

Clase 26: Rotación del cuerpo rígido. Aplicaciones y ejemplos

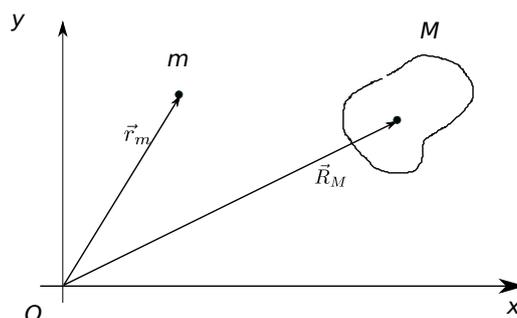
3 de julio de 2020

En esta clase final recorreremos algunas aplicaciones de la teoría que hemos desarrollado para describir el movimiento del cuerpo rígido, en distintas situaciones. Seguimos aproximadamente el orden de los problemas de la Práctica 10.

1. Sistemas de cuerpos y partículas

Cuando trabajamos un sistema con dos o más cuerpos rígidos, o un sistema de partículas y cuerpos rígidos, en varios aspectos se puede considerar a cada cuerpo rígido como una partícula ubicada en su CM, con la masa del cuerpo.

Por ejemplo, veamos un sistema físico formado por un cuerpo rígido de masa M y una partícula de masa m . La masa del sistema completo se recorre considerando todos los elementos de masa dm del cuerpo y la masa m de la partícula; la suma sobre los dm nos lleva a una integral y el término de m queda aparte.



Como en la figura, llamemos \vec{R}_M a la posición del CM del cuerpo y \vec{r}_m a la posición de la partícula, respecto del origen de un sistema de coordenadas. La posición del CM del sistema se calcula como

$$\begin{aligned}\vec{R}_{CM}^{(\text{sistema})} &= \frac{1}{M+m} \left[\int_{\text{cuerpo}} \vec{r} dm + m\vec{r}_m \right] \\ &= \frac{1}{M+m} \left(M\vec{R}_M + m\vec{r}_m \right)\end{aligned}$$

Es decir, podemos reemplazar al cuerpo por una masa M en el punto \vec{R}_M .

La cantidad de movimiento lineal del sistema se calcula como

$$\begin{aligned}\vec{P}^{(\text{sistema})} &= \int_{\text{cuerpo}} \vec{v}(\vec{r}) dm + m\vec{v}_m \\ &= M\vec{V}_M + m\vec{v}_m\end{aligned}$$

Es decir, podemos reemplazar al cuerpo por una masa M con velocidad \vec{V}_M .

La cantidad de movimiento angular respecto del punto O es más elaborada,

$$\begin{aligned}\vec{L}^{(\text{sistema})} &= \vec{L}_O^{(\text{cuerpo})} + \vec{l}_m \\ &= M\vec{R}_M \times \vec{V}_M + \vec{L}_{CM}^{(\text{cuerpo})} + \vec{l}_m\end{aligned}$$

Vemos que el momento angular del sistema completo es la suma de 1) el momento angular orbital del cuerpo, como si fuera una partícula de masa M con velocidad \vec{V}_M en el punto \vec{R}_M , 2) el momento angular de la partícula y 3) el momento angular interno del cuerpo respecto de su CM.

La energía cinética del sistema completo se puede representar como

$$\begin{aligned} E_{cin}^{(\text{sistema})} &= E_{cin}^{(\text{cuerpo})} + \frac{1}{2}mv_m^2 \\ &= \frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 \end{aligned}$$

Vemos en esta expresión la energía cinética de una partícula de masa M con velocidad de módulo V_M , otra de masa m con velocidad de módulo v_m y la energía cinética de rotación del cuerpo respecto de su CM.

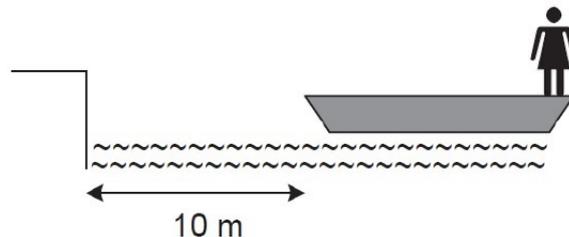
Si el sistema se encuentra en el campo gravitatorio terrestre constante \vec{g} la energía potencial gravitatoria del sistema completo es la suma de las energías potenciales de cada elemento de masa,

$$\begin{aligned} U_g^{(\text{sistema})} &= \int_{\text{cuerpo}} gh \, dm + mgh_m \\ &= g \int_{\text{cuerpo}} h \, dm + mgh_m \\ &= Mgh_M + mgh_m \end{aligned}$$

donde h_M es la altura del CM del cuerpo y h_m es la altura de la partícula. Es decir, podemos reemplazar al cuerpo por una partícula ubicada en su CM.

1.1. Ejemplo, con conservación de \vec{P}

En el ejercicio 4 de la práctica 9 tenemos que considerar el sistema formado por un bote de masa $M = 100 \text{ kg}$ y 8 m de longitud, y una muchacha de masa $m = 50 \text{ kg}$. Podemos modelar al bote como un cuerpo rígido continuo simétrico y a la muchacha como una partícula puntual. EL CM del bote está en su punto medio geométrico.



Con respecto a un eje x con origen en la orilla, y en la situación inicial, podemos representar al bote como una partícula de masa M ubicada en $x_M = 14 \text{ m}$. El CM del sistema tiene coordenada

$$x_{CM}^{(\text{sistema})} = (100 \text{ kg } 14 \text{ m} + 50 \text{ kg } 18 \text{ m}) / (150 \text{ kg}) = 15 \text{ m}$$

Las fuerzas externas sobre el sistema son el peso del bote, el peso de la muchacha y la fuerza de empuje del agua hacia arriba. Todas son verticales y suman cero, porque el bote no se mueve en dirección vertical. Por lo tanto la cantidad de movimiento del sistema se conserva y la velocidad del CM es constante durante todo el ejercicio. Inicialmente la velocidad de las partes del sistema es cero, con lo cual la velocidad del CM del sistema es cero. Luego es siempre cero y el CM nunca cambia de lugar.

Cuando la muchacha camina sobre el bote actúan fuerzas internas (de la muchacha sobre el bote y del bote sobre la muchacha); esas fuerzas no influyen en la posición del CM del sistema:

- Cuando esté en el medio del bote es como si dos partículas estuvieran en el mismo lugar; ese lugar es el CM del sistema, por lo tanto están a 15 m de la orilla.
- Cuando la muchacha llega al otro extremo del bote, digamos que está en una posición x desconocida; el centro del bote estará en $x + 4 \text{ m}$. Podemos plantear entonces que

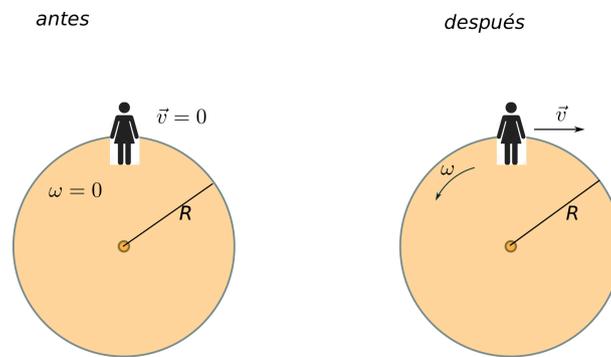
$$(100 \text{ kg } (x + 4 \text{ m}) + 50 \text{ kg } x) / (150 \text{ kg}) = 15 \text{ m}$$

Se despeja $x = 13 \text{ m}$. La muchacha termina ubicada a 13 m de la orilla y el centro del bote a 17 m de la orilla.

