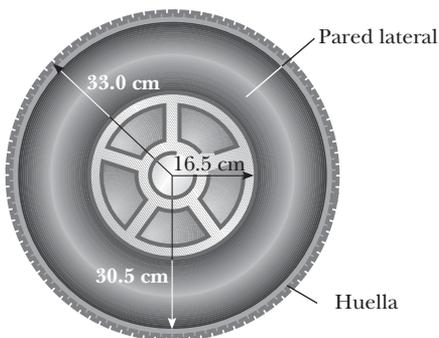


Figura P10.27

de grosor uniforme de 0.635 cm y una pared de huella de 2.50 cm de grosor uniforme y 20.0 cm de ancho. Suponga que el caucho tiene densidad uniforme igual a $1.10 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Encuentre su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro.

28. ● Una puerta delgada sólida uniforme tiene 2.20 m de altura, 0.870 m de ancho y 23.0 kg de masa. Encuentre su momento de inercia para rotación en sus bisagras. ¿Alguna parte de la información es innecesaria?
29. ¡Atención! ¡Giro de 180°! Calcule una estimación de un orden de magnitud para el momento de inercia de su cuerpo mientras está de pie y da vuelta en torno a un eje vertical a través de lo alto de su cabeza y el punto a la mitad entre sus tobillos. En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.
30. Muchas máquinas emplean levas para varios propósitos como abrir y cerrar válvulas. En la figura P10.30, la leva es un disco circular giratorio sobre un eje que no pasa a través del centro del disco. En la fabricación de la leva, primero se elabora un cilindro sólido uniforme de radio R . Luego se taladra un agujero fuera del centro, de radio $R/2$, paralelo al eje del cilindro y con centro en un punto a una distancia $R/2$ desde el centro del cilindro. Después la leva, de masa M , se desliza sobre la flecha circular y se suelda en su lugar. ¿Cuál es la energía cinética de la leva cuando gira con rapidez angular ω en torno al eje del árbol?

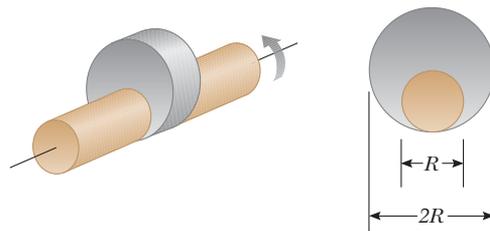


Figura P10.30

31. Con el procedimiento del ejemplo 10.4, pruebe que el momento de inercia en torno al eje y' de la barra rígida en la figura 10.9 es $\frac{1}{3}ML^2$.

Sección 10.6 Momento de torsión

32. La caña de pescar en la figura P10.32 forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión que ejerce el pez en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de las manos del pescador?

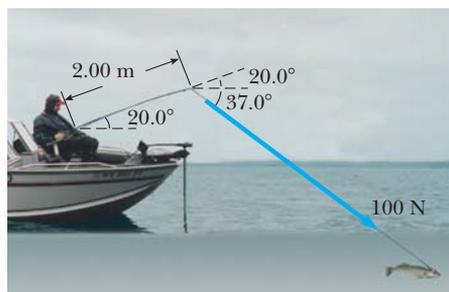


Figura P10.32

33. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura P10.33 en torno al eje a través de O , considerando $a = 10.0 \text{ cm}$ y $b = 25.0 \text{ cm}$.

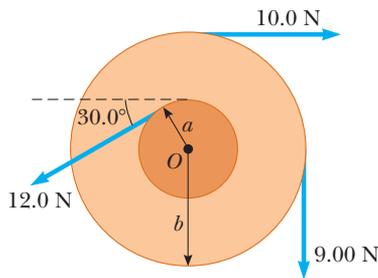


Figura P10.33

Sección 10.7 Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

- 34. Una rueda de molino tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. Parte del reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0.600 N·m que el motor ejerce sobre la rueda. a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su rapidez operativa final de 1 200 rev/min? b) ¿Cuántas revoluciones da mientras acelera?
- 35. Un avión a escala con 0.750 kg de masa está amarrado con un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de unión. a) Encuentre el momento de torsión que produce el empuje neto en torno al centro del círculo. b) Encuentre la aceleración angular del avión cuando está en vuelo a nivel. c) Encuentre la aceleración traslacional del avión tangente a su trayectoria de vuelo.
- 36. La combinación de una fuerza aplicada y una fuerza de fricción produce un momento de torsión total constante de 36.0 N·m sobre una rueda giratoria en torno a un eje fijo. La fuerza aplicada actúa durante 6.00 s. Durante este tiempo, la rapidez angular de la rueda aumenta de 0 a 10.0 rad/s. Después se retira la fuerza aplicada y la rueda llega al reposo en 60.0 s. Encuentre a) el momento de inercia de la rueda, b) la magnitud del momento de torsión friccionante y c) el número total de revoluciones de la rueda.
- 37. Un bloque de masa $m_1 = 2.00$ kg y un bloque de masa $m_2 = 6.00$ kg están conectados mediante una cuerda sin masa sobre una polea en la forma de un disco sólido que tiene radio $R = 0.250$ m y masa $M = 10.0$ kg. A estos bloques se les permite moverse sobre una cuña fija de ángulo $\theta = 30.0^\circ$, como se muestra en la figura P10.37. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques. Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determine a) la aceleración de los dos bloques y b) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.

