

# Clase 25: Rotación de cuerpos rígidos en torno a ejes fijos en el espacio

26 de junio de 2020

En esta clase discutimos el movimiento de rotación de cuerpos rígidos más reales, que ocupan un volumen en el espacio de tres dimensiones. Consideramos que el cuerpo en estudio está montado sobre un eje fijo a un sistema inercial; de esta manera el único movimiento posible es la rotación sobre dicho eje.

Puede ocurrir, en general, que el momento angular del cuerpo no sea paralelo al eje de rotación; en esos casos se dice que el cuerpo está desbalanceado y se observa que el vector momento angular gira junto con el cuerpo. Para una descripción completa de esta situación es necesario generalizar la noción de momento de inercia. Solo veremos un ejemplo sencillo ahora, el tema completo corresponde a un curso avanzado de Mecánica.

Sin embargo, se pueden construir cuerpos con cierta simetría, y se los puede montar sobre un eje en cierta posición<sup>1</sup>, de manera tal que al girar el momento angular sí resulta paralelo al eje. En esos casos se dice que el cuerpo está montado sobre un *eje principal*, podemos definir un momento de inercia y escribir  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ ; la descripción del movimiento de rotación es similar a la de cuerpos planos.

## Ejes fijos y fuerzas de vínculo

Un eje es un cuerpo con forma cilíndrica, en general delgado (es decir con un largo mucho mayor que su diámetro) y rígido. Decimos que está fijo cuando existe un montaje (soporte) que impide que sus extremos se trasladen. Y decimos que el eje está fijo a un sistema inercial cuando el montaje está en reposo en un sistema inercial.

A su vez, hay otro mecanismo que permite montar firmemente un cuerpo rígido sobre el eje. Esto implica que los puntos de una línea recta imaginaria dibujada *sobre* el cuerpo<sup>2</sup> se mantienen siempre sobre el eje, y en consecuencia están en reposo en el sistema inercial.

Por último, el montaje (bujes, rodamientos) permite que el cuerpo gire alrededor del eje<sup>3</sup>. Esto quiere decir que cada partícula del cuerpo describe un movimiento circular, en una circunferencia contenida en plano perpendicular al eje, con centro sobre el eje y con un radio dado por la distancia de la partícula al eje. Es importante notar que distintas partículas giran alrededor de distintos puntos; por ejemplo, si el eje está en posición vertical las partículas recorren circunferencias a distintas alturas, con distintos centros a distintas alturas.

Notemos que el eje es el cuerpo que fuerza al cuerpo rotante a moverse de la manera descripta. Geométricamente, se dice que el eje impone vínculos al movimiento del cuerpo rotante. Físicamente, esos vínculos se mantienen ejerciendo fuerzas: el eje hace sobre el cuerpo las fuerzas necesarias para mantener a las partículas en sus trayectorias circulares. Además, puede ejercer fuerzas de roce. Cuando estudiamos el movimiento del cuerpo rotante, las fuerzas que hace el eje sobre él actúan como fuerzas externas.

Las fuerzas que imponen condiciones geométricas sobre el movimiento de un cuerpo se clasifican como *fuerzas de vínculo*. Hemos trabajado antes con fuerzas de vínculo: por ejemplo la fuerza normal que mantiene a un cuerpo sobre una pista (le impide "hundirse") o la tensión de una cuerda que mantiene la bolita de un péndulo en su trayectoria circular, o la fuerza de roce estática que mantiene un bloque en reposo sobre un plano inclinado. Una característica común de todos estos ejemplos es que *la fuerza de vínculo toma el valor (módulo, dirección y sentido) necesarios para mantener el movimiento observado*. Otra característica común es que tienen un valor

---

<sup>1</sup>Para ser correcto, siempre se puede montar un cuerpo rígido, de cualquier forma y tamaño, de manera tal que  $\vec{L}$  resulte paralelo al eje de rotación. Las direcciones de montaje que permiten esto se llaman *ejes principales* del cuerpo. En este curso trabajamos cuerpos con ciertas simetrías que permitan identificar intuitivamente al menos un eje principal.

<sup>2</sup>Se suele decir *solidaria* al cuerpo.

<sup>3</sup>En algunos casos el eje mismo no gira, habiendo rodamientos en el montaje del cuerpo al eje. En otros casos el eje gira junto con el cuerpo, habiendo rodamientos en el montaje del eje a su soporte.

límite: un cuerpo en un rizo puede hundir la pista si tiene mucha velocidad, una cuerda puede cortarse si se le exige demasiada tensión, un bloque puede deslizar si el plano inclinado se inclina demasiado. De la misma manera, un eje puede romperse si se le exige demasiada fuerza.

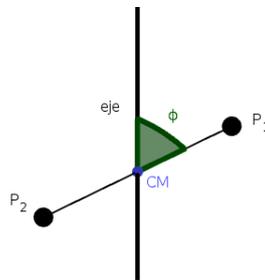
**Ejemplo:** consideren un disco plano de masa  $M$  y radio  $R$ , apoyado en una superficie horizontal sin roce y rotando con velocidad angular  $\omega$  alrededor de un eje fijo vertical que pasa por un punto de su borde. Calculen todas las fuerzas externas que actúan sobre el disco, indicando qué agente las ejerce.

Repitan el análisis cuando el eje pasa por el CM.

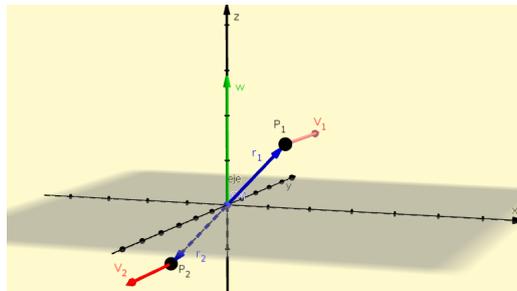
## Ejemplo: rotación de una mancuerna desbalanceada

En esta sección discutimos un ejemplo sencillo donde podemos apreciar cómo construir el momento angular de un cuerpo rígido, rotando alrededor de un eje fijo. Veremos que el momento angular  $\vec{l}_i$  de cada partícula en general no es paralelo al eje de rotación.