1.2. Ejemplo, con conservación de \vec{L}

En el ejercicio 4 de la práctica 10 tenemos una calesita de radio R y momento de inercia I montada sobre un eje fijo a tierra, vertical y sin roce, y una mujer de masa m parada en su borde. Inicialmente ambos están en reposo.

Tomemos como sistema completo la calesita, modelada como cuerpo rígido, y la mujer modelada como partícula. Sobre este sistema no actúan fuerzas externas que hagan torque con respecto al eje en la dirección vertical¹, por lo cual la componente vertical del momento angular se conserva.



Inicialmente el momento angular del sistema es

$$L_z^{(\text{antes})} = 0$$

porque la calesita y la mujer están en reposo, y debe conservarse cero. Cuando la mujer se mueve con velocidad de módulo v respecto del piso, tangencial a la calesita, la calesita adquiere velocidad angular ω . Si seguimos el esquema de la figura y usamos la convención antihoraria,

$$L_z^{(\text{después})} = I_{CM}\omega - mvR$$

Naturalmente, uno apunta hacia adentro de la hoja y otro hacia afuera para sumar $\vec{L} = \vec{0}$. Por conservación del momento angular pueden despejar

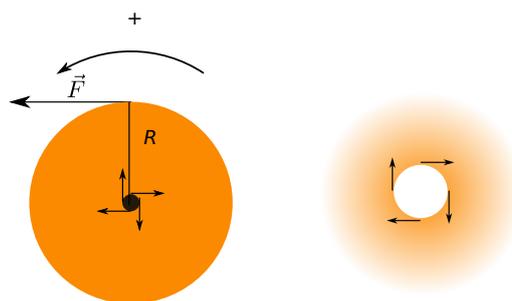
$$\omega = \frac{mvR}{I_{CM}}$$

2. Torques y aceleración angular

En varios ejercicios tenemos un cuerpo cilíndrico montado sobre un eje que pasa por su CM. Cuando actúan fuerzas sobre ese cilindro su CM no se desplaza, porque está fijo al eje. El cilindro puede girar, y su aceleración angular está determinada por la suma de torques de fuerzas externas,

$$\sum_{ext} \tau_z^{(ext)} = I_{CM} \alpha \quad (1)$$

Por ejemplo, en el ejercicio 5 de la práctica 10 se discute la aceleración angular de una rueda montada sobre un eje fijo, perpendicular a la rueda. Podemos dibujar



¹Discutan el torque del peso de la mujer, el del peso de la calesita y el del eje sobre la calesita.

Noten que el eje (punto negro) hace fuerza de roce sobre la rueda; en el montaje están en contacto la superficie del eje con la superficie de la rueda. En cada elemento infinitesimal de área de apoyo hay una fuerza normal (que depende de cuán ajustadas están las piezas) y una fuerza de roce cinética que se opone al deslizamiento. La fuerza de roce está aplicada a cierta distancia del eje de giro, dada por el radio del eje. Como estamos estudiando la rueda (naranja en el dibujo) estas fuerzas de roce son externas.

Cuando actúa otra fuerza externa que hace torque, por ejemplo \vec{F} dibujada en la figura,

$$\tau_{F,z} - \tau_{roce,z} = I\alpha_1$$

donde $\tau_{F,z} = FR$ es positivo (el problema da directamente el valor del torque externo, aquí lo imagino como una fuerza tangencial en el borde de la rueda) y el torque de roce, que es negativo, lo escribo $-\tau_{roce,z}$. Con los datos pueden calcular α_1 , mientras aumenta la velocidad angular.

Cuando se deja de aplicar la fuerza \vec{F} actúa solo el torque de roce del eje y la rueda se detiene con aceleración $\alpha_2 < 0$, que pueden calcular con los datos del enunciado. Durante el frenado,

$$-\tau_{roce,z} = I\alpha_2$$

Con estas ecuaciones pueden despejar el torque del eje $\tau_{roce,z}$ y el momento de inercia I de la rueda.

2.1. Cuplas, o par de fuerzas

Las fuerzas ejercidas por el eje sobre la rueda tienen la siguiente propiedad:

- ejercen torque sobre la rueda
- su resultante es nula, no ejercen fuerza neta sobre la rueda

Un conjunto de fuerzas con estas propiedades se suele llamar cupla, o par de fuerzas.

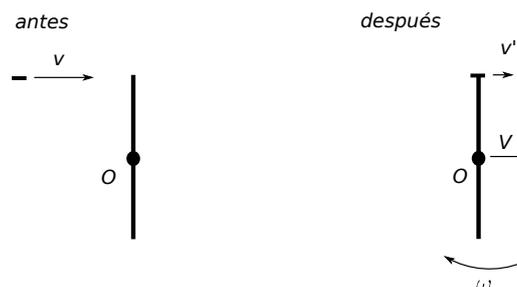
Por ejemplo, sobre el eje estriado de un motor se monta un engranaje, de manera que giran juntos. Cuando el motor acelera (angularmente) al engranaje, el eje ejerce una cupla sobre él. En este caso puede que lo llamen "par motor", aquí la palabra par se refiere al par de fuerzas. Por ejemplo, en cierta moto de 220 c.c. de cilindrada, el manual dice que el par motor máximo es de $17 Nm$, cuando el motor gira a 7000 RPM.

3. Choques de partículas y cuerpos rígidos

Cuando chocan dos cuerpos, despreciamos las fuerzas externas. Si se trata de cuerpos rígidos, o de un cuerpo rígido y una partícula, se conservan entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema (porque no hay fuerzas externas) y también la cantidad de movimiento angular (porque sin fuerzas externas no hay torques externos). Cuando trabajen la conservación del momento angular deben decidir con respecto a qué punto calculan los momentos angulares de cada cuerpo: puede ser un punto quieto en un sistema inercial o puede ser el CM del sistema (Clase 23, página 10).

Tienen un ejemplo en el ejercicio 6 de la Práctica 10. Una partícula (proyectil) choca con una varilla rígida. La varilla no está montada sobre un eje, sino que puede deslizarse sobre una superficie horizontal sin roce; por eso, después del impacto la varilla tiene movimiento de traslación (de su CM) y de rotación (respecto de su CM). El choque es "frontal", eso significa que la velocidad del proyectil después del impacto tiene la misma dirección que antes del impacto.

Llamamos m la masa del proyectil y v al módulo de su velocidad inicial. La varilla tiene masa M y longitud l , y está inicialmente en reposo; su momento de inercia respecto de su punto medio es $I_{CM} = \frac{1}{12}Ml^2$. Llamamos v' a la componente de la velocidad del proyectil después del choque (podría ser positiva o negativa, respecto del sentido de v inicial).