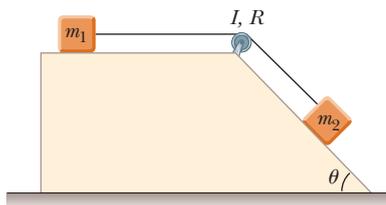


Figura P10.37

- 38. Una rueda de alfarero (un disco de piedra grueso de 0.500 m de radio y 100 kg de masa) gira libremente a 50.0 rev/min. El alfarero puede detener la rueda en 6.00 s al presionar un trapo húmedo contra el borde y ejercer una fuerza radialmente hacia adentro de 70.0 N. Encuentre el coeficiente efectivo de fricción cinética entre la rueda y el trapo.

- 39. Un motor eléctrico hace girar un volante mediante una banda transportadora que acopla una polea en el motor y una polea que está rígidamente unida al volante, como se muestra en la figura P10.39. El volante es un disco sólido con una masa de 80.0 kg y un diámetro de 1.25 m. Da vuelta sobre un eje sin fricción. Su polea tiene masa mucho más pequeña y un radio de 0.230 m. La tensión en el segmento superior (tenso) de la banda es 135 N, y el volante tiene una aceleración angular en sentido de las manecillas del reloj de 1.67 rad/s². Encuentre la tensión en el segmento inferior (flojo) de la banda.

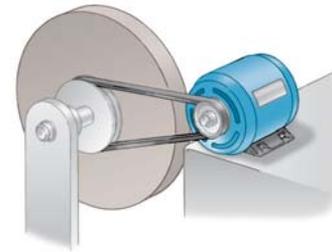


Figura P10.39

- 40. ● Un disco que tiene 100 kg·m² de momento de inercia es libre de dar vuelta sin fricción, partiendo del reposo, en torno a un eje fijo a través de su centro, como se muestra en la parte superior de la figura 10.19. Una fuerza tangencial cuya magnitud puede variar de $T = 0$ a $T = 50.0$ N se aplica a cualquier distancia que varíe de $R = 0$ a $R = 3.00$ m del eje de rotación. Encuentre un par de valores de T y R que hagan que el disco complete 2.00 revoluciones en 10.0 s. ¿Existe una respuesta, o no hay respuesta, o hay dos respuestas, o más de dos, o muchas, o un número infinito?

Sección 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

- 41. En una ciudad con un problema de contaminación de aire, un autobús no tiene motor de combustión. Corre con la energía que extrae de un gran volante que gira rápidamente bajo el suelo del autobús. En la terminal de autobuses, el volante se pone a girar a su máxima rapidez de rotación de 4 000 rev/min mediante un motor eléctrico. Cada vez que el autobús aumenta rapidez, el volante frena ligeramente. El autobús está equipado con frenos regenerativos de modo que el volante aumenta rapidez cuando el autobús frena. El volante es un cilindro sólido uniforme con 1 600 kg de masa y 0.650 m de radio. El cuerpo del autobús realiza trabajo contra la resistencia del aire y la resistencia de rodamiento a la relación promedio de 18.0 hp mientras viaja con una rapidez promedio de 40.0 km/h. ¿Cuánto puede viajar el autobús antes de que el volante tenga que ponerse a girar para aumentar la rapidez de nuevo?
- 42. El Big Ben, el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene una manecilla horaria de 2.70 m de largo con una masa



Figura P10.42 Problemas 42 y 76.

de 60.0 kg y un minuterero de 4.50 m de largo con una masa de 100 kg (figura P10.42). Calcule la energía cinética rotacional total de las dos manecillas en torno al eje de rotación. (Modele las manecillas como largas barras delgadas.)

43. El trompo de la figura P10.43 tiene un momento de inercia igual a $4.00 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e inicialmente está en reposo. Es libre de dar vueltas en torno al eje estable AA' . Una cuerda, enrollada alrededor de una espiga a lo largo del eje del trompo, se jala en tal forma que mantiene una tensión constante de 5.57 N. Si la cuerda no se desliza mientras se desenrolla de la espiga, ¿cuál es la rapidez angular del trompo después de jalar 80.0 cm de cuerda de la espiga?

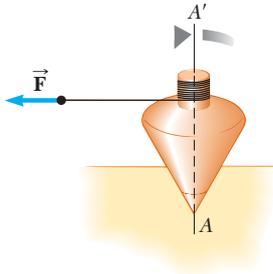


Figura P10.43

44. ● Considere el sistema que se muestra en la figura P10.44 con $m_1 = 20.0 \text{ kg}$, $m_2 = 12.5 \text{ kg}$, $R = 0.200 \text{ m}$ y la masa de la polea uniforme $M = 5.00 \text{ kg}$. El objeto m_2 descansa sobre el suelo y el objeto m_1 está 4.00 m sobre el suelo cuando se libera del reposo. El eje de la polea no tiene fricción. La cuerda es ligera, no se estira y no se desliza sobre la polea. Calcule el intervalo de tiempo requerido para que m_1 golpee el suelo. ¿Cómo cambiaría su respuesta si la polea no tuviera masa?

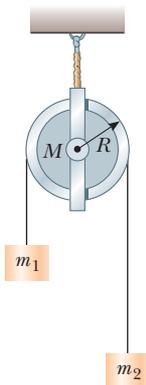


Figura P10.44

45. En la figura P10.45, el bloque deslizable tiene una masa de 0.850 kg, el contrapeso tiene una masa de 0.420 kg y la polea es un cilindro hueco con una masa de 0.350 kg, radio interior de 0.020 0 m y radio exterior de 0.030 0 m. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie horizontal es 0.250. La polea gira sin fricción sobre su eje. La cuerda ligera no se estira y no se desliza sobre la polea. El bloque tiene una velocidad de 0.820 m/s hacia la polea cuando pasa a través de una fotopuerta. a) Use métodos energéticos para predecir su rapidez después de que se mueve a una segunda fotopuerta, a 0.700 m de distancia. b) Encuentre la rapidez angular de la polea en el mismo momento.