Consideremos como cuerpo rígido una "mancuerna ideal", formada por dos partículas de masas iguales  $m_1 = m_2 = m$  unidas por una varilla rígida de masa despreciable de longitud  $2R$ . El centro de masa de este cuerpo se encuentra exactamente en su punto medio, a distancia  $R$  de cada partícula.



Se cuenta con un eje vertical delgado, sujeto con rodamientos al piso y al techo, que puede girar sobre sí mismo. Usamos un sistema de coordenadas con el origen  $O$  sobre el eje, a cierta altura sobre el piso, y con el eje  $z$  positivo hacia arriba; los ejes  $x$  e  $y$  son horizontales y no rotan. Se sujeta firmemente el cuerpo rígido al eje, de manera tal que el CM coincide con el punto  $O$  y la varilla forma un ángulo  $\phi < \pi/2$  con el eje.



El eje se pone a girar, con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$  en la dirección positiva del eje  $z$ . La mancuerna gira junto con el eje y mantiene siempre el ángulo  $\phi$  con el mismo.

**Preguntas:** ¿Qué tipo de movimiento realiza cada partícula?

¿Cuál es el momento angular de cada partícula respecto del origen de coordenadas? ¿Es constante? ¿Para dónde apunta?

¿Cuál es el momento angular del cuerpo rígido respecto del origen de coordenadas? ¿Es constante? ¿Para dónde apunta?

Llamemos partícula 1 a la que queda en el semi-espacio superior ( $z > 0$ ), y partícula 2 a la que queda en el semiespacio inferior. Contemos el tiempo con un cronómetro que marca  $t = 0$  cuando la partícula 1 pasa el primer cuadrante del plano  $xz$ ; la partícula 2 se encuentra entonces en el tercer cuadrante (ver figura más arriba).

Cada partícula realiza un movimiento circular alrededor del eje  $z$ . La trayectoria de la partícula 1 es una circunferencia de radio  $R_1 = R \sin \phi$  con centro  $O_1 = (0, 0, R \sin \phi)$ , paralela al plano  $xy$ . Las coordenadas  $x_1$  e  $y_1$  de esta partícula están dadas por un MCU, mientras la coordenada  $z_1$  es constante:

$$\begin{cases} x_1(t) = R_1 \cos(\omega t) \\ y_1(t) = R_1 \sin(\omega t) \\ z_1(t) = R \cos \phi \end{cases}$$

Dado que el CM de la mancuerna se encuentra en el origen de coordenadas, y las masas son iguales, el vector posición de la partícula 2 es opuesto al de la partícula 1,:

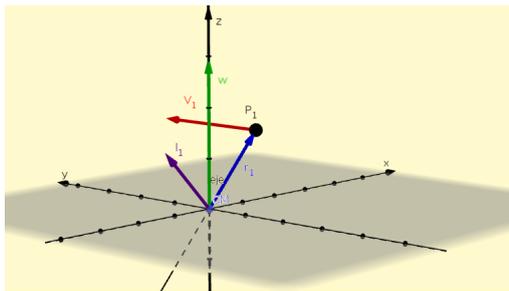
$$\begin{cases} x_2(t) = -R_2 \cos(\omega t) \\ y_2(t) = -R_2 \sin(\omega t) \\ z_2(t) = -R \cos \phi \end{cases}$$

esto es una circunferencia con radio  $R_2 = R \sin \phi$  con centro  $O_2 = (0, 0, -R \sin \phi)$ , también paralela al plano  $xy$ .

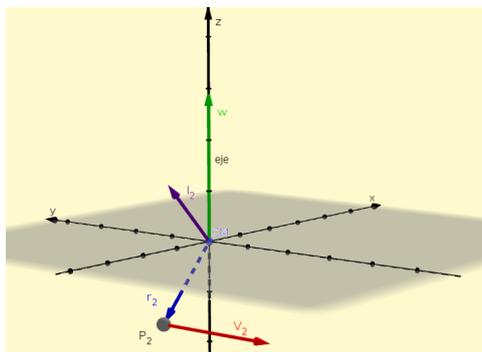
Calculemos el momento angular de cada partícula, visualizando módulos, ángulos y regla de la mano derecha, cuando  $t = 0$ :

La partícula 1 está en el primer cuadrante del plano  $xz$  y su velocidad  $\vec{v}_1$  (tangencial a la trayectoria) apunta en la dirección  $y$  positiva, con módulo  $v_1 = \omega R_1 = \omega R \sin \phi$ . La partícula 2 tiene entonces una velocidad  $\vec{v}_2$  apuntando en la dirección  $y$  negativa, con módulo  $v_2 = \omega R_2 = \omega R \sin \phi$  igual a  $v_1$ .

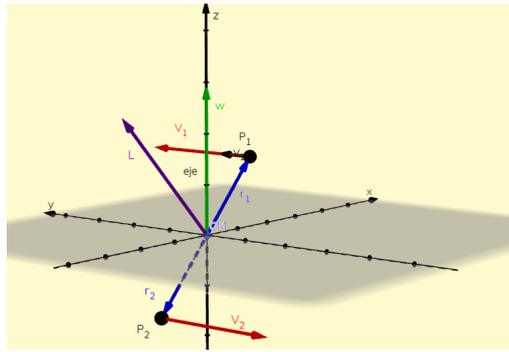
Dado que el vector posición  $\vec{r}_1$  es perpendicular a la velocidad  $\vec{v}_1$  el momento angular  $\vec{l}_1 = m \vec{r}_1 \times \vec{v}_1$  respecto del origen tiene módulo  $mRv_1 = mR^2\omega \sin \phi$ . Usando la regla de la mano derecha se encuentra que  $\vec{l}_1$  **apunta hacia el segundo cuadrante** formando un ángulo  $\pi/2 - \phi$  con el eje  $z$ .



Por otro lado, como  $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$  y  $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ , encontramos que  $\vec{l}_2 = m \vec{r}_2(t) \times \vec{v}_2(t) = m \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) = \vec{l}_1(t)$ . Pueden comprobar con la regla de la mano derecha que  $\vec{l}_2$  **apunta hacia el segundo cuadrante**, igual que  $\vec{l}_1$ .