La conservación del momento lineal, como ya saben, permite plantear

$$mv = mv' + MV$$

Escribimos una sola componente, en la dirección del movimiento del proyectil porque el choque es frontal; el CM de la varilla no podría tener velocidad en otra dirección.

El momento angular lo podemos plantear respecto del punto O donde está el centro de la varilla antes del choque; en realidad, el centro de la varilla también lo consideramos en el punto O inmediatamente después del impacto porque suponemos que en el tiempo que dura el impacto adquiere velocidad pero no llega a trasladarse). Visto el dibujo, usemos signo positivo para el sentido horario (eje z hacia adentro de la hoja). Entonces, el momento angular antes del choque está dado solo por el proyectil,

$$L_z^{(\text{antes})} = mv \frac{l}{2}$$

El momento angular después del impacto está dado los dos cuerpos, el del proyectil

$$l_z^{(\text{proyectil, después})} = mv' \frac{l}{2}$$

y el momento angular de la varilla que podemos descomponer en parte orbital y parte interna (Clase 23, página 9):

$$L_z^{(\text{varilla, después})} = MV \cdot 0 + I_{CM} \omega$$

La parte orbital vale cero porque la posición del CM respecto de O es el vector nulo; incluso más tarde será cero porque posición del CM respecto de O será paralela a \vec{V} .

El problema (parte a) se resuelve con las ecuaciones

$$\begin{cases} mv = mv' + MV \\ mv \frac{l}{2} = mv' \frac{l}{2} + \frac{1}{12} Ml^2 \omega \end{cases}$$

Les recomiendo despejar V y ω como si v' fuera un dato, luego podrán armar la relación que pide el enunciado en la parte a).

En la parte b) se considera que el choque es elástico. Se conserva la energía cinética, por lo cual deben agregar la ecuación

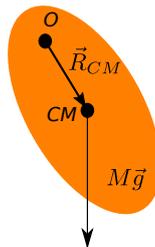
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} Ml^2 \right) \omega^2$$

En la parte c), en cambio, el choque es plástico. El proyectil queda adherido a la varilla y tenemos un vínculo entre las velocidades; v' se puede expresar como la velocidad del punto O de la varilla más la velocidad del extremo de la varilla respecto de O :

$$v' = V + \omega \frac{l}{2}$$

4. Péndulo físico

Consideren un cuerpo rígido suspendido de un eje fijo horizontal, paralelo a un eje principal del cuerpo. Si el eje fijo no pasa por el CM del cuerpo, el peso del cuerpo (aplicado en su CM, Clase 24, página 4) puede ejercer un torque respecto del eje fijo, y el cuerpo puede oscilar.



Este montaje se conoce como *péndulo físico*, por ser más realista que el péndulo ideal. Lo encuentran en el ejercicio 7 de la Práctica 10.

Las fuerzas externas sobre el cuerpo de la figura las ejercen el eje y la Tierra (peso). Tomemos torques y momento angular respecto del eje fijo O . Si el eje no tiene roce, las fuerzas del eje (de suspensión) no realizan torque respecto de O , mientras el peso realiza un torque

$$\tau_{\text{peso},z} = -Mgd \sin \theta$$

Noten que medimos el ángulo θ positivo en sentido antihorario (eje z hacia afuera de la hoja); cuando el ángulo es positivo como en la figura, la componente z del torque es negativa, y cuando el ángulo sea negativo, la componente z del torque será positiva. Ese es el significado del signo menos en la expresión del torque.

La dinámica de este péndulo físico ($\sum \tau_z^{(ext)} = I_{CM} \alpha$) plantea que

$$\tau_{\text{peso},z} = I_O \alpha$$

donde el momento de inercia se calcula con la regla de Steiner (Clase 24, página 10 y Clase 25, página 13). Si llamamos d a la distancia entre el CM y el eje O , tenemos

$$I_O = Md^2 + I_{CM}$$

Por otro lado, la aceleración angular es la derivada segunda del ángulo θ respecto del tiempo dos veces. Podemos escribir

$$(Md^2 + I_{CM}) \frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgd \sin \theta$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgd}{Md^2 + I_{CM}} \sin \theta$$

Para pequeñas oscilaciones, aproximando $\sin \theta \approx \theta$ esta es la ecuación del movimiento armónico simple, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{Md^2 + I_{CM}}}$$

(no confundir con la velocidad angular del cuerpo, que aquí depende del tiempo y es oscilante).

Ejercicio: podrían describir la posición del CM en función del tiempo y expresar la fuerza que hace el eje sobre el cuerpo, también en función del tiempo.

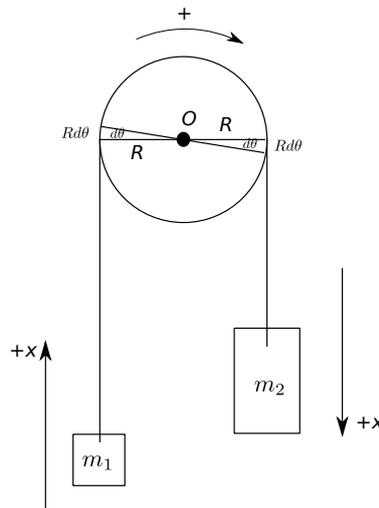
5. Sistemas de cuerpos y partículas con vínculos

En la Práctica 4 trabajamos ejercicios con dos o más cuerpos (que modelábamos como partículas) cuyos movimientos estaban relacionados entre sí; por ejemplo, dos cuerpos que se mueven unidos por una soga, o dos o tres cuerpos que se mueven apoyados entre sí. En esos casos reconocimos vínculos entre las aceleraciones de cada cuerpo, y las usamos para reducir el número de incógnitas.

Ahora podemos trabajar con dos o más cuerpos rígidos, o con cuerpos rígidos y partículas, vinculados entre sí. Tienen ejemplos en los ejercicios 8, 9 y 10 de la Práctica 10.

Un caso típico es el de una cuerda pasando por una polea de forma tal que no desliza sobre la ranura (garganta). Es decir, hay fuerzas de roce estáticas que impiden que la cuerda deslice respecto de la polea. En ese caso el radio de la polea y el ángulo girado por la misma determinan la longitud de cuerda que se enrolla (o desenrolla) sobre la misma.

Analicemos un ejemplo clásico, conocido como máquina de Atwood (ejercicio 4 de más ejercitación). Una polea de radio R y momento de inercia I respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro está montada sobre un eje horizontal sin roce. Por la polea pasa una cuerda ideal (inextensible, de masa despreciable) que **no desliza**. En los extremos de la cuerda se cuelgan dos bloques, de masas m_1 y m_2 . Calcularemos la aceleración con que se mueven los bloques y la aceleración angular de la polea.