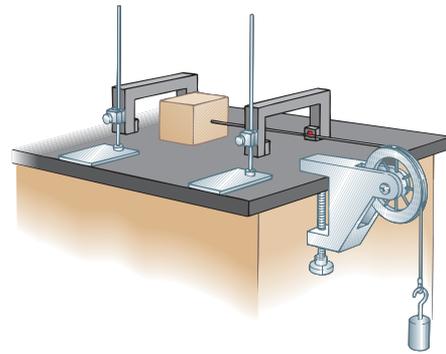


Figura P10.45

46. Una barra cilíndrica de 24.0 cm de largo con 1.20 kg de masa y 1.50 cm de radio, tiene una bola de 8.00 cm de diámetro y 2.00 kg de masa unida a un extremo. El arreglo originalmente es vertical y estable, con la bola en lo alto. El sistema es libre de girar en torno al extremo inferior de la barra después de darle un ligero codazo. a) Después de que la barra da vuelta 90° , ¿cuál es su energía cinética rotacional? b) ¿Cuál es la rapidez angular de la barra y la bola? c) ¿Cuál es la rapidez lineal de la bola? d) ¿Cómo se compara esta rapidez con la rapidez si la bola cae libremente la misma distancia de 28 cm?
47. Un objeto con un peso de 50.0 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de un carrete de 0.250 m de radio y 3.00 kg de masa. El carrete es un disco sólido, libre de dar vueltas en un plano vertical en torno al eje horizontal que pasa a través de su centro. El objeto suspendido se libera 6.00 m sobre el suelo. a) Determine la tensión en la cuerda, la aceleración del objeto y la rapidez con la que el objeto golpea el suelo. b) Verifique su última respuesta con el uso del principio de conservación de la energía para encontrar la rapidez con la que el objeto golpea el suelo.
48. Un carrusel horizontal de 800 N es un disco sólido de 1.50 m de radio, que parte del reposo mediante una fuerza horizontal constante de 50.0 N aplicada tangencialmente al borde del disco. Encuentre la energía cinética del disco después de 3.00 s.
49. Este problema describe un método experimental para determinar el momento de inercia de un objeto con forma irregular tal como la carga para un satélite. La figura P10.49 muestra un contrapeso de masa m suspendido mediante una cuerda enrollada alrededor de un carrete de radio r , que forma parte de una tornamesa que sostiene al objeto. La tornamesa puede dar vuelta sin fricción. Cuando el contrapeso se libera desde el reposo, descende una distancia h y adquiere una rapidez v . Demuestre que el momento de inercia I del aparato giratorio (incluida la tornamesa) es $mr^2(2gh/v^2 - 1)$.

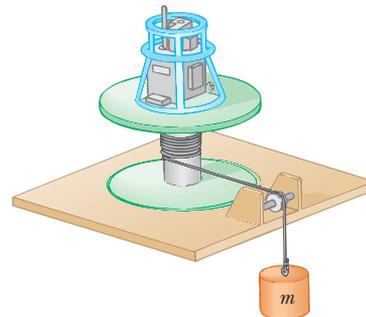


Figura P10.49

50. La cabeza de una cortadora de pasto tiene 100 g de cuerda devanados en un carrete cilíndrico ligero con diámetro interior de 3.00 cm y diámetro exterior de 18.0 cm, como se muestra en la figura P10.50. La cuerda tiene una densidad lineal de 10.0 g/m. Una sola hebra de la cuerda se extiende 16.0 cm desde el borde exterior del carrete. a) Cuando se enciende, la cortadora aumenta su velocidad de 0 a 2 500 rev/min en 0.215 s. a) ¿Qué potencia promedio entrega el motor de la cortadora a la cabeza mientras acelera? b) Cuando la cortadora corta pasto, gira a 2 000 rev/min y el pasto ejerce una fuerza tangencial promedio de 7.65 N sobre el extremo exterior de la cuerda, que todavía está a una distancia radial de 16.0 cm desde el borde exterior del carrete, ¿cuál es la potencia entregada a la cabeza bajo carga?

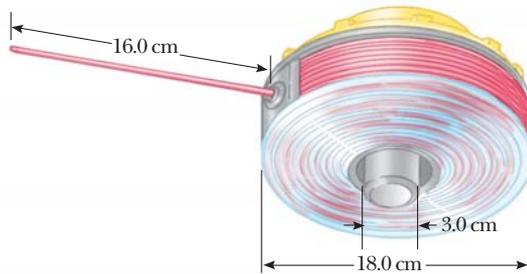


Figura P10.45

51. a) Un disco sólido uniforme de radio R y masa M es libre de dar vuelta sobre un pivote sin fricción a través de un punto sobre su borde (figura P10.51). Si el disco se libera desde el reposo en la posición que se muestra por el círculo azul, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco llega a la posición indicada por el círculo a rayas? b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo en el disco en la posición a rayas? c) ¿Qué pasaría si? Repita el inciso a) con un aro uniforme.

