Clase 24: Cuerpos rígidos

22 de junio de 2020

En esta clase empezamos a estudiar el movimiento de cuerpos rígidos. Definimos primero qué se entiende por cuerpo rígido. Discutimos dos modelos de cuerpo rígido:

- el modelo discreto, en que el cuerpo está formado por un número finito de partículas puntuales.
- el modelo continuo, en el que el cuerpo se describe como una distribución continua de materia en el espacio.

Luego vemos cómo describir el movimiento de traslación y de rotación de un cuerpo rígido. En esta clase nos limitamos a discutir *cuerpos rígidos planos*, con rotación alrededor de un eje perpendicular a dicho plano.

Un caso importante es la rotación alrededor de un *eje fijo* en un sistema inercial, y distinguimos si el eje pasa por el CM o por un punto fuera del CM.

Otro caso importante es la rotación alrededor de un eje que pase por el CM, permitiendo que no esté fijo (es decir, que el cuerpo tenga movimiento de traslación).

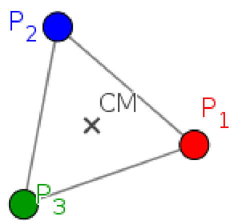
Varios de los resultados que obtengamos para cuerpos planos no son válidos en general. Por eso en la clase 25 veremos en qué situaciones se pueden generalizar a cuerpos en tres dimensiones.

Noción de cuerpo rígido

Se dice que un sistema de partículas m_i, cada una con posición $\vec{r}_i(t)$ respecto de un cierto sistema de referencia, forma un *cuerpo rígido* cuando hay fuerzas internas tan intensas que las partículas prácticamente no pueden cambiar sus distancias relativas (no pueden acercarse ni alejarse entre sí). El modelo matemático de un cuerpo idealmente rígido indica que, incluso mientras se mueve,

$$\forall\, i,\, j, \quad |\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)| \qquad \text{permanece constante}$$

Bajo esta condición, el cuerpo conserva su forma y su tamaño. Si una partícula del cuerpo se mueve, toda las demás están obligadas a moverse solidariamente con ella. Dibujemos, por ejemplo, un sistema de tres partículas de masas iguales formando un triángulo equilátero. En el problema 1 de la práctica 9 han probado que el CM está en el centro geométrico del triángulo [1].



En general el centro de masas del cuerpo, que se puede calcular en un dado momento, también mantiene constante su distancia a las demás partículas; su movimiento también es solidario con el movimiento del conjunto de partículas del cuerpo.

En el modelo de cuerpo rígido, los movimientos posibles del cuerpo quedan restringidos a:

- movimiento de traslación del CM, con cierta velocidad $\vec{V}_{CM}$.

[1] La intersección de las medianas, en general.

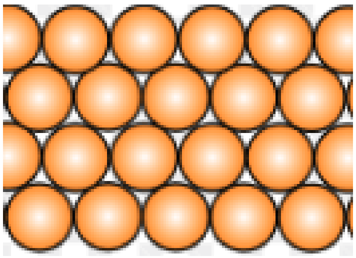
- movimiento de rotación alrededor del CM, con cierto eje y una velocidad angular alrededor de él; tanto el eje como el sentido de rotación y el valor de la velocidad angular se representan con $\vec{\omega}$, la velocidad angular vectorial.

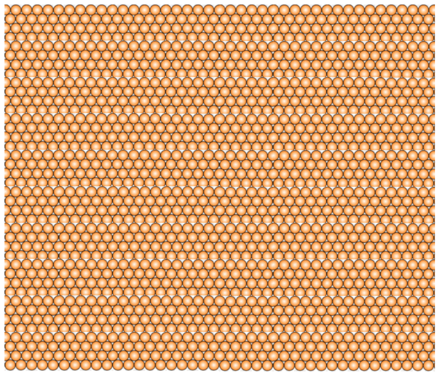
A estos posibles movimientos se los llama *grados de libertad* del cuerpo rígido.