Cuando la polea gira un ángulo $d\theta$ (digamos positivo en la convención de la figura) arrastra un tramo de cuerda igual al arco donde se apoya la cuerda: $dl = R d\theta$. Es muy conveniente elegir ejes para describir el movimiento de los bloques con una convención de signo que "acompañe" la convención de signos de la rotación, como en la figura. Con esta convención, un ángulo $d\theta$ positivo corresponde a un desplazamiento dx positivo de ambas masas (aunque m_1 sube y m_2 baja); y un ángulo $d\theta$ negativo corresponde a un desplazamiento negativo de ambas masas. La relación entre el ángulo girado por la polea y el desplazamiento de los bloques es

$$dx = R d\theta$$

Luego las velocidades se relacionan como

$$v = R \omega$$

y las aceleraciones como

$$a = R \alpha$$

Si llamamos T_1 al módulo de la tensión de la cuerda entre la polea y m_1 , y T_2 al módulo de la tensión de la cuerda entre la polea y m_2 , las ecuaciones de movimiento de cada cuerpo son:

$$\begin{cases} m_1: & T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \\ m_2: & m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ \text{polea} & T_2 R - T_1 R = I \alpha \end{cases}$$

Las dos primeras corresponden a la suma de fuerzas verticales sobre cada masa y la tercera corresponde a la suma de torques externos sobre la polea (la fuerza que hace el eje sobre la polea no realiza torque). Las aceleraciones están vinculadas,

$$\alpha R = a_1 = a_2 \equiv a$$

donde se puede llamar a la incógnita a "aceleración del sistema". Usando estas ecuaciones de vínculo el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{cases} m_1: & T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2: & m_2 g - T_2 = m_2 a \\ \text{polea} & T_2 R - T_1 R = I a / R \end{cases}$$

Del sistema de tres ecuaciones pueden despejar tres incógnitas: la aceleración a y las tensiones de los dos lados de la cuerda.

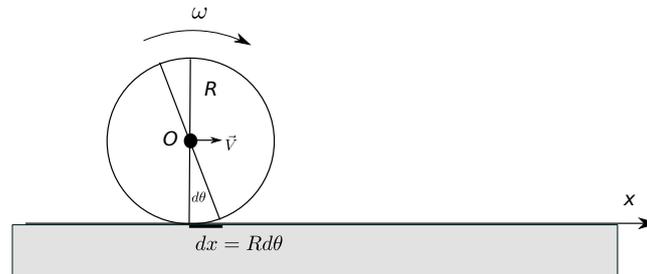
Es importante entender que $T_2 \neq T_1$ cuando la cuerda acelera a la polea. Dado que la polea tiene momento de inercia, el torque neto necesario para darle aceleración angular se logra cuando la cuerda tira más de un lado que del otro.

Si la cuerda deslizara perfectamente, los bloques se podrían mover sin acelerar a la polea. En ese caso tenemos, como usamos muchas veces, una polea ideal donde $T_2 = T_1$. Lo mismo sucede si el momento de inercia de la polea fuera despreciable.

6. Rodadura sin deslizamiento. Vínculos entre variables cinemáticas.

En las aplicaciones prácticas es evidentemente importante el movimiento de una rueda como forma de trasladar un vehículo, por algo se dice que el invento de la rueda cambió la historia de la humanidad.

El buen funcionamiento de una rueda depende de que el punto de apoyo sobre el piso no deslice; de esta manera un giro de la rueda está relacionado con el desplazamiento de su punto medio (eje) respecto del piso: cuando una rueda de radio R da un giro completo sin deslizar su punto medio avanza una distancia igual al perímetro de la rueda, es decir $2\pi R$.



Para escribir esta relación en forma de ecuaciones es conveniente elegir convenciones de signos consistentes para la rotación y la traslación. Por ejemplo en la convención mostrada en la figura un ángulo positivo corresponde a un desplazamiento positivo.

En un tiempo infinitesimal dt , si la rueda gira un ángulo infinitesimal $d\theta$ el recorrido del punto de apoyo es el arco de circunferencia $dl = R d\theta$ y el recorrido del punto medio de la rueda O es

$$dx = R d\theta$$

La velocidad del punto O se relaciona con la velocidad angular de la rueda respecto de su eje como

$$V = R\omega$$

Vemos en la convención de la figura que una velocidad angular ω positiva corresponde a una velocidad V positiva. La aceleración A del centro de la rueda se relaciona con la aceleración angular de la rueda respecto de su eje como

$$A = R\alpha$$

Nuevamente, la convención de signos nos dice que una aceleración angular α positiva corresponde a una aceleración A positiva.

Supondremos que la rueda está bien balanceada: tiene forma de cilindro, o de sólido de revolución, con un eje de simetría que pasa por su CM. Cuando la rueda está apoyada ese eje de simetría es paralelo a la superficie de apoyo. Al rodar, la velocidad angular vectorial $\vec{\omega}$ apunta en la dirección del eje de simetría.

El funcionamiento normal de una rueda que estamos describiendo se conoce como *rodadura sin deslizamiento* y establece un vínculo entre *distintas variables cinemáticas del mismo cuerpo*. Más precisamente, entre las *variables traslacionales* y las *variables rotacionales* del cuerpo rígido con forma de rueda.

Fuerza de vínculo en la rodadura sin deslizamiento.

Como vimos, la forma de girar y la forma de avanzar de un cuerpo cilíndrico que rueda sin deslizar sobre una superficie, están coordinadas.

La condición cinemática que expresa la rodadura sin deslizamiento es la siguiente: en cada instante, *la línea de puntos del cilindro apoyada en la superficie está en reposo instantáneo respecto de la superficie*. Con esto queremos decir que esos puntos del cilindro tienen velocidad cero respecto de la superficie.

La fuerza responsable de mantener esa condición la fuerza que ejerce la superficie sobre el cilindro. Como siempre hemos hecho, podemos descomponer esa fuerza en una componente normal \vec{N} y una fuerza de roce tangencial \vec{F}_r . Dado que no hay deslizamiento, *la fuerza de roce es estática*; es decir, tiene las características fenomenológicas de una fuerza de roce estática: su módulo y sentido se acomodan a la situación observada pero el módulo tiene un valor máximo posible dado por $F_r^{max} = \mu_e N$. Si las condiciones de un problema requieren una fuerza de roce mayor, la superficie no puede aportarla y habrá deslizamiento relativo de la rueda sobre la superficie (la rueda "patinará").

Eje instantáneo

Supongamos que la superficie de apoyo está en reposo permanente en un sistema inercial; es decir, el piso es un sistema inercial. Dado que los puntos de contacto de la rueda con la superficie de apoyo están en reposo instantáneo respecto del sistema inercial, constituyen un eje fijo en el sistema inercial. A ese eje lo podemos llamar "eje de apoyo" o *eje instantáneo*.

La rodadura sin deslizamiento se puede interpretar, en un intervalo de tiempo infinitesimal, como que la rueda está girando (o "volcando") respecto del eje instantáneo. Además, para una rueda bien balanceada el eje instantáneo es paralelo al eje principal que pasa por el centro de masa; en consecuencia podemos usar la regla de Steiner para describir la rotación alrededor del eje instantáneo: si la rueda tiene radio R y momento de inercia I_{CM} respecto de su eje de simetría, cuando la rueda avanza con velocidad V su velocidad angular es $\omega = V/R$ y su momento angular respecto del eje de apoyo vale

$$L_{\text{apoyo}} = (I_{CM} + MR^2) \omega$$

La energía cinética total de la rueda, vista como una rotación pura en torno al eje instantáneo, se escribe

$$E_{cin} = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2$$

Desde este punto de vista la dinámica angular se estudia como una rotación en torno al eje instantáneo: los torques de las fuerzas externas se calculan respecto del eje instantáneo (anotamos $\tau_{\text{apoyo}}^{(ext)}$ y se plantea

$$\sum_{ext} \tau_{\text{apoyo}}^{(ext)} = (I_{CM} + MR^2) \alpha$$

La dinámica traslacional, por supuesto se plantea con la ecuación

$$\sum_{ext} \vec{F}^{(ext)} = M\vec{A}$$

Esta ecuación vectorial tiene una componente que involucra a la fuerza normal y otra que involucra a la fuerza de roce.