Por lo tanto el momento angular de la mancuerna  $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = 2\vec{l}_1$  tiene módulo  $2mR^2\omega \sin \phi$  y forma un ángulo  $\pi/2 - \phi$  con el eje  $z$ . Encontramos que  $\vec{L}$  no es paralelo a  $\vec{\omega}$ , la mancuerna está desbalanceada.



Para expresar estos resultados en lenguaje de componentes cartesianas describimos el movimiento de cada partícula en función del tiempo. Las posiciones de las partículas en el espacio de tres dimensiones son

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t) &= R \sin \phi \cos(\omega t) \check{i} + R \sin \phi \sin(\omega t) \check{j} + R \cos \phi \check{k} \\ \vec{r}_2(t) &= -R \sin \phi \cos(\omega t) \check{i} - R \sin \phi \sin(\omega t) \check{j} - R \cos \phi \check{k}\end{aligned}$$

Las velocidades se obtienen derivando respecto del tiempo,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1(t) &= -\omega R \sin \phi \sin(\omega t) \check{i} + \omega R \sin \phi \cos(\omega t) \check{j} \\ \vec{v}_2(t) &= \omega R \sin \phi \sin(\omega t) \check{i} - \omega R \sin \phi \cos(\omega t) \check{j}\end{aligned}$$

El momento angular de la partícula 1 respecto del origen  $O$  se calcula usando componentes como

$$\begin{aligned}\vec{l}_1(t) &= m \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) \\ &= m\omega R^2 (\sin \phi \cos(\omega t) \check{i} + \sin \phi \sin(\omega t) \check{j} + \cos \phi \check{k}) \times (-\sin \phi \sin(\omega t) \check{i} + \sin \phi \cos(\omega t) \check{j}) \\ &= m\omega R^2 \sin \phi [-\cos \phi (\cos(\omega t) \check{i} + \sin(\omega t) \check{j}) + \sin \phi \check{k}]\end{aligned}\quad (1)$$

Este resultado es un vector de módulo  $|\vec{l}_1(t)| = m\omega R^2 \sin \phi$  constante, con una componente constante  $\omega R^2 \sin^2 \phi$  en el eje  $z$  y una componente rotante de módulo  $\omega R^2 \sin \phi \cos \phi$  en el plano  $xy$ . Es recomendable que comparen estos resultados con los que encontramos usando la regla de la mano derecha. Por otro lado, como vimos,  $\vec{l}_2(t) = \vec{l}_1(t)$ . Por lo tanto el momento angular de la mancuerna, formada por las dos partículas, es

$$\begin{aligned}\vec{L}(t) &= \vec{l}_1(t) + \vec{l}_2(t) \\ &= 2m\omega R^2 \sin \phi [-\cos \phi (\cos(\omega t) \check{i} + \sin(\omega t) \check{j}) + \sin \phi \check{k}]\end{aligned}\quad (2)$$

Volvemos a comprobar que  $\vec{L}(t)$  no apunta en la dirección de la velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Para  $t = 0$  recuperamos el resultado que discutimos con la regla de la mano derecha:

$$\vec{L}(t = 0) = 2mR^2\omega \sin \phi (-\cos \phi \check{i} + \sin \phi \check{k})$$

Pueden comprobar que en todo instante  $\vec{L}(t)$  forma un ángulo  $\pi/2 - \phi$  con el eje  $z$  y se mantiene en el plano determinado por el eje y la mancuerna; es decir, **el momento angular es un vector que gira con velocidad angular  $\omega$  alrededor del mismo eje que el cuerpo desbalanceado.**

Este ejemplo nos muestra que **no es posible escribir una relación del tipo  $\vec{L} = I \vec{\omega}$**  para este cuerpo rígido (tan sencillo, formado por dos partículas). El eje elegido no es un eje principal, una componente de  $\vec{\omega}$  se relaciona con las tres componentes de  $\vec{L}$ <sup>4</sup>. Por otro lado, queda en evidencia que  $\vec{L}$  varía en el tiempo; su componente a lo largo del eje es constante pero las componentes perpendiculares al eje rotan con velocidad angular  $\omega$ . Dado que

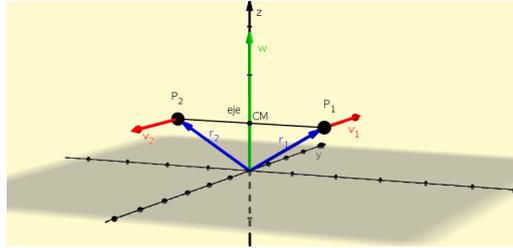
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}^{(ext)} \neq \vec{0}$$

deducimos que hay fuerzas externas y hay torques actuando sobre el cuerpo rígido. El agente que hace esas fuerzas es el propio eje, mediante fuerzas de vínculo.

<sup>4</sup>Se dice que esa relación es tensorial. En cursos más avanzados se introduce el *tensor de inercia*.

## Simetrías y cuerpos balanceados. Momento de inercia respecto de un eje principal.

Si en el ejemplo anterior la masa  $m_2$  estuviera en el semiplano superior, el sistema de dos partículas estaría balanceado y el eje de montaje sería un eje principal.