En la naturaleza no existen cuerpos perfectamente rígidos [2]. Las fuerzas internas que mantienen la forma del cuerpo nunca son tan intensas como para mantener la rigidez absoluta. Si son conservativas, se dice que el cuerpo es un *sólido elástico*. Los problemas 14 de la práctica 8, y 3 de la práctica 9, describen partículas unidas por resortes y son modelos de sólidos elásticos. Además de traslación y rotación, pueden tener movimientos de vibración (oscilación de sus partes alrededor del CM). Si hay las fuerzas internas no conservativas [3], se dice que el cuerpo es plástico y puede sufrir deformaciones permanentes.

Modelo continuo de la materia

Los cuerpos que manejamos cotidianamente están compuestos por átomos. En ese sentido son sistemas de partículas. Sin embargo, nuestra capacidad de observación cotidiana no distingue los átomos en forma individual. Más bien, podemos observar un "volumen del espacio ocupado por materia".





Como ilustración pensemos en un cristal como un arreglo de ordenado de bolitas en el espacio. Según la *escala de observación*, podemos distinguir las partículas individuales o podemos ver un "continuo" de materia, sin distinguir detalles.

En el modelo continuo de la materia reemplazamos la noción de partícula m_i por la de *elemento infinitesimal de masa* dm_i ocupando un *elemento infinitesimal de volumen* dV_i. La relación entre masa y volumen es la densidad δ que permite expresar el elemento infinitesimal de masa como

$$dm_i = \delta_i dV_i$$

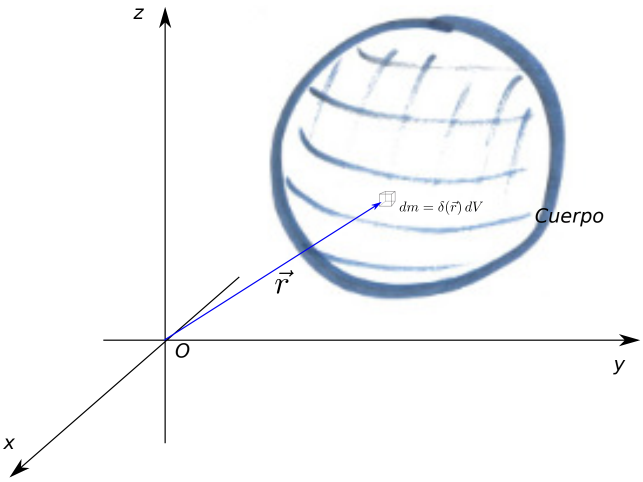
Más aún, en el continuo dejamos de etiquetar a las partículas con un índice discreto i y nos referimos a cada elemento infinitesimal de masa por su posición $\vec{r}$ en el espacio. La notación usual para un elemento infinitesimal de masa es

$$dm = \delta(\vec{r})\, dV \tag{1}$$

donde se entiende que el dm ocupa un volumen dV en el sitio $\vec{r}$. La densidad de masa tiene unidades de masa sobre volumen, por ejemplo kg/m^3.

[2] La noción misma de rigidez absoluta contradice principios básicos de la Teoría de la Relatividad especial.

[3] Más precisamente, capaces de transformar energía mecánica en otras formas de energía.



La suma sobre todas las partículas del sistema, que apareció en muchas expresiones en las últimas clases, se reemplaza por una suma sobre todos los dm del cuerpo; geométricamente, es una integral sobre todos los dV del cuerpo:

$$\sum_i m_i\,(\,) \to \int_{\text{cuerpo}} (\,)\, dm \to \int_{\text{volumen}} (\,)\ \delta(\vec{r})\, dV$$

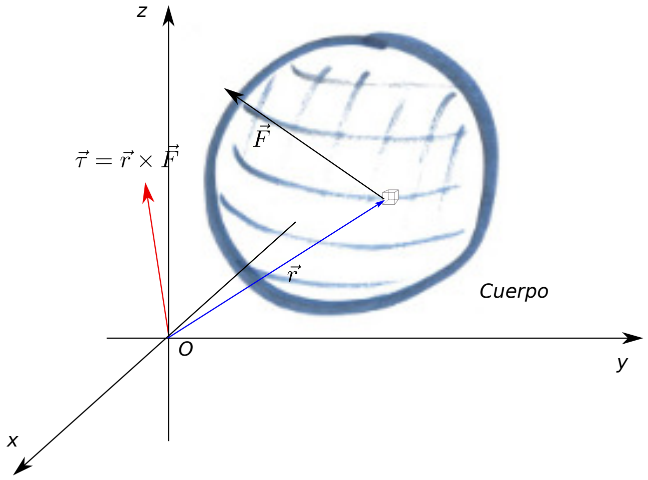
donde simbolizamos con ( ) distintos factores que hemos visto. Repasemos la expresión de los conceptos principales de sistemas de partículas en la versión del modelo continuo de la materia:

$$\boxed{\begin{aligned}
M &= \int_{\text{cuerpo}} dm = \int_{\text{volumen}} \delta(\vec{r})\, dV \\
\vec{R}_{CM} &= \frac{1}{M}\int_{\text{cuerpo}} dm\, \vec{r} = \int_{\text{volumen}} \delta(\vec{r})\, \vec{r}\, dV \\
\vec{P} &= \int_{\text{cuerpo}} \vec{v}(\vec{r})\, dm = \int_{\text{volumen}} \vec{v}(\vec{r})\, \delta(\vec{r})\, dV \\
\vec{L} &= \int_{\text{cuerpo}} \vec{r}\times\vec{v}(\vec{r})\, dm = \int_{\text{volumen}} \vec{r}\times\vec{v}(\vec{r})\, \delta(\vec{r})\, dV \\
E_{cin} &= \frac{1}{2}\int_{\text{cuerpo}} v^2(\vec{r})\, dm = \frac{1}{2}\int_{\text{volumen}} \vec{v}^2(\vec{r})\, \delta(\vec{r})\, dV
\end{aligned}} \tag{2}$$

En estas expresiones $\vec{v}(\vec{r})$ es la velocidad del dm que ocupa la posición $\vec{r}$. Es importante que se animen a leer y a escribir estas expresiones pensando que son sumas. Llegado el momento de calcular, los ayudamos con las integrales (integrales de línea, de área y de volumen se trabajan con precisión formal en Análisis Matemático II).

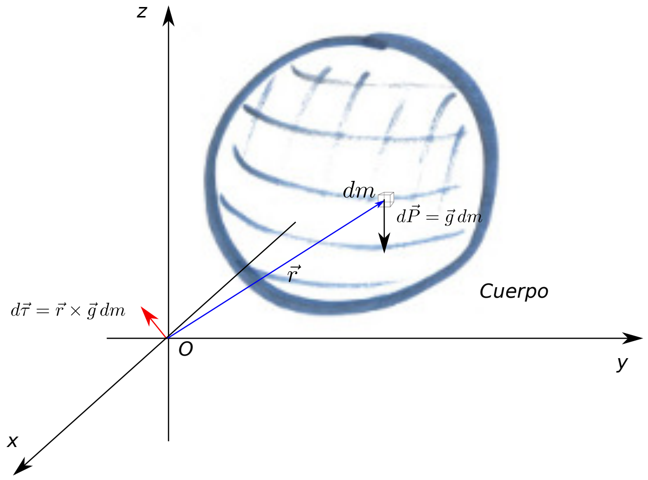
Punto de aplicación de fuerzas externas sobre un cuerpo rígido

Como vimos hasta ahora, las fuerzas externas a un sistema actúan sobre determinada partícula. La posición de esa partícula es necesaria para calcular el torque de la fuerza externa respecto del punto O de referencia. En el modelo de cuerpo continuo, la posición del dm sobre el cual se ejerce la fuerza se llama *punto de aplicación*. Cuando describimos una fuerza externa aplicada a un cuerpo debemos precisar el vector que describe la fuerza (módulo, dirección y sentido) y también su punto de aplicación.



Centro de gravedad

En muchos casos tendremos que calcular el torque que ejerce la fuerza peso respecto de un punto O. De hecho cada partícula tiene masa y tiene su propio peso, estamos hablando de un conjunto de fuerzas aplicadas en distintas posiciones. Se llama *centro de gravedad* al punto de un cuerpo donde se podría aplicar el peso total para generar el mismo torque que las fuerzas peso sobre cada partícula.