Eje del CM

El mismo movimiento de rodadura sin deslizamiento se puede plantear como una rotación respecto del eje principal que pasa por el CM. Recuerden (Clase 23, página 10) que la ecuación de variación del momento angular vale incluso cuando el eje está acelerado respecto del piso.

Desde el punto de vista del eje del CM, el momento angular interno se escribe

$$L_{CM} = I_{CM} \omega$$

y el momento angular respecto del eje de apoyo se recupera sumando la parte orbital,

$$L_{\text{apoyo}} = MVR + I_{CM} \omega$$

(escribiendo $V = \omega R$ vemos que esta expresión equivale a $L_{\text{apoyo}} = (I_{CM} + MR^2) \omega$ como escribimos antes).

La energía cinética total de la rueda, vista como una traslación del CM más una rotación en torno al eje del CM, se escribe

$$E_{cin} = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

(escribiendo $V = \omega R$ vemos que esta expresión equivale a $E_{cin} = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2$ como escribimos antes).

Desde este punto de vista la dinámica angular se estudia como una rotación en torno al eje del CM: los torques de las fuerzas externas se calculan respecto del CM (anotamos $\tau_{CM}^{(ext)}$ y se plantea

$$\sum_{ext} \tau_{CM}^{(ext)} = I_{CM} \alpha$$

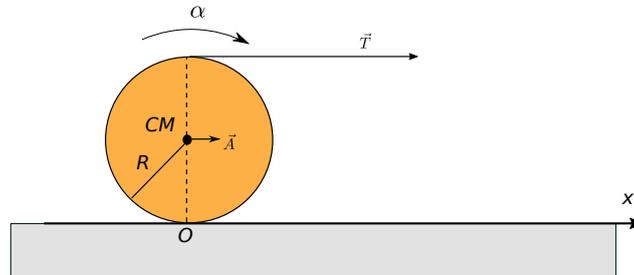
Por supuesto, los resultados que se obtienen interpretando la rodadura sin deslizamiento como una rotación pura alrededor del eje instantáneo o como una rototraslación alrededor del CM son los mismos. Es conveniente que se acostumbren a los dos puntos de vista.

Ejemplo

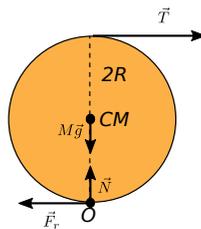
Los ejercicios 11 y 13 de la Práctica 10 son ejemplos típicos de rodadura sin deslizamiento. El ejercicio 9 también tiene una rodadura sin deslizamiento, pero en este caso el yo-yo está "apoyado" en el hilo en lugar de una superficie.

Veamos otro ejemplo:

Un cilindro homogéneo de masa M y radio R puede rodar sin deslizar sobre un piso rugoso horizontal. Tiene enrollado un hilo, del cual se tira con una tensión T en forma horizontal. Se pide calcular la aceleración del CM del cilindro y la fuerza de roce que ejerce el piso para mantener la rodadura sin deslizamiento.



Antes de elegir el punto de vista, hagamos un diagrama de cuerpo libre detallando las fuerzas externas. Recuerden que la fuerza de roce es estática, en realidad no sabemos para dónde apunta; la técnica de resolución es la siguiente: *suponemos una orientación* y la respetamos en el planteo, y esperamos calcular un módulo positivo. Propongamos que apunta hacia la izquierda:



Si el signo del módulo de la fuerza de roce sale negativo (imposible!) significará que la fuerza de roce apunta al revés que nuestra suposición (*esto suele suceder en distintos ejercicios*).

Solución usando eje instantáneo:

Respecto del punto O de la figura, la fuerza de roce, la normal y el peso no ejercen torque. Usamos la convención de signos de la figura: traslación positiva hacia la derecha y rotación positiva en sentido horario. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} x: & T - F_r = MA \\ y: & N - MG = 0 \\ \text{torques:} & T 2R = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2) \alpha \\ \text{vínculo:} & A = \alpha R \end{cases}$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (bastante desacopladas). Podemos resolver $A = \frac{4}{3} \frac{T}{M}$ y $F_r = -\frac{1}{3}T$. Este resultado para la fuerza de roce (cuando esperábamos un módulo positivo) significa que *la fuerza de roce apunta hacia la derecha*, al revés que nuestra suposición. Su módulo es $T/3$. Vemos que no se opone al movimiento, sino que empuja a favor del movimiento de traslación del cuerpo; eso no es contradictorio porque es un roce estático!

Además, $N = Mg$ y $\alpha = \frac{4}{3} \frac{T}{MR}$.

Les sugiero que rehagan el ejercicio, dibujando desde el comienzo la fuerza de roce hacia la derecha.

Solución usando eje del CM:

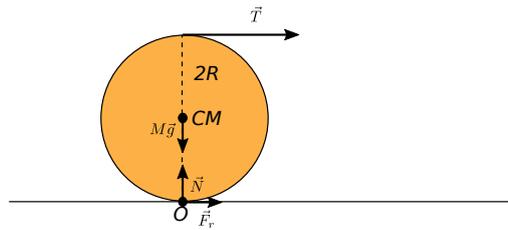
Respecto del punto CM de la figura, la normal y el peso no ejercen torque. Las ecuaciones del movimiento, de acuerdo al diagrama original de fuerzas, son

$$\begin{cases} x : & T - F_r = MA \\ y : & N - MG = 0 \\ \text{torques :} & TR + F_r R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \\ \text{vínculo :} & A = \alpha R \end{cases}$$

Los resultados se pueden despejar y son exactamente los mismos.

Diagrama de fuerzas correcto:

Para dejar los resultados a la vista, corregimos el diagrama de cuerpo libre sabiendo que la fuerza de roce apunta hacia la derecha, con módulo $T/3$:



7. Conservación de la energía

En general las fuerzas internas de un sistema de partículas, o de cuerpos y partículas, realizan trabajo e influyen en el cambio de energía del sistema (recuerden el ejemplo de la Clase 22, página 3).

Sin embargo, **en algunas situaciones** encontramos que el trabajo neto de las fuerzas internas del sistema de cuerpos y partículas se anula. En ese caso,

$$\sum_{ext} W_{F^{(ext)}} = \Delta E_{cin}$$

Además, si algunas de las fuerzas externas son conservativas podemos representar su trabajo mediante el cambio de la energía potencial. En ese caso

$$\sum_{ext} W_{F^{(ext)}}^{no\ conservativas} = \Delta E_{mec}$$

Y más aún, si no hay trabajo de fuerzas no conservativas podemos plantear la conservación de la energía mecánica,

$$\Delta E_{mec} = 0$$

Vale la pena insistir, antes de usar estas ecuación *deben revisar las fuerzas internas* y justificar que su trabajo neto se anula.