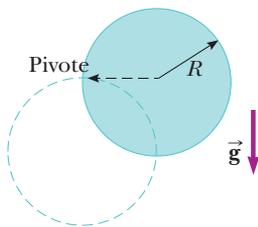


Figura P10.51

Sección 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

52. ● Una esfera sólida se libera de una altura h desde lo alto de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Calcule la rapidez de la esfera cuando llega a la parte baja del plano inclinado a) en el caso en que rueda sin deslizarse y b) en el caso que se desliza sin fricción sin rodar. c) Compare los intervalos de tiempo requeridos para llegar al fondo en los casos a) y b).
53. Un cilindro de 10.0 kg de masa rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. En cierto instante su centro de masa tiene una rapidez de 10.0 m/s. Determine a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa y c) su energía total.
54. ● Un cubo uniforme de masa m y longitud de lado r se desliza con rapidez v sobre una superficie horizontal con fricción des-

preciable. Después el cubo se mueve sobre un plano inclinado uniforme que forma un ángulo θ con la horizontal. Un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizarse con su centro de masa móvil con rapidez v y encuentra un plano inclinado del mismo ángulo de inclinación pero con suficiente fricción que el cilindro continúa rodando sin deslizarse. a) ¿Cuál objeto recorrerá mayor distancia arriba del plano? b) Encuentre la diferencia entre las distancias máximas que los objetos viajan por el plano. c) ¿Cuál es la explicación para esta diferencia en las distancias recorridas?

55. a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Compare esta aceleración con la de un aro uniforme. b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que se requiere para mantener movimiento de rodamiento puro para el disco?
56. Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan lado a lado en lo alto de un plano inclinado de altura h . Si se liberan desde el reposo al mismo tiempo y rueda sin deslizarse, ¿cuál objeto alcanza primero la parte baja? Verifique su respuesta al calcular sus magnitudes de velocidad cuando llegan a la parte baja en término de h .
57. ● Una lata metálica que contiene sopa de hongos condensada tiene 215 g de masa, 10.8 cm de alto y 6.38 cm de diámetro. Se coloca en reposo sobre su lado en lo alto de un plano inclinado de 3.00 m de largo que está a 25.0° con la horizontal y luego se libera para rodar recto hacia abajo. Llega a la parte baja del plano después de 1.50 s. Si supone conservación de energía mecánica, calcule el momento de inercia de la lata. ¿Qué parte de la información, si alguna, es innecesaria para calcular la solución?
58. ● Una pelota de tenis es una esfera hueca con una pared delgada. Se pone a rodar sin deslizarse a 4.03 m/s sobre una sección horizontal de una pista, como se muestra en la figura P10.58. Rueda alrededor del interior de un bucle circular vertical de 90.0 cm de diámetro y finalmente deja la pista en un punto 20.0 cm abajo de la sección horizontal. a) Encuentre la rapidez de la pelota en lo alto del bucle. Demuestre que no caerá de la pista. b) Encuentre su rapidez mientras deja la pista. ¿Qué pasaría si? c) Suponga que la fricción estática entre la pelota y la pista es despreciable, de modo que la pelota se desliza en lugar de rodar. ¿Su rapidez por lo tanto sería mayor, menor o igual en lo alto del bucle? Explique.

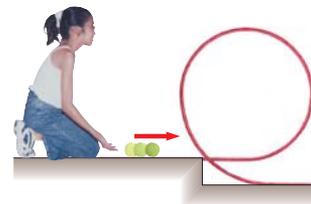


Figura P10.58

Problemas adicionales

59. Como se muestra en la figura P10.59, las chimeneas que se derrumban con frecuencia se rompen a la mitad de la caída porque el mortero entre los ladrillos no puede soportar mucho esfuerzo de corte. Conforme la chimenea comienza a caer, las fuerzas de corte deben actuar sobre las secciones superiores para acelerarlas tangencialmente de modo que puedan mantener la rotación de la parte más baja de la pila. Por simplicidad, modele la chimenea como una barra uniforme de longitud ℓ

articulada en el extremo inferior. La barra parte del reposo en una posición vertical (con el eje sin fricción en la parte baja) y cae bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué fracción de la longitud de la barra tiene una aceleración tangencial mayor que $g \sin \theta$, donde θ es el ángulo que la chimenea forma con el eje vertical?

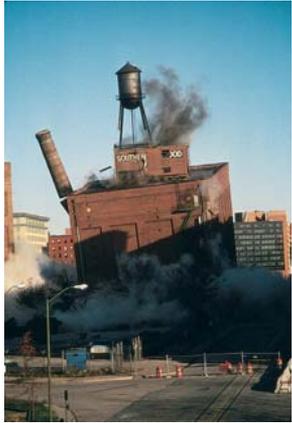


Figura P10.59 Un sitio de demolición de edificio en Baltimore, Maryland. A la izquierda está una chimenea, la mayor parte oculta por el edificio, que se rompió en su camino hacia abajo. Compare con la figura 10.18.

- 60. Problema de repaso.** Una batidora consiste en tres delgadas barras, cada una de 10.0 cm de longitud. Las barras divergen de un eje central, separadas unas de otras en 120° , y todas giran en el mismo plano. Una bola se une al final de cada barra. Cada bola tiene área de sección transversal de 4.00 cm^2 y está tan moldeada que tiene un coeficiente de arrastre de 0.600. Calcule la potencia de entrada que se requiere para girar la batidora a 1 000 rev/min a) en aire y b) en agua.
- 61.** Una cuerda de nailon ligero de 4.00 m de largo se devana alrededor de un carrete cilíndrico uniforme de 0.500 m de radio y 1.00 kg de masa. El carrete se monta sobre un eje sin fricción e inicialmente está en reposo. La cuerda se jala del carrete con una aceleración constante de 2.50 m/s^2 de magnitud. a) ¿Cuánto trabajo se consumió en el carrete cuando éste llega a una rapidez angular de 8.00 rad/s ? b) Si supone que hay suficiente cuerda en el carrete, ¿cuánto tarda el carrete en llegar a esta rapidez angular? c) ¿Hay suficiente cuerda en el carrete?