Concretamente, para  $t = 0$  en el sistema de dos partículas dibujado las posiciones de las partículas son

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= R \sin \phi \check{i} + R \cos \phi \check{k} \\ \vec{r}_2 &= -R \sin \phi \cos(\omega t) \check{i} + R \cos \phi \check{k} \end{aligned}$$

Sus velocidades son,

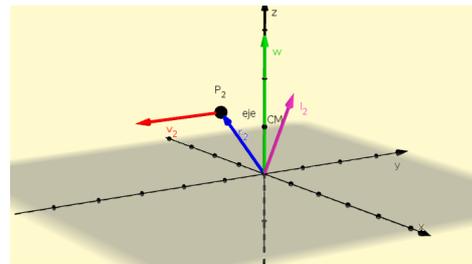
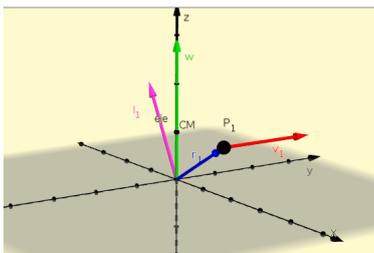
$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \omega R \sin \phi \cos(\omega t) \check{j} \\ \vec{v}_2 &= -\omega R \sin \phi \cos(\omega t) \check{j} \end{aligned}$$

El momento angular de la partícula 1 respecto del origen  $O$  (que ahora no coincide con el CM) resulta

$$\begin{aligned} \vec{l}_1 &= m \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \\ &= m\omega R^2 (\sin \phi \check{i} + \cos \phi \check{k}) \times (\sin \phi \cos(\omega t) \check{j}) \\ &= m\omega R^2 \sin \phi [-\cos \phi \check{i} + \sin \phi \check{k}] \end{aligned} \tag{3}$$

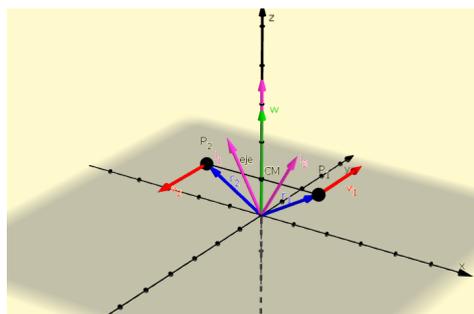
en tanto que el de la partícula 2 resulta

$$\begin{aligned} \vec{l}_2 &= m \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \\ &= m\omega R^2 (-\sin \phi \check{i} + \cos \phi \check{k}) \times (-\sin \phi \check{j}) \\ &= m\omega R^2 \sin \phi [\cos \phi \check{i} + \sin \phi \check{k}] \end{aligned} \tag{4}$$



Al sumar  $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$  vemos que *las componentes x se cancelan* y el momento angular del sistema apunta en la dirección del eje de rotación,

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = 2m(R \sin \phi)^2 \omega \check{k} \tag{5}$$



La lección de este ejemplo es la siguiente: si cada elemento de masa de un cuerpo rígido, que gira en torno a un eje fijo, está acompañado de otro elemento igual ubicado del otro lado del eje de rotación, el cuerpo está balanceado respecto de ese eje. Entonces, cuando el cuerpo gira con velocidad angular  $\vec{\omega}$  se puede escribir que  $\vec{L} = I\vec{\omega}$  con un coeficiente de proporcionalidad  $I$  que llamaremos *momento de inercia respecto del eje principal* elegido; en las ecuaciones (3, 4 y 5) vemos que la contribución de cada masa al momento de inercia es

$$m(d_{eje})^2$$

donde  $d_{eje} = R \sin \phi$  es la distancia de la masa al eje, es decir el radio de la circunferencia que describe la partícula. Noten que estamos calculando  $\vec{L}$  respecto de un punto  $O$  sobre el eje distinto del CM, y que el resultado sería el mismo respecto de *cualquier* punto del eje. Por eso, para cuerpos balanceados, hablamos de *momento angular respecto del eje*.

Si un cuerpo rígido está formado por *pares* de elementos de masa iguales, a ambos lados de un eje, se dice que el cuerpo tiene *simetría de inversión respecto de dicho eje*. Naturalmente dicho eje pasa por el centro de masas del cuerpo. Cuando el cuerpo gire alrededor de ese eje estará balanceado: su momento angular total será paralelo al eje de rotación. Podemos enunciar:

Si un cuerpo rígido tiene *simetría de inversión* respecto de un eje que pasa por su CM, cuando se pone a rotar alrededor de ese eje estará balanceado. Dada una velocidad angular de rotación  $\vec{\omega}$  su momento angular respecto de cualquier punto del eje se escribe

$$\vec{L} = I_{CM}\vec{\omega} \quad (6)$$

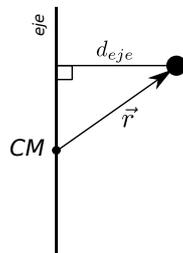
donde  $I_{CM}$  se llama *momento de inercia del cuerpo respecto del eje elegido*, que pasa por el CM.

El momento de inercia se calcula

$$I_{CM} = \int_{\text{cuerpo}} d_{eje}^2 dm \quad (7)$$

siendo  $d_{eje}$  la distancia de cada elemento de masa  $dm$  al eje de rotación.

Es importante destacar que  $d_{eje}$  no es el módulo del vector posición del elemento de masa. Es la distancia calculada entre un punto y una recta, que se mide perpendicular a la recta.



También es importante notar que el momento de inercia definido depende del eje elegido; dependiendo de la forma, en un mismo cuerpo rígido se pueden encontrar distintos ejes que pasen por el CM y presenten simetría de inversión.

## Energía cinética de rotación del cuerpo rígido, respecto de un eje principal

Cuando un cuerpo rígido está rotando alrededor de un eje fijo todas sus partículas describen un movimiento circular con la misma velocidad angular  $\omega$  y distintos radios dados por  $d_{eje}$ . Podemos escribir la energía cinética de rotación sumando la de cada elemento de masa, que tiene velocidad (en módulo)  $v = \omega d_{eje}$ :

$$\begin{aligned} E_{cin}^{\text{rotación}} &= \int_{\text{cuerpo}} \frac{1}{2} dm (\omega d_{eje})^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{\text{cuerpo}} d_{eje}^2 dm \right) \omega^2 \end{aligned}$$

Si el eje es un eje principal, la integral entre paréntesis es nuevamente el momento de inercia del cuerpo respecto de ese eje. Podemos escribir la relación sencilla

$$E_{cin}^{\text{rotación}} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (8)$$

## Cálculo de momentos de inercia respecto de un eje principal

El momento de inercia de un cuerpo continuo con un eje de simetría de inversión se calcula como la integral

$$I_{CM} = \int_{\text{volumen}} d_{eje}^2 \delta(\vec{r}) dV$$

donde  $\delta(\vec{r})$  es la densidad del material. Si alineamos el eje de simetría del cuerpo con el eje  $z$ , conviene organizar la integral separando "tajadas" del cuerpo paralelas al plano  $xy$

$$I_{CM} = \int_{\text{altura}} \left[ \int_{\text{área transversal}} \delta(x, y, z) ((x^2 + y^2) da) \right] dz$$