Algunos consideraciones típicas son:

- Si el sistema en estudio es un solo cuerpo rígido, las fuerzas internas no realizan trabajo neto.
- Si partes de un sistema están unidas por cuerdas inextensibles de masa despreciable, y los cuerpos en cada extremo de las cuerdas tienen el mismo vector desplazamiento, entonces el trabajo de la tensión se cancela.
- Si estudiamos un cuerpo cilíndrico que rueda sin deslizamiento sobre una superficie en reposo, entonces la normal y la fuerza de roce (que son externas) *no realizan trabajo* sobre el cuerpo. Esto se debe a que el punto de aplicación no se desplaza, y sin desplazamiento no hay trabajo.

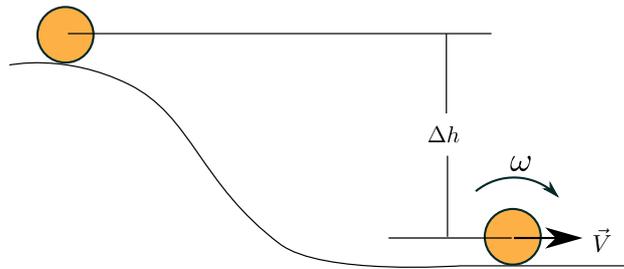
Ejemplos

En el ejercicio 10 de la Práctica 10, y en los 4 y 7 de "Más ejercitación" encuentran cuerpos unidos por cuerdas ideales. Justifiquen que el trabajo de las tensiones no afecta a la energía cinética del sistema.

En los ejercicios 5 y 6 de "Más ejercitación" se pide analizar el mismo problema con un planteo de dinámica y con consideraciones de energía.

En el ejercicio 7 de "Más ejercitación" se combinan el trabajo de cuerdas, energía potencial gravitatoria, energía potencial elástica y energía cinética.

Ejemplo: Una esfera de masa M y radio R se lanza por una pista rugosa desde cierta altura, sin velocidad inicial. Calcular la velocidad de su centro de masas y su velocidad angular cuando desciende una altura Δh . Se supone que la esfera rueda sin deslizar.



Las fuerzas externas sobre la esfera son su peso (conservativa), la normal y la fuerza de roce estática (no hacen trabajo). Luego la energía mecánica se conserva.

Llamando h_A a la altura inicial y h_B la altura final podemos plantear que

$$Mgh_A = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2 \right) \omega^2 + \frac{1}{2} MV^2 + Mgh_B$$

donde el módulo de la velocidad del CM es $V = \omega R$ y hemos descompuesto la energía cinética final en parte de traslación del CM y parte de rotación respecto del CM. El momento de inercia de la esfera respecto del eje que pasa por su CM ya se escribió como $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$. Luego

$$Mg\Delta h = \frac{7}{10} MR^2 \omega^2$$

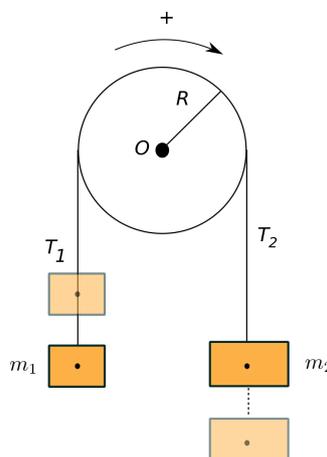
y

$$\omega = \sqrt{\frac{10g\Delta h}{7R^2}}, \quad V = \sqrt{\frac{10g\Delta h}{7}}$$

Si recuerdan el resultado para una partícula que desliza sin roce, $v = \sqrt{2g\Delta h}$, la velocidad de traslación de la esfera es menor. Esto se debe a que una fracción de la energía potencial se ha convertido en energía de traslación y otra fracción en energía cinética de rotación.

Ejemplo: Una máquina de Atwood está compuesta por un disco homogéneo de masa M y radio R , por el cual pasa una soga ideal que sostiene en sus extremos bloques de masas $m_2 > m_1$. Se libera desde el reposo cuando las alturas de los CM de los bloques son iguales. Se supone que la cuerda no desliza sobre el disco.

¿Cuánto valen las velocidades de los bloques y del disco cuando m_2 desciende una altura Δh ?



Consideremos el sistema formado por el disco y los dos bloques.

Las fuerzas de tensión son internas: T_1 describe la interacción entre el bloque 1 y la polea, mientras T_2 describe la interacción entre el bloque 2 y la polea. El vínculo geométrico asociado a que la cuerda no desliza sobre la polea implica que, el trabajo hecho por el bloque 1 sobre la polea es exactamente opuesto al hecho por la polea sobre el bloque 1; por ejemplo, cuando rueda en el sentido positivo indicado el bloque hace trabajo negativo sobre la polea (le quita energía) mientras el trabajo hecho por la polea sobre el bloque es positivo (le da energía). Lo mismo pasa en la interacción entre el bloque 2 y la polea, el bloque da energía a la polea y la polea le quita energía al bloque. Entonces, el efecto de las fuerzas internas de tensión es el de transferir energía entre cuerpos del sistema. No aumentan no disminuyen la energía total.

Por otro lado, las fuerzas externas que hacen trabajo son los pesos de cada bloque, son conservativas.

En conclusión se conserva la energía mecánica.

Ubicando el cero de alturas donde están inicialmente las masas podemos plantear

$$Mgh_O = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 + m_1g\Delta h - m_2g\Delta h + Mgh_O$$

con los vínculos $v_1 = v_2 = \omega R$. Llamando v a las velocidades finales, tenemos

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)v^2 = (m_2 - m_1)g\Delta h$$

o bien

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)g\Delta h}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}}$$

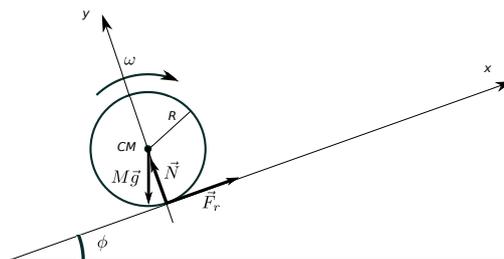
8. Rodadura con deslizamiento

Puede ser que un cilindro apoyado sobre una superficie gire sobre si mismo con el punto de apoyo deslizando sobre la superficie. Por ejemplo, si una moto intenta arrancar sobre una superficie helada es muy probable que la rueda trasera gire pero la moto no avance. En esos casos no hay un vínculo geométrico entre la velocidad angular de la rueda y la velocidad de traslación de su centro de masa; no vale la relación $V = \omega R$ sino que V y ω son variables independientes. El roce entre la rueda y la superficie tiene carácter cinético; el sentido de la fuerza de roce es tal que se opone al deslizamiento relativo.

Las ecuaciones de movimiento se plantean como suma de fuerzas igual a masa por aceleración del sistema y suma de torques respecto del CM igual a momento de inercia por aceleración angular (no existe un eje instantáneo como alternativa). La aceleración del CM y la aceleración angular se calculan por separado.