Calculemos el torque total de la fuerza gravitatoria respecto de O, usando el modelo continuo: tenemos que sumar los torques infinitesimales $d\vec{\tau} = \vec{r} \times (dm\, \vec{g})$

$$
\begin{aligned}
\vec{\tau}_{\text{peso}} &= \int_{\text{cuerpo}} \vec{r} \times \vec{g}\, dm \\
&= \left(\int_{\text{cuerpo}} \vec{r}\, dm \right) \times \vec{g} \\
&= M\, \vec{R_{CM}} \times \vec{g} \\
&= \vec{R_{CM}} \times (M\vec{g})
\end{aligned}
$$

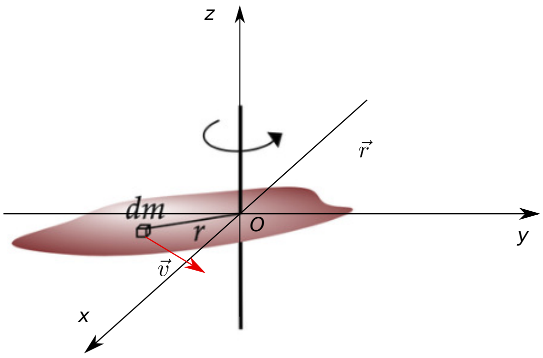
Encontramos que *el centro de gravedad coincide con el centro de masas* del cuerpo [4]. Noten se puede hacer el mismo razonamiento en un modelo discreto, basta anotar sumatorias en vez de integrales. En la práctica, se calcula el torque del peso respecto de un punto O considerando que es una sola fuerza $M\vec{g}$ aplicada en el centro de masas.

[4] Esto sucede porque $\vec{g}$ es constante, y la pudimos sacar como factor común fuera de la integral.

Rotación de un cuerpo plano en torno a un eje fijo. Momento de inercia.

Para fijar ideas claras, en el resto de esta clase trabajamos con cuerpos rígidos planos: todas sus partículas están en el plano xy y sus velocidades también. Por ejemplo, podría ser una lámina delgada de metal apoyada sobre una superficie horizontal de hielo (sin roce).

Supongamos que existe un *eje* en la dirección z, que atraviesa al cuerpo en el origen de coordenadas y está fijo al sistema de referencia. En estas condiciones, el único movimiento permitido para el cuerpo plano es la *rotación alrededor del eje.*



Si un dm gira alrededor del origen con velocidad angular ω, como en la figura, entonces la rigidez del cuerpo obliga todos los dm a girar con la misma velocidad angular. Un dm que en cierto instante tenga una posición $\vec{r}$ respecto del origen va a mantener siempre la misma distancia $r = |\vec{r}|$ al origen; su trayectoria es un movimiento circular con radio r. Su velocidad siempre será tangente a la circunferencia, con módulo $v = \omega r$. Mejor lo expresamos vectorialmente como

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{3}$$

con el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ apuntando en la dirección del eje z (con componente positiva si el giro es antihorario). Es importante destacar que el movimiento del cuerpo, en estas condiciones, depende de un solo parámetro real ω.

Con esta información podemos calcular la cantidad de movimiento del cuerpo (entendido como sistema de partículas):

$$\vec{P} = M\,\vec{V}_{CM} = M\,\vec{\omega} \times \vec{R}_{CM} \tag{4}$$

donde $\vec{R}_{CM}$ es la posición del CM respecto del eje. Noten que si el eje coincide con el CM del cuerpo, entonces $\vec{P} = \vec{0}$; naturalmente, el CM permanece en reposo clavado en el eje mientras el cuerpo gira alrededor de él.

También podemos calcular el momento angular respecto del origen:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_{\text{cuerpo}} \vec{r} \times \vec{v}(\vec{r})\, dm \\ &= \int_{\text{cuerpo}} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\ dm \end{aligned}$$

Por propiedades del producto vectorial (Clase 12, página 2) $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \vec{r})\,\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\,\vec{r}$; en este caso $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ porque $\vec{r}$ está en el plano xy y $\vec{\omega}$ está en el eje z. Luego podemos resolver $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega}$. Sacando $\vec{\omega}$ fuera de la integral, porque es la misma para todos los dm,

$$\vec{L} = \left(\int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm \right) \vec{\omega} \tag{5}$$

La energía cinética del cuerpo plano, rotando, es

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2} \int_{\text{cuerpo}} v^2(\vec{r})\, dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{cuerpo}} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})\ dm \end{aligned}$$