62. ● Un sistema de elevador en un edificio alto consiste en un carro de 800 kg y un contrapeso de 950 kg, unido mediante un cable que pasa sobre una polea de 280 kg de masa. La polea, llamada roldana, es un cilindro sólido de 0.700 m de radio que gira sobre un eje horizontal. El cable tiene masa comparativamente pequeña y longitud constante. No se desliza sobre la roldana. El carro y el contrapeso se mueven verticalmente, uno junto al otro dentro del mismo eje. Un número n de personas, cada una de 80.0 kg de masa, viajan en el carro del elevador móvil hacia arriba a 3.00 m/s y se aproximan al piso donde debe detenerse el carro. Como una medición de conservación de energía, una computadora desconecta el motor eléctrico del elevador justo en el momento correcto de modo que el sistema roldana-carro-contrapeso se desliza libremente sin fricción y llega al reposo en el piso deseado. Ahí es atrapado por un simple cerrojo, en lugar de un freno

pesado. a) Determine la distancia d que el carro se desliza hacia arriba como función de n . Evalúe la distancia para b) $n = 2$, c) $n = 12$ y d) $n = 0$. e) ¿La expresión en el inciso a) se aplica a todos los valores enteros de n o sólo para qué valores? Explique. f) Describa la forma de una gráfica de d con n . g) ¿Algunos datos son innecesarios para la solución? Explique. h) Contraste el significado de la conservación de energía que se usó en el enunciado de este problema y como se usó en el capítulo 8. i) Encuentre la magnitud de la aceleración del carro del elevador que se desliza, dependiente de n .

- 63.** ● La figura P10.63 es una fotografía de un aspersor. Su rotor consiste en tres tubos metálicos que se llenan con agua cuando una manguera se conecta a la base. A medida que el agua rocía desde los hoyos en los extremos de los brazos y el hoyo cerca del centro de cada brazo, el ensamble con los tres brazos da vueltas. Para analizar esta situación, haga las siguientes suposiciones: 1) Los brazos se modelan como delgadas barras rectas, cada una de longitud L . 2) El agua que viene del hoyo a la distancia ℓ desde el centro rocía horizontalmente, paralelo al suelo y perpendicular al brazo. 3) El agua emitida de los hoyos en los extremos de los brazos rocía radialmente hacia afuera desde el centro del rotor. Cuando está lleno con agua, cada brazo tiene masa m . El centro del ensamble no tiene masa. El agua expulsada de un hoyo a la distancia ℓ desde el centro causa una fuerza de empuje F sobre el rotor que contiene el hoyo. El montaje para el ensamble del rotor de tres brazos ejerce un momento de torsión friccionante que se describe mediante $\tau = -b\omega$, donde ω es la rapidez angular del ensamble. a) Imagine que el aspersor está en operación. Encuentre una expresión para la rapidez angular constante con la que da vueltas el ensamble *después* de completar un periodo inicial de aceleración angular. Su expresión debe estar en términos de F , ℓ y b . b) Imagine que el rociador ha estado en reposo y apenas se enciende. Encuentre una expresión para la aceleración angular *inicial* del rotor, esto es, la aceleración angular cuando los brazos están llenos con agua y el ensamble apenas comienza a moverse desde el reposo. Su expresión debe estar en términos de F , ℓ , m y L . c) Ahora, dé un paso hacia la realidad a partir del modelo simplificado. Los brazos en realidad están doblados como se muestra en la fotografía. Por lo tanto, el agua proveniente de los extremos de los brazos en realidad no se rocía radialmente. ¿Cómo afectará este hecho la rapidez angular constante con la que el ensamble da vueltas en el inciso a)? En realidad, ¿será mayor, menor o no cambia? Proporcione un argumento convincente para su respuesta. d) ¿Cómo el doblar de los brazos, descritos en el inciso c), afectará la aceleración angular en el inciso b)? En realidad, ¿será mayor, menor o no cambia? Proporcione un argumento convincente para su respuesta.

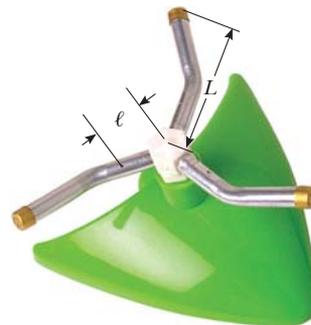


Figura P10.63

64. Un eje gira a 65.0 rad/s en el tiempo $t = 0$. De ahí en adelante, su aceleración angular se conoce por

$$\alpha = -10.0 \text{ rad/s}^2 - 5.00t \text{ rad/s}^2$$

donde t es el tiempo transcurrido. a) Encuentre su rapidez angular en $t = 3.00 \text{ s}$. b) ¿Cuánto ha girado en estos 3 s?

65. Una barra larga uniforme de longitud L y masa M se articula en torno a un eje horizontal sin fricción a través de un extremo. La barra se libera, casi del reposo en una posición vertical, como se muestra en la figura P10.65. En el instante cuando la barra está horizontal, encuentre: a) su rapidez angular, b) la magnitud de su aceleración angular, c) las componentes x y y de la aceleración de su centro de masa y d) las componentes de la fuerza de reacción en el eje.