Ejemplo: en el problema 12 de la Práctica 10 se describe una bola (de bowling) de radio R que se lanza "sin efecto": se le da velocidad de traslación pero no se le da velocidad de rotación respecto de su punto medio (CM). Al tocar el piso siente una fuerza de roce de tipo cinética, de módulo $F_r = \mu_c N$, que se opone al deslizamiento. El torque de la fuerza de roce le provoca una aceleración angular α , con lo cual la bola va ganando velocidad angular ω . A la vez, la fuerza de roce va disminuyendo la velocidad de traslación V . En algún momento la velocidad de rotación y de traslación se relacionan como $V = \omega R$, con lo cual el punto de contacto deja de deslizar. A partir de allí, la fuerza de roce es estática y se encarga de mantener la rodadura sin deslizamiento.

Ejemplo: resolvamos en detalle un caso parecido. Un cilindro homogéneo de masa M y radio R se hace girar sobre su eje de simetría, en posición horizontal, con velocidad angular ω_0 . Suavemente se apoya el cilindro sobre el piso de un plano inclinado rugoso, con coeficiente de roce cinético μ_c y ángulo de inclinación ϕ respecto de la horizontal, de manera que el cilindro tiende a trepar por el plano inclinado. Calculen la aceleración del CM y la aceleración angular del cilindro mientras sigue deslizando. ¿Logra subir?



La dinámica del cilindro está gobernada por las fuerzas externas: su peso, la normal y la fuerza de roce. Inicialmente, dado que el cilindro gira como se indica en la figura, y su CM no se traslada, la fuerza de roce es de tipo cinético. Apunta según el eje x positivo elegido en la figura y tiene módulo

$$F_r = \mu_c N$$

La aceleración \vec{A} del CM será paralela al plano; está dada por la suma de fuerzas:

$$\begin{cases} x: & F_r - Mg \sin \phi = MA \\ y: & N - Mg \cos \phi = 0 \end{cases}$$

La aceleración angular α está dada por la suma de torques respecto del eje que pasa por el CM. Eligiendo signo positivo para el sentido antihorario (queda ω_0 negativa) tenemos

$$\left\{ \tau_z: \quad RF_r = \left(\frac{1}{2}MR^2\right) \alpha \right.$$

Estas 4 ecuaciones permiten despejar 4 incógnitas: F_r , N , A y α . Noten que A y α no están vinculadas. Encontrarán que

$$A = (\mu_c \cos \phi - \sin \phi) g$$

El cuerpo logra subir si $A > 0$, es decir si $\mu_c > \tan \phi$; es decir, si el ángulo es suficientemente pequeño o si el roce es suficientemente alto.

9. Estática del cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido permanece en reposo respecto de un sistema inercial se cumplen dos condiciones cinemáticas: por un lado su CM está en reposo y por otro lado el cuerpo no gira. Entonces, su CM no tiene aceleración y el cuerpo no tiene aceleración angular respecto de su CM. Esto nos lleva a las condiciones

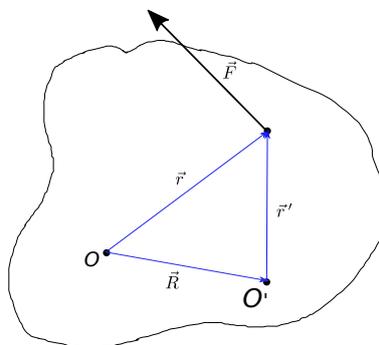
$$\begin{cases} \sum \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \\ \sum \vec{\tau}_{CM}^{(ext)} = \vec{0} \end{cases}$$

que se conocen como *condiciones de equilibrio estático del cuerpo rígido*.

Dado que no hay rotación respecto de ningún punto O , uno podría plantear la condición de torque nulo respecto de cualquier punto O . Para comprobar que no hay ambigüedad (es decir que los resultados no dependen del punto O elegido) tenemos que probar la siguiente:

Propiedad: cuando la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es nula, la suma de torques externos es independiente del punto respecto del cual se los calcule.

Consideremos dos puntos O y O' fijos en el sistema inercial, y una fuerza externa aplicada en cierto punto del cuerpo.



Los torques de esta misma fuerza, respecto de distintos puntos, es en general distinto,

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{R} + \vec{r}') \times \vec{F} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{r}' \times \vec{F} = \vec{R} \times \vec{F} + \vec{\tau}_{O'}$$

Cuando actúan varias fuerzas el torque neto respecto de O se puede desarrollar,

$$\begin{aligned}\sum \vec{\tau}_O^{(ext)} &= \sum \vec{R} \times \vec{F}^{(ext)} + \sum \vec{\tau}_{O'}^{(ext)} \\ &= \vec{R} \times \left(\sum \vec{F}^{(ext)} \right) + \sum \vec{\tau}_{O'}^{(ext)} \\ &= \sum \vec{\tau}_{O'}^{(ext)}\end{aligned}$$

por la hipótesis $\sum \vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$. En consecuencia, si la suma de torques es cero respecto de un punto, será cero respecto de cualquier punto. Esto justifica que en los problemas de estática podamos elegir el punto O a nuestra mejor conveniencia.

Los ejercicios 14 y 15 de la Práctica 10 se plantean con estas condiciones de equilibrio estático. El 16 combina estas condiciones con otras preguntas.

Ejemplo: el inciso e) del ejercicio 1 de la Práctica 10 también se puede plantear como un problema de estática. Tenemos que encontrar la longitud L en la figura para que la varilla permanezca en reposo (equilibrio estático).

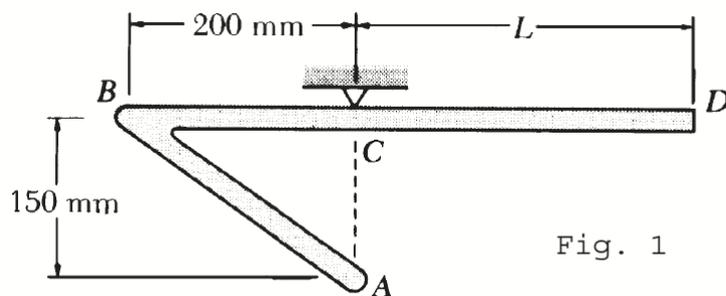
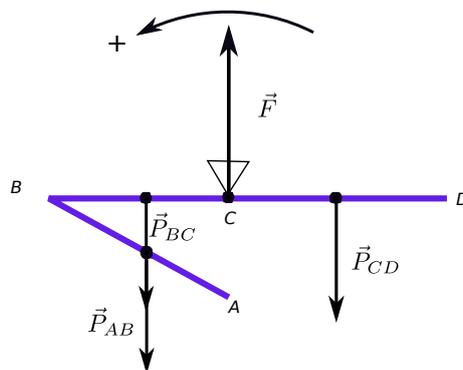


Fig. 1

Consideremos a la varilla, con densidad lineal λ homogénea, como formada por tres tramos: AB , BC y CD . Cada uno tiene su centro de masa en su punto medio. Las fuerzas externas aplicadas son el peso de cada tramo y la fuerza aplicada por el punto suspensión. El peso de cada tramo está aplicado en su centro de gravedad (Clase 24, página 4), que coincide con su centro de masa. El diagrama de fuerzas, respetando sus puntos de aplicación, se puede dibujar



Llamemos $L_{AB} = \sqrt{(200 \text{ mm})^2 + (150 \text{ mm})^2}$ y $L_{BC} = 200 \text{ mm}$ a la longitud de los primeros tramos. Luego las masas de cada uno son $M_{AB} = \lambda L_{AB}$, $M_{BC} = \lambda L_{BC}$ y $M_{CD} = \lambda L$. Notemos que los centros de gravedad de los tramos AB y BC están en la misma vertical, luego sus pesos tienen el mismo brazo de acción $L_{BC}/2$ respecto del punto C .