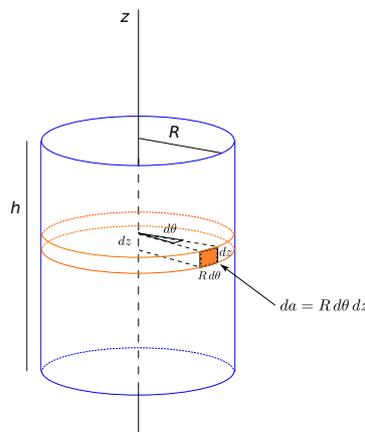
En esta expresión cada diferencial de volumen se ha escrito como  $dV = da dz$  donde  $da$  es un diferencial de área en un corte paralelo al plano  $xy$  y  $dz$  es un diferencial de altura. La distancia de cada elemento de masa  $dm$  al eje de simetría se ha escrito  $d_{eje}^2 = x^2 + y^2$ . La integral así planteada se resuelve en forma iterada: primero la integral de área y luego la integral sobre la altura. Cada integral de área tiene la forma de un momento de inercia calculado en el plano (Clase 24). Vamos a aprovechar esos resultados para integrarlos sobre  $z$  y así completar la integral sobre el volumen del cuerpo. En otros casos conviene resolver la integral de volumen en coordenadas esféricas.

Veamos cómo calcular el momento de inercia de las formas geométricas más frecuentes en cursos de Física General. Esencialmente es un trabajo de cálculo integral que verán en Análisis Matemático II. **Para resolver la práctica pueden omitir los cálculos y solo recordar estos resultados.**

**Ejemplo:** Momento de inercia de un tubo cilíndrico hueco homogéneo, de masa  $M$ , altura  $h$  y radio  $R$  respecto de su eje de simetría.

Ubiquemos el CM del tubo cilíndrico en el origen de un sistema cartesiano, con su eje de simetría alineado con el eje  $z$ . Las tajadas de altura infinitesimal  $dz$  tienen forma de anillos homogéneos de radio  $R$  y área

$$da_{\text{anillo}} = \int_0^{2\pi} R d\theta dz = 2\pi R dz$$



El tubo es un cuerpo delgado de dos dimensiones, es decir una superficie con área  $A = 2\pi R h$ . Para relacionar la masa con la densidad superficial  $\sigma$  (constante) del tubo calculamos la suma de las masas de anillos de altura infinitesimal  $dz$ :

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma 2\pi R dz \\ &= \sigma 2\pi R \int_{-h/2}^{h/2} dz \\ &= \sigma 2\pi R h \\ &= \sigma A \end{aligned}$$

Luego  $\sigma = M/A$ .

El momento de inercia lo calculamos en forma iterada:

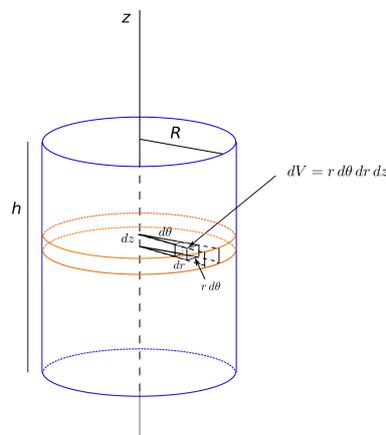
$$\begin{aligned}
 I_{CM}^{\text{tubo}} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \int_{\text{anillo}} \sigma R^2 dl \right] dz \\
 &= \sigma R^2 \int_{-h/2}^{h/2} 2\pi R dz \\
 &= (2\pi\sigma Rh) R^2 \\
 &= MR^2
 \end{aligned}$$

Para pasar al segundo renglón usamos el perímetro del anillo,  $\int_{\text{anillo}} dl = 2\pi R$ ; para pasar al tercer renglón usamos la altura del cilindro,  $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$ . Por último, usamos la masa del tubo  $M = \sigma 2\pi Rh$ . *El tubo hueco se puede ver como un apilamiento de anillos iguales, y su momento de inercia respecto de un eje perpendicular a los anillos, que pasa por el CM, tiene la misma forma que el momento de inercia del anillo respecto del eje perpendicular que pasa por el CM.*

**Ejemplo:** Momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo, de masa  $M$ , altura  $h$  y radio  $R$  respecto de su eje de simetría.

Ubiquemos el CM del cilindro en el origen de un sistema cartesiano, con su eje de simetría alineado con el eje  $z$ . Las tajadas de altura infinitesimal  $dz$  tienen forma de discos homogéneos de radio  $R$ . Un diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas se escribe como un cubito de lados  $dr$ ,  $r d\theta$  y  $dz$ ,  $dV = r d\theta dr dz$ . Un disco de altura  $dz$  tiene un volumen

$$dV_{\text{disco}} = \int_0^R \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) r dr dz = 2\pi \left( \int_0^R r dr \right) dz = \pi R^2 dz$$



El cilindro es un cuerpo tridimensional, con volumen  $V = \pi R^2 h$ . Para relacionar la masa con la densidad volumétrica  $\delta$  (constante) del cilindro calculamos la suma de las masas de discos de altura infinitesimal  $dz$ :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \pi R^2 dz \\
 &= \delta \pi R^2 \int_{-h/2}^{h/2} dz \\
 &= \delta \pi R^2 h \\
 &= \delta V
 \end{aligned}$$

Luego  $\delta = M/V$ .