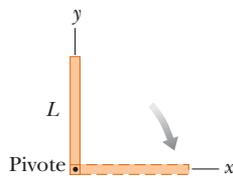


Figura P10.65

66. Un cordón se enrolla alrededor de una polea de masa m y radio r . El extremo libre del cordón está conectado a un bloque de masa M . El bloque parte del reposo y luego se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es μ . a) Use métodos energéticos para mostrar que la rapidez del bloque como función de la posición d por el plano es

$$v = \sqrt{\frac{4gdM(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{m + 2M}}$$

b) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque en términos de μ , m , M , g y θ .

67. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta pinchada. Una amiga gira la otra rueda, de 0.381 m de radio, y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.67). Una gota que salta de la llanta en una vuelta alcanza $h = 54.0 \text{ cm}$ sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente vuelta se eleva 51.0 cm sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda. A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

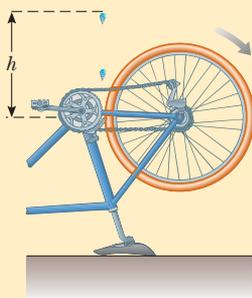


Figura P10.67 Problemas 67 y 68.

68. Una bicicleta se pone de cabeza mientras su propietario repara una llanta pinchada. Una amiga gira la otra rueda, de radio R ,

y observa que gotas de agua vuelan tangencialmente. Ella mide la altura que alcanzan las gotas que se mueven verticalmente (figura P10.67). Una gota que salta de la llanta en una vuelta se eleva una distancia h_1 sobre el punto tangente. Una gota que sale en la siguiente vuelta se eleva una distancia $h_2 < h_1$ sobre el punto tangente. La altura a la que se elevan las gotas disminuye debido a que disminuye la rapidez angular de la rueda. A partir de esta información, determine la magnitud de la aceleración angular promedio de la rueda.

69. Un carrete uniforme hueco tiene radio interior $R/2$, radio exterior R y masa M (figura P10.69). Está montado de modo que da vueltas sobre un eje horizontal fijo. Un contrapeso de masa m se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. El contrapeso cae desde el reposo en $t = 0$ a una posición y en el tiempo t . Demuestre que el momento de torsión debido a las fuerzas de fricción entre carrete y eje es

$$\tau_f = R \left[m \left(g - \frac{2y}{t^2} \right) - M \frac{5y}{4t^2} \right]$$

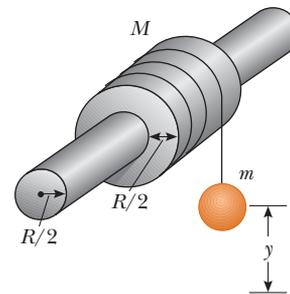


Figura P10.69

70. a) ¿Cuál es la energía cinética rotacional de la Tierra en torno a su eje de giro? Modele la Tierra como una esfera uniforme y use datos de los forros del texto. b) La energía cinética rotacional de la Tierra disminuye de manera estable debido a la fricción de las mareas. Encuentre el cambio en un día, si supone que el periodo rotacional aumenta $10.0 \mu\text{s}$ cada año.
71. Dos bloques, como se muestra en la figura P10.71, están conectados mediante una cuerda de masa despreciable que pasa sobre una polea de 0.250 m de radio y momento de inercia I . El bloque sobre el plano inclinado sin fricción se mueve hacia arriba con una aceleración constante de 2.00 m/s^2 . a) Determine T_1 y T_2 , las tensiones en las dos partes de la cuerda. b) Encuentre el momento de inercia de la polea.

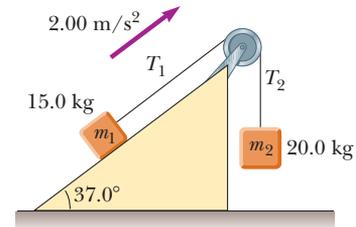


Figura P10.71

72. El carrete que se muestra en la figura P10.72 tiene radio R y momento de inercia I . Un extremo del bloque de masa m se conecta a un resorte con constante de fuerza k , y el otro extremo se amarra a una cuerda enrollada alrededor del carrete. El eje del carrete y el plano inclinado no tienen fricción. El

carrete se enrolla contra las manecillas del reloj de modo que el resorte se estira una distancia d desde su posición no estirada y luego el carrete se libera desde el reposo. a) Encuentre la rapidez angular del carrete cuando el resorte nuevamente está en su posición normal (no estirada). b) Evalúe numéricamente la rapidez angular en este punto, considere $I = 1.00 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $R = 0.300 \text{ m}$, $k = 50.0 \text{ N/m}$, $m = 0.500 \text{ kg}$, $d = 0.200 \text{ m}$ y $\theta = 37.0^\circ$.

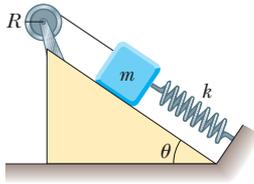


Figura P10.72

73. Como resultado de la fricción, la rapidez angular de una rueda cambia con el tiempo de acuerdo con

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 e^{-\sigma t}$$

donde ω_0 y σ son constantes. La rapidez angular cambia de 3.50 rad/s en $t = 0$ a 2.00 rad/s en $t = 9.30 \text{ s}$. Use esta información para determinar σ y ω_0 . Luego determine a) la magnitud de la aceleración angular en $t = 3.00 \text{ s}$, b) el número de revoluciones que da la rueda en los primeros 2.50 s y c) el número de revoluciones que da antes de llegar al reposo.