La sumatoria de fuerzas, con signo más hacia arriba, indica que

$$F - M_{AB}g - M_{BC}g - M_{CD}g = 0$$

La suma de torques, si elegimos considerarlos respecto del punto C de suspensión y con la convención de torques positivos en sentido antihorario, indica que

$$M_{AB}g \frac{L_{BC}}{2} + M_{BC}g \frac{L_{BC}}{2} - M_{cd}g \frac{L}{2} = 0$$

Reemplazando las masas de cada tramo podemos despejar L (que no depende de la densidad lineal λ) y F (que es proporcional a λ).

10. Rotación respecto de un eje que no está fijo. Ejemplos de momento angular que cambia de dirección.

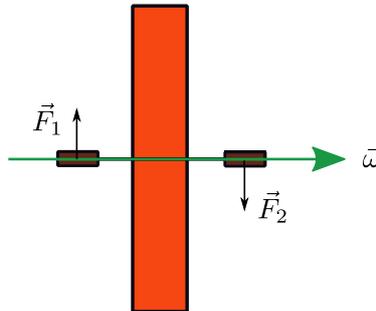
Dado que en general \vec{L}_{CM} depende del tiempo, y que

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{CM}^{(ext)},$$

cuando hay torques externos que apuntan en alguna dirección distinta que \vec{L}_{CM} y el eje *no está fijo*, resulta que $\vec{L}_{CM}(t)$ cambia de dirección.

Comentaremos dos situaciones de cuerpos rígidos girando sobre un eje principal con $|\vec{L}_{CM}|$ grande, cuando un torque aplicado por fuerzas externas que no es paralelo a \vec{L}_{CM} : la inclinación del eje de una rueda mientras está girando y el movimiento de un trompo que gira con su eje inclinado respecto de la vertical.

Ejemplo: Una rueda de bicicleta se monta sobre un eje de unos 30 cm, de forma tal que se puede sostener con una mano en cada extremo del eje. Se sostiene el eje de forma horizontal y se le da la mayor velocidad angular horizontal (y segura para la persona que la sostiene). ¿Qué sucede cuando la persona intenta girar el eje de la rueda, bajando la mano derecha y subiendo la mano izquierda?



Dibujemos la rueda, y supongamos que la velocidad angular apunta hacia la derecha. Dado que la rueda está bien balanceada, su momento angular $\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega}$ también apunta hacia la derecha.

Cuando uno intenta mover la dirección del eje, con las fuerzas indicadas en la figura, ejerce un torque neto respecto del CM que apunta hacia adentro de la pantalla; a diferencia de la mayoría de los ejercicios de esta práctica, este torque no es paralelo a \vec{L}_{CM} . Al contrario, es perpendicular a \vec{L}_{CM} .

Para calcular el efecto de este torque dejemos transcurrir un intervalo de tiempo infinitesimal dt . El cambio en el vector \vec{L}_{CM} se puede calcular, en aproximación diferencial, como

$$d\vec{L}_{CM} = \left(\sum \vec{\tau}_{CM}^{(ext)} \right) dt$$

Entonces, *el cambio de \vec{L}_{CM} apunta en la dirección del torque neto*, es decir hacia adentro de la pantalla. El eje de rotación va a seguir la nueva dirección de \vec{L}_{CM} . Intentamos bajar la mano derecha, pero no podemos evitar que se nos aleje del cuerpo; intentamos subir la mano izquierda, pero logramos que se nos acerque. ¡Y el eje sigue en el plano horizontal!

Este efecto es más notable cuanto mayor sea el momento angular de la rueda. En el LEF (Laboratorio de Enseñanza de la Física) tenemos una llanta de bicicleta rellena con plomo, para darle un buen momento de inercia, y una polea para enrollarle una cuerda, tirar de ella y darle una buena velocidad angular. Espero que algún día puedan probar y convencerse.

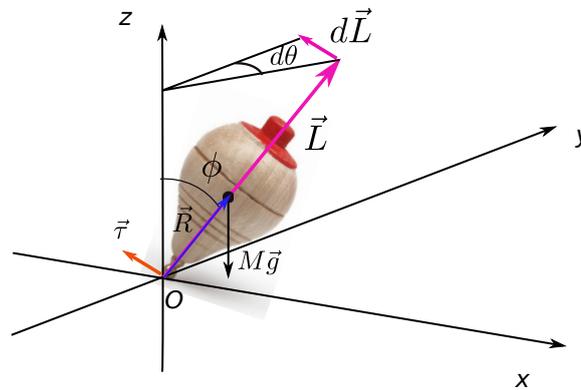
Este efecto también explica cómo algunos los movimientos que uno hace al andar en bicicleta ayudan a mantener el equilibrio. Intenten interpretarlo.

Ejemplo: movimiento de precesión de un trompo apoyado en un extremo de su eje principal

Otro ejemplo clásico para mostrar el cambio de dirección del momento angular es el movimiento de precesión de un trompo: cuando se lo deja girar con velocidad angular ω alrededor de su eje, apoyado en un extremo y con

su eje principal inclinado un ángulo ϕ respecto de la vertical, vemos que el peso no logra tumbarlo. En cambio, el eje principal rota alrededor de la vertical describiendo un cono. La velocidad angular Ω con que el trompo completa ese cono se llama *velocidad de precesión*.

Describamos la precesión en el siguiente esquema:



El torque del peso del trompo, aplicado en su CM, respecto del punto de apoyo O es $\vec{\tau} = \vec{R} \times M\vec{g}$. La fuerza del piso sobre el trompo, aplicada en el apoyo O , no ejerce torque respecto de O . En un intervalo infinitesimal dt el momento angular $\vec{L} = I\vec{\omega}$ sufre un cambio

$$d\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{g} dt$$

indicado en la figura. El vector momento angular gira alrededor de la vertical un ángulo (en radianes)

$$d\theta = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}| \sin \phi}$$

Dado que

$$|d\vec{L}| = RMg \sin \phi dt$$

y que $|\vec{L}| = I\omega$,

$$d\theta = \frac{RMg \sin \phi dt}{I\omega \sin \phi} = \frac{RMg dt}{I\omega}$$

Encontramos la velocidad de precesión como

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{MgR}{I\omega}$$

En esta deducción dejamos implícito que el trompo no vuelca, al tratar al ángulo ϕ como constante. Esto es aceptable si la velocidad angular del trompo sobre su eje es mucho mayor que su velocidad de precesión ($\omega \gg \Omega$). Si la velocidad ω no es tan grande (cosa que sucede por roce, cuando el trompo se va deteniendo, el ángulo ϕ crece y se recupera, periódicamente. Este "cabeceo" del trompo se conoce como *nutación*.