El momento de inercia lo calculamos en forma iterada, usando el del disco:

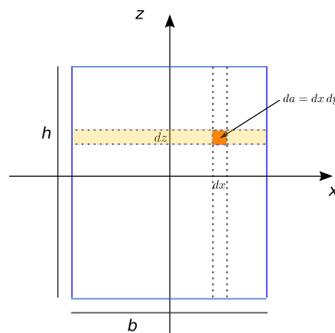
$$\begin{aligned}
 I_{CM}^{\text{cilindro}} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \int_{\text{disco}} \delta r^2 da \right] dz \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1}{2} \delta \pi R^2 dz \right) R^2 \\
 &= \frac{1}{2} \delta \pi R^2 h R^2 \\
 &= \frac{1}{2} M R^2
 \end{aligned}$$

Para pasar al segundo renglón usamos el resultado momento de inercia de un disco plano de espesor infinitesimal  $dz$ , es decir  $\frac{1}{2} dm R^2$  con  $dm = \delta \pi R^2 dz$ . Para pasar al tercer renglón usamos la altura del cilindro,  $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$ . Por último, usamos la masa del cilindro  $M = \delta \pi R^2 h$ . *El cilindro macizo se puede ver como un apilamiento de discos iguales, y su momento de inercia respecto de un eje perpendicular a los discos, que pasa por el CM, tiene la misma forma que el momento de inercia del disco respecto del eje perpendicular que pasa por el CM.*

**Ejemplo:** Momento de inercia de un rectángulo homogéneo, de masa  $M$ , base  $b$  y altura  $h$  respecto del eje de simetría perpendicular a la base.

Ubiquemos el rectángulo en un plano  $xz$ , con su CM en el origen y su eje de simetría alineado con el eje  $z$ . Las tajadas de altura infinitesimal  $dz$  tienen forma de varillas homogéneas de largo  $b$ . El área de una varilla infinitesimal es

$$da_{\text{varilla}} = \int_{-b/2}^{b/2} dx dz = b dz$$



El rectángulo es un cuerpo bidimensional, con área  $A = bh$ . Para relacionar la masa con la densidad superficial  $\sigma$  (constante) calculamos la suma de las masas de varillas de altura infinitesimal  $dz$ :

$$\begin{aligned}
 M &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma b dz \\
 &= \sigma b \int_{-h/2}^{h/2} dz \\
 &= \sigma bh \\
 &= \delta A
 \end{aligned}$$

Luego  $\sigma = M/A$ .

El momento de inercia lo calculamos en forma iterada, usando el de la varilla:

$$\begin{aligned}
 I_{CM}^{\text{rectángulo}} &= \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \int_{-b/2}^{b/2} \sigma x^2 dx \right] dz \\
 &= \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{1}{12} \sigma b dz \right) b^2 \\
 &= \frac{1}{12} \sigma b h b^2 \\
 &= \frac{1}{12} M b^2
 \end{aligned}$$

Para pasar al segundo renglón usamos el resultado momento de inercia de una varilla de largo  $b$  y espesor infinitesimal  $dz$ , es decir  $\frac{1}{12} dm b^2$  con  $dm = \sigma b dz$ . Para pasar al tercer renglón usamos la altura del rectángulo,  $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$ . Por último, usamos la masa del rectángulo  $M = \sigma b h$ . *El rectángulo se puede ver como un apilamiento de varillas iguales, y su momento de inercia respecto de un eje perpendicular a las varillas, que pasa por el CM, tiene la misma forma que el momento de inercia de una varilla respecto del eje perpendicular que pasa por el CM.*

**Ejemplo:** Momento de inercia de una cáscara esférica homogénea, de masa  $M$ , y radio  $R$ , respecto de un eje que pasa por su CM.

Una esfera tiene simetría de rotación respecto de cualquier eje que pase por su centro, que además es el CM de la esfera.

Ubiquemos la cáscara esférica con el centro en el origen de un sistema de coordenadas y consideremos un eje de rotación paralelo al eje  $z$ . Las tajadas de altura infinitesimal  $dz$  son anillos de radio variable, desde cero en los polos hasta  $R$  en el ecuador. La suma de momentos de inercia de los anillos infinitesimales se puede resolver convenientemente en coordenadas esféricas; los anillos se recorren variando el ángulo cenital entre  $0$  y  $\pi$ . Sin dar detalles, les cuento que

$$I_{CM}^{\text{cáscara esférica}} = \frac{2}{3} MR^2$$

**Ejemplo:** Momento de inercia de una esfera maciza homogénea, de masa  $M$ , y radio  $R$ , respecto de un eje que pasa por su CM.

Una esfera tiene simetría de rotación respecto de cualquier eje que pase por su centro, que además es el CM de la esfera.

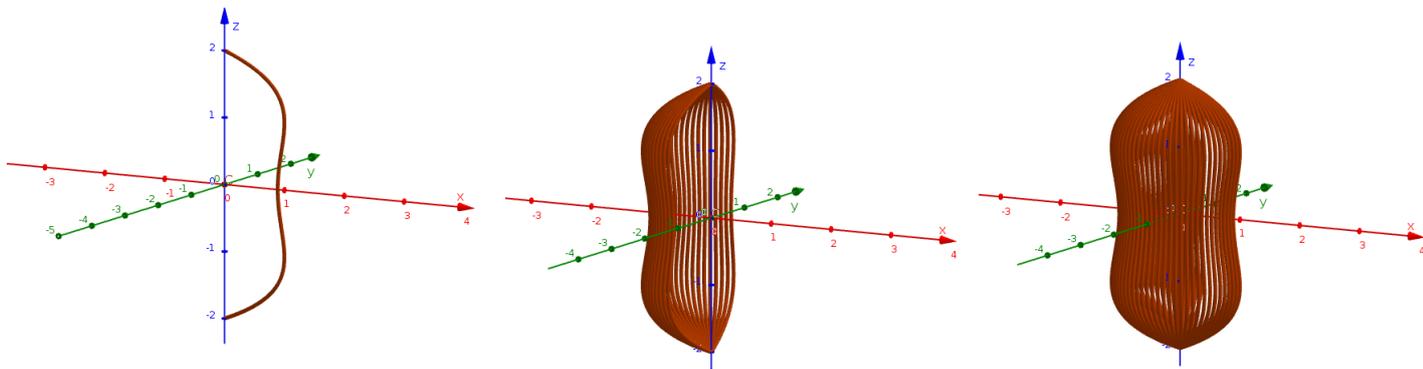
Ubiquemos la esfera con el centro en el origen de un sistema de coordenadas y consideremos un eje de rotación paralelo al eje  $z$ . Para aprovechar el resultado anterior conviene imaginar la esfera maciza como un apilamiento de cáscaras esféricas (como las hojas de una cebolla). La suma de momentos de inercia de cáscaras de espesor infinitesimal infinitesimales se puede resolver convenientemente con una coordenada radial; las cáscaras se recorren variando el radio entre  $0$  y  $R$ . Sin dar detalles, les cuento que

$$I_{CM}^{\text{esfera}} = \frac{2}{5} MR^2$$

## Sólidos de revolución

Podemos identificar un tipo de cuerpos en tres dimensiones que evidentemente tienen simetría de inversión respecto de un cierto eje. Más aún, tienen una simetría mayor que se llama *simetría de rotación* en torno a un eje. Se los conoce como *sólidos de revolución*. La esfera y el cilindro que ya estudiamos son ejemplos de este tipo.