74. Una demostración común, que se ilustra en la figura P10.74, consiste en una bola que descansa en un extremo de una tabla uniforme de longitud ℓ , con bisagras en el otro extremo y elevada a un ángulo θ . Una taza ligera se une a la tabla en r_c de modo que atraparà la bola cuando la barra de soporte se retire súbitamente. a) Demuestre que la bola retrasará su caída a la de la tabla que cae cuando θ sea menor que 35.3° . b) Si supone que la tabla tiene 1.00 m de largo y se sostiene a este ángulo límite, demuestre que la taza debe estar a 18.4 cm del extremo que se mueve.

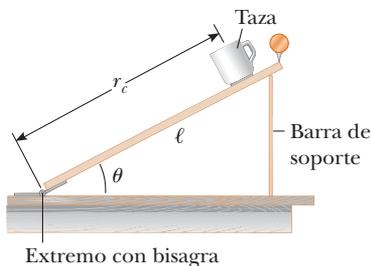


Figura P10.74

75. ● Un alto edificio se ubica en el ecuador de la Tierra. Mientras la Tierra da vueltas, una persona en el piso superior del edificio se mueve más rápido que alguien en el suelo en relación con un marco de referencia inercial porque la última persona está más cerca del eje de la Tierra. En consecuencia, si un objeto se deja caer desde el piso superior al suelo, que está a una distancia h por abajo, aterriza al este del punto verticalmente abajo de donde se dejó caer. a) ¿A qué distancia al este

aterrizará el objeto? Exprese su respuesta en términos de h , g y la rapidez angular ω de la Tierra. Ignore la resistencia del aire y suponga que la aceleración en caída libre es constante en este intervalo de alturas. b) Evalúe el desplazamiento hacia el este para $h = 50.0 \text{ m}$. c) A su juicio, ¿está justificado ignorar este aspecto del efecto Coriolis en el estudio previo de la caída libre?

76. La manecilla horaria y el minutero del Big Ben, el reloj de la torre del Parlamento en Londres, miden 2.70 m y 4.50 m de largo y tienen masas de 60.0 kg y 100 kg , respectivamente (vea la figura P10.42). i) Determine el momento de torsión total debido al peso de estas manecillas en torno al eje de rotación cuando la hora es a) $3:00$, b) $5:15$, c) $6:00$, d) $8:20$ y e) $9:45$. (Modele las manecillas como largas barras delgadas uniformes.) ii) Determine todas las horas cuando el momento de torsión total en torno al eje de rotación sea cero. Determine las horas al segundo más cercano y resuelva numéricamente una ecuación trascendental.
77. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M . El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a una barra fija (figura P10.77). Demuestre que a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco, b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$ y c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$ después de que el disco descendió una distancia h . Verifique su respuesta a el inciso a) con el planteamiento energético.

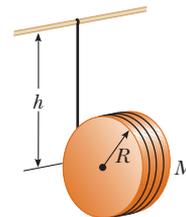


Figura P10.77

78. Una esfera sólida uniforme de radio r se coloca en la superficie interior de un tazón hemisférico con radio R mucho mayor. La esfera se libera desde el reposo a un ángulo θ con la vertical y rueda sin deslizarse (figura P10.78). Determine la rapidez angular de la esfera cuando llega al fondo del tazón.

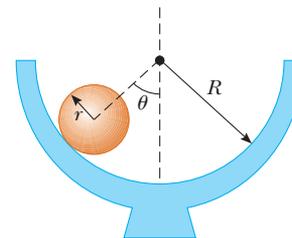


Figura P10.78

79. Una esfera sólida de masas m y radio r rueda sin deslizarse a lo largo de la pista que se muestra en la figura P10.79. Parte del reposo con el punto más bajo de la esfera a una altura h

sobre la parte baja del bucle de radio R , mucho mayor que r .
 a) ¿Cuál es el valor mínimo de h (en términos de R) tal que la esfera completa el bucle? b) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza neta sobre la esfera en el punto P si $h = 3R$?

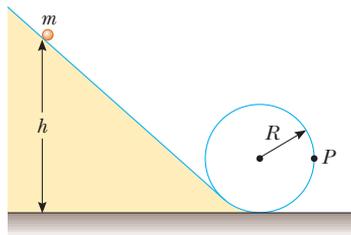


Figura P10.79

80. Una barra delgada de 0.630 kg de masa y 1.24 m de longitud está en reposo, colgando verticalmente de una bisagra fuerte fija en su extremo superior. Súbitamente se le aplica una fuerza impulsiva horizontal ($14.7\hat{i}$ N). a) Suponga que la fuerza actúa en el extremo inferior de la barra. Encuentre la aceleración de su centro de masa y la fuerza horizontal que ejerce la bisagra. b) Suponga que la fuerza actúa en el punto medio de la barra. Encuentre la aceleración de este punto y la reacción horizontal de la bisagra. c) ¿Dónde se puede aplicar el impulso de modo que la bisagra no ejerza fuerza horizontal? Este punto se llama *centro de percusión*.
81. a) Una delgada barra de longitud h y masa M se mantiene verticalmente con su extremo inferior descansando sobre una superficie horizontal sin fricción. Luego la barra se libera para caer libremente. Determine la rapidez de su centro de masa justo antes de golpear la superficie horizontal. b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la barra tiene un eje fijo en su extremo inferior. Determine la rapidez del centro de masa de la barra justo antes de golpear la superficie.
82. Después de la cena de acción de gracias, su tío cae en un profundo sueño, sentado justo frente al aparato de televisión. Un travieso nieto equilibra una pequeña uva esférica en lo alto de su cabeza calva, que en sí tiene la forma de una esfera. Después de que todos los niños han tenido tiempo de reír nerviosamente, la uva parte del reposo y rueda sin deslizarse. La uva pierde contacto con la calva de su tío cuando la línea radial que la une con el centro de curvatura forma ¿qué ángulo con la vertical?
83. Un carrete de alambre de masa M y radio R se desenrolla bajo una fuerza constante \vec{F} (figura P10.83). Si supone que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, demuestre que a) la aceleración del centro de masa es $4\vec{F}/3M$ y b) la fuerza de fricción es hacia la *derecha* e igual en magnitud a $F/3$.

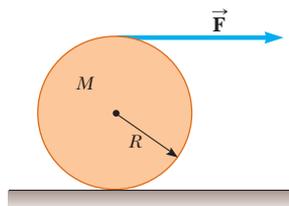


Figura P10.83

c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizarse, ¿cuál es la rapidez de su centro de masa después de que rodó una distancia d ?

84. Un tablón con masa $M = 6.00$ kg monta sobre lo alto de dos rodillos cilíndricos sólidos idénticos que tienen $R = 5.00$ cm y $m = 2.00$ kg (figura P10.84). Al tablón lo jala una fuerza horizontal constante \vec{F} de 6.00 N de magnitud aplicada al extremo del tablón y perpendicular a los ejes de los cilindros (que son paralelos). Los cilindros ruedan sin deslizarse sobre una superficie plana. Tampoco hay deslizamiento entre los cilindros y el tablón. a) Encuentre la aceleración del tablón y de los rodillos. b) ¿Qué fuerzas de fricción actúan?

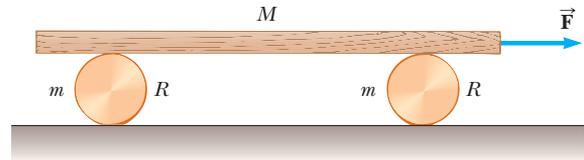


Figura P10.84

85. Un carrete de hilo consiste en un cilindro de radio R_1 con tapas laterales de radio R_2 , como se muestra en la vista lateral que se ilustra en la figura P10.85. La masa del carrete, incluido el hilo, es m , y su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro es I . El carrete se coloca sobre una superficie horizontal rugosa de modo que rueda sin deslizarse cuando una fuerza \vec{T} que actúa hacia la derecha se aplica al extremo libre del hilo. Demuestre que la magnitud de la fuerza de fricción que ejerce la superficie sobre el carrete se conoce por

$$f = \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2} \right) T$$

Determine la dirección de la fuerza de fricción.

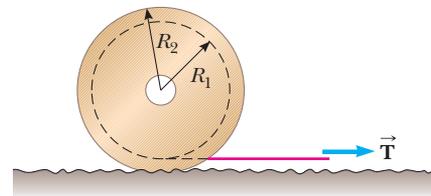


Figura P10.85

86. ● Un gran rollo de papel higiénico, de radio inicial R , yace sobre una larga superficie horizontal con el extremo exterior del papel clavado a la superficie. Al rollo se le da un pequeño empujón ($v_i \approx 0$) y comienza a desenrollarse. Suponga que el rollo tiene una densidad uniforme y que la energía mecánica se conserva en el proceso. a) Determine la rapidez del centro de masa del rollo cuando su radio disminuye a r . b) Calcule un valor numérico para esta rapidez en $r = 1.00$ mm, si supone $R = 6.00$ m. c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué le ocurre a la energía del sistema cuando el papel se desenrolla por completo?

Respuestas a las preguntas rápidas

- 10.1** i), c). Para una rotación de más de 180° , el desplazamiento angular debe ser mayor que $\pi = 3.14$ rad. Los desplazamientos angulares en las tres opciones son a) $6 \text{ rad} - 3 \text{ rad} = 3 \text{ rad}$, b) $1 \text{ rad} - (-1) \text{ rad} = 2 \text{ rad}$ y c) $5 \text{ rad} - 1 \text{ rad} = 4 \text{ rad}$. ii), b). Ya que todos los desplazamientos angulares se presentan en el mismo intervalo de tiempo, el desplazamiento con el valor más bajo estará asociado con la rapidez angular promedio más baja.
- 10.2** b). En la ecuación 10.8, las magnitudes de velocidad inicial y final son iguales en los tres casos. Como resultado, la aceleración angular es inversamente proporcional al desplazamiento angular. En consecuencia, la mayor aceleración angular se asocia con el menor desplazamiento angular.
- 10.3** i), b). El sistema de la plataforma, Alex, y Brian es un objeto rígido, así que todos los puntos en el objeto rígido tienen la misma rapidez angular. ii), a). La rapidez tangencial es proporcional a la distancia radial desde el eje de rotación.
- 10.4** a). Casi toda la masa de la tubería está a la misma distancia del eje de rotación, de modo que tiene un momento de inercia más grande que el cilindro sólido.
- 10.5** i), b). El mango más gordo del destornillador le da un brazo de momento más grande y aumenta el momento de torsión que puede aplicar con una cierta fuerza de su mano. ii), a). El mango más largo de la llave le da un brazo de momento más grande y aumenta el momento de torsión que puede aplicar con una cierta fuerza de su mano.
- 10.6** b). Con el doble de momento de inercia y el mismo momento de torsión friccionante, hay la mitad de aceleración angular. Con la mitad de la aceleración angular, requerirá el doble de largo para cambiar la rapidez a cero.
- 10.7** b). Toda la energía potencial gravitacional del sistema caja-Tierra se transforma en energía cinética de traslación. Para la bola, parte de la energía potencial gravitacional del sistema bola-Tierra se transforma en energía cinética rotacional, lo que deja menos para energía cinética traslacional, de modo que la bola se mueve colina abajo más lentamente que la caja.