Un sólido de revolución es el cuerpo continuo que se obtiene girando una figura plana alrededor de un eje, una vuelta completa.

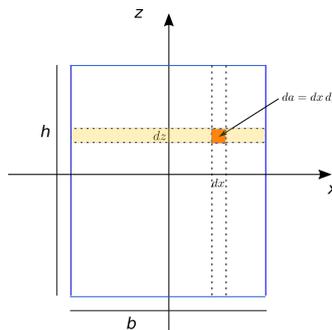


Si ubicamos el eje en la dirección  $z$  de un sistema cartesiano, los puntos de la figura plana se repiten a lo largo de la circunferencia generada al dar una vuelta al eje. De esta manera cada elemento de masa  $dm$  tiene otro igual del otro lado del eje, y el sólido tiene asegurada la simetría de inversión. Además cada elemento de masa  $dm$  se repite continuamente a lo largo de la circunferencia: si le sacamos una foto al cuerpo, lo giramos un ángulo cualquiera alrededor del eje de simetría y sacamos otra foto, serán exactamente iguales. Se dice que el cuerpo es invariante ante rotaciones alrededor de ese eje.

Físicamente, un eje de simetría de rotación es un eje principal: si el cuerpo gira sobre ese eje estará balanceado. El momento de inercia de un sólido de revolución respecto de su eje de simetría se puede calcular como la suma de los momentos de inercia de "tajadas" perpendiculares al eje, cada una tiene forma de disco.

### Cuerpos planos y ejes perpendiculares. Teorema de los ejes perpendiculares

Para concluir la presentación del cálculo de momentos de inercia comentamos un caso interesante: un cuerpo plano con dos ejes de simetría en el plano, perpendiculares entre sí.



Por ejemplo, consideremos el rectángulo de base  $b$  y altura  $h$ . Ya calculamos el momento de inercia respecto del eje de simetría perpendicular a la base (eje  $z$  en la figura). Llamémoslo

$$I_z = \frac{1}{12} M b^2$$

También podríamos calcular el momento de inercia respecto del eje de simetría perpendicular a la altura (eje  $x$  en la figura). Si lo llamamos  $I_x$ , repetimos el cálculo y tenemos que

$$I_x = \frac{1}{12} M h^2$$

Pero también podríamos montar el rectángulo sobre un eje perpendicular al plano (eje  $y$ , hacia adentro en la figura), que pase por el CM y calcular el correspondiente momento de inercia  $I_y$ . Veamos cómo están relacionados estos momentos de inercia.

Consideremos un elemento infinitesimal de masa  $dm = \sigma dx dy$  como el indicado en la figura:

- Para calcular  $I_z$  tenemos que sumar contribuciones  $x^2 dm$ , porque la distancia del  $dm$  al eje  $z$  es  $|x|$ .
- Para calcular  $I_x$  tenemos que sumar contribuciones  $z^2 dm$ , porque la distancia del  $dm$  al eje  $x$  es  $|z|$ .

- Para calcular  $I_y$  tenemos que sumar contribuciones  $(x^2 + y^2) dm$ , porque la distancia del  $dm$  al eje  $y$ , perpendicular al plano, es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

Luego,

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\text{rectángulo}} (x^2 + y^2) dm \\ &= \int_{\text{rectángulo}} x^2 dm + \int_{\text{rectángulo}} y^2 dm \\ &= I_x + I_z \end{aligned}$$

Este resultado se conoce como teorema de los ejes perpendiculares y es útil para ahorrar cálculos (es decir, aprovechar algunos resultados para generar resultados nuevos).

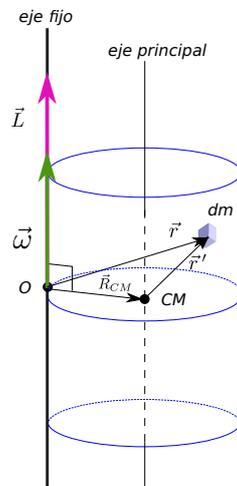
Aprovechemos este ejemplo para observar que un cuerpo se puede poner a rotar sobre distintos ejes; el momento de inercia que deben usar depende del eje de montaje.

## Rotación en torno a un eje fijo paralelo a un eje principal

Consideremos un cuerpo rígido que tiene un eje de simetría que pasa por su CM, montado sobre un eje (fijo a un sistema inercial) paralelo al eje de simetría pero que no pasa por el CM. Ubiquemos el punto  $O$  del eje fijo tal que un plano perpendicular al eje contiene al CM del cuerpo (por ejemplo, si el eje es vertical, el punto  $O$  es el que tiene la misma altura que el CM).

Vamos a demostrar que, cuando el cuerpo gira con velocidad angular  $\vec{\omega}$ , el momento angular  $\vec{L}$  del cuerpo respecto al punto  $O$  indicado resulta paralelo al eje de rotación, es decir se puede definir un momento de inercia  $I_O$  y escribir

$$\vec{L} = I_O \vec{\omega}$$



Para probar esta afirmación usamos la descomposición del momento angular en su parte orbital y su parte interna (Clase 23, página 9):

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$

Dado que el cuerpo gira alrededor del eje con velocidad angular  $\vec{\omega}$  podemos escribir  $\vec{V}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}$  resolver la parte orbital como

$$\begin{aligned} M \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} &= M \vec{R}_{CM} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM}) \\ &= M (\vec{R}_{CM} \cdot \vec{R}_{CM}) \vec{\omega} - M (\vec{R}_{CM} \cdot \vec{\omega}) \vec{R}_{CM} \\ &= M R_{CM}^2 \vec{\omega} \end{aligned}$$

Para calcular la parte interna tenemos que reconocer que el cuerpo rota respecto de su eje de simetría con la misma velocidad angular  $\vec{\omega}$  con que rota respecto del eje fijo. Luego el momento angular interno se escribe

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega}$$

y el momento angular total respecto de  $O$  resulta

$$\vec{L} = (MR_{CM}^2 + I_{CM})\vec{\omega}$$

El momento de inercia del cuerpo respecto del eje paralelo (al eje de simetría que pasa por el CM) resulta ser  $I_O = MR_{CM}^2 + I_{CM}$ .

Este resultado se conoce como regla de Steiner para el momento de inercia respecto de ejes paralelos. Dado que el vector  $\vec{R}_{CM}$  se construyó perpendicular al eje, su módulo  $R_{CM}$  es la distancia  $d$  entre los ejes paralelos. Conviene recordar la expresión como

Regla de Steiner:

$$I_O = Md^2 + I_{CM}$$

donde  $d$  es la distancia entre el eje fijo y el eje principal que pasa por el CM.

## Energía cinética de rotación del cuerpo rígido, respecto de un fijo paralelo a un eje principal

Con el momento de inercia  $I_O$  podemos escribir en forma compacta la energía cinética de rotación del cuerpo en torno al eje fijo. Comenzamos por la descomposición de la energía cinética en una parte de traslación del CM y otra parte interna (Clase 21, ecuación 17):

$$E_{cin} = \frac{1}{2}M V_{CM}^2 + E'_{cin}$$

En el primer término podemos reemplazar  $V_{CM} = \omega R_{CM}$  porque el CM realiza un movimiento circular con radio  $R_{CM}$ . El segundo término es la energía de las partículas moviéndose alrededor del CM; en este caso rotan con velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje principal y podemos escribirla como  $E'_{cin} = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2}M R_{CM}^2 \omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(M R_{CM}^2 + I_{CM})\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}I_O\omega^2 \end{aligned}$$

Observen que tienen dos maneras de escribir la energía cinética de la rotación respecto de un eje fijo: la primera describe al movimiento como una traslación del CM junto con una rotación alrededor del CM, y la segunda describe al movimiento como una "rotación pura" respecto del eje fijo.

## Resumen: dinámica de la rotación del cuerpo rígido

A lo largo de esta clase y la anterior caracterizamos la rotación de cuerpos alrededor de ejes, sea fijos o sea libres que pasen por el CM. Con los resultados obtenidos podemos describir en forma compacta la dinámica de la rotación del cuerpo rígido: relacionar las fuerzas aplicadas con la aceleración del cuerpo y con su energía cinética.

Hagamos un resumen práctico. Este resumen debe entenderse en el contexto de todas las consideraciones que hemos discutido y que repetimos aquí.

## Dinámica de la rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

El momento angular del cuerpo respecto del eje se escribe usando el momento de inercia  $I_O$  respecto del eje como

$$\vec{L} = I_O \vec{\omega}$$

Si el eje fijo pasa por el CM, deben usar el momento de inercia  $I_{CM}$ . Si no pasa por el CM deben usar el momento de inercia correspondiente; pueden encontrarlo con la regla de Steiner.

Dado que el eje está fijo, estos vectores tienen una sola componente útil para el cálculo. Llamemos  $z$  al eje de rotación y recordemos que

$$L_z = I_O \omega \quad (9)$$

Podemos usar la convención de signos horaria para interpretar la dirección de los vectores (o lo que es lo mismo, el sentido de la rotación).

La relación entre fuerzas aplicadas y momento angular (Clase 23, página 7) es

$$\sum_{\alpha} \vec{\tau}_{\alpha}^{(ext)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

El eje fijo se encarga de mantener la dirección de  $\vec{L}$ : si algún torque intenta cambiar dirección de  $\vec{L}$  el eje hará fuerzas de vínculo que compensen ese torque. Como resultado, mientras no se pregunte por los torques que hace el eje, solo la componente  $z$  de esta ecuación es útil para el cálculo. Reemplazando  $L_z = I_O \omega$  obtenemos

$$\sum_{\alpha} \tau_{\alpha,z}^{(ext)} = I_O \alpha \quad (10)$$

donde  $\alpha = d\omega/dt$  es la aceleración angular del cuerpo.

## Trabajo y energía en la rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

Desde el punto de vista de trabajo y energía conviene recordar:

- El trabajo realizado por una fuerza externa sobre un cuerpo en rotación es  $dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$  (Clase 24, página 11). Nuevamente, el eje fijo obliga a que el ángulo infinitesimal  $d\vec{\theta}$  tenga solo componente  $z$ . Luego solo la componente  $z$  del torque puede hacer trabajo:

$$\begin{cases} dW = \tau_z d\theta & \text{en una rotación infinitesimal} \\ W = \int \tau_z d\theta = \tau_z \Delta\theta & \text{en una rotación finita con torque constante} \end{cases} \quad (11)$$

- La energía cinética del cuerpo rotando alrededor del eje fijo se escribe

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad (12)$$

- La energía potencial gravitatoria se puede escribir como la de una partícula de masa  $M$  ubicada en el CM; es decir que se puede escribir

$$U_g = Mgh_{CM}$$

Si el eje es vertical, la altura del centro de masa no cambia. Pero si el eje es horizontal, el CM se mueve sobre una circunferencia vertical (es análogo al problema de una partícula sujeta por un hilo, aquí "la estructura del cuerpo sujeta al CM").

- Las fuerzas internas no hacen trabajo neto debido a la rigidez del cuerpo.

Con estos contenidos pueden resolver los ejercicios de la Práctica 10. Para acompañar su desarrollo haremos una última clase (Clase 26) con ejemplos y aplicaciones.