Por propiedades del producto vectorial (Clase 12, página 2) $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\,(\vec{r} \cdot \vec{r}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2$; en este caso el segundo término vale cero y podemos resolver $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2\omega^2$. Sacando ω^2 fuera de la integral

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\left(\int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm\right)\omega^2 \tag{6}$$

La cantidad que aparece entre paréntesis en los resultados de $\vec{L}$ y E_{cin} es de importancia central en la rotación del cuerpo rígido. Se llama *momento de inercia* del cuerpo *respecto del eje que pasa por* O y se anota

$$\boxed{I_O = \int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm} \tag{7}$$

Si el cuerpo rígido se modela como sistema de partículas discretas, volvemos al lenguaje de sumatoria

$$I_O = \sum_i m_i\, r_i^2 \tag{8}$$

Recuerden que r_i es la distancia desde la partícula m_i hasta el eje, o bien r es la distancia desde el elemento infinitesimal de masa dm hasta el eje.

En términos del momento de inercia, recuerden que

$$\vec{L} = I_O\, \vec{\omega} \tag{9}$$

y

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_O \left(\int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm\right)\omega^2 \tag{10}$$

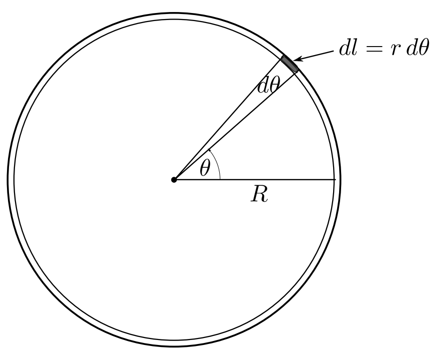
Cálculo del momento de inercia de un cuerpo plano respecto de un eje perpendicular que pasa por el CM

Cada cuerpo rígido (plano, por ahora) tiene un momento de inercia respecto de un eje dado. En general se le da más importancia al momento de inercia respecto de un eje que pase por el CM. Lo llamaremos I_{CM}.

Ejemplo: Momento de inercia de un anillo circular, homogéneo, de masa M y radio R respecto de un eje perpendicular al plano que pasa por su CM.

Decimos que un cuerpo es homogéneo si su densidad de masa es la misma en todos los puntos del cuerpo, $\delta(\vec{r}) = \delta$ es constante.

El anillo es un cuerpo delgado. En general, para cuerpos delgados (unidimensionales), consideramos que tienen una pequeña sección transversal A y que el volumen de un elemento infinitesimal de longitud dl se expresa[5] como $dV = A\, dl$. Podemos visualizar dl en coordenadas polares:



El elemento infinitesimal de masa asociado a dl será

$$dm = \delta\, dV = (\delta\, A)\; dl \tag{11}$$

El producto $\lambda = \delta\, A$ se suele llamar *densidad lineal de masa*, sus unidades son las de masa sobre longitud, por ejemplo kg/m.

[5] Base por altura.

Densidad: La masa del anillo se calcula como

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{cuerpo}} dm \\ &= \int_{\text{anillo}} (\delta\, A)\; dl \\ &= (\delta\, A) \int_{\text{anillo}} dl \\ &= \delta\, A\, 2\pi R \end{aligned}$$

Despejamos que la densidad lineal es

$$\lambda = \delta\, A = \frac{M}{2\pi R}$$

es decir la masa total sobre la longitud total.

CM: Si ubicamos el anillo en un plano xy, con su centro en el origen de coordenadas, vemos que su CM está en el origen (coincide con el centro geométrico). El motivo es la *simetría de inversión* del anillo; el cálculo de la posición del CM da

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{cuerpo}} dm\, \vec{r} = \vec{0}$$

ya que por cada dm con posición $\vec{r}$ hay otro dm igual con posición $-\vec{r}$; luego la suma (integral) da cero porque sus términos "se cancelan de a pares".

I_{CM}: el momento de inercia respecto del CM se calcula como

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm \\ &= \int_{\text{anillo}} R^2\; (\delta\, A)\; dl \\ &= R^2\; (\delta\, A) \int_{\text{anillo}} dl \\ &= R^2\; (\delta\, A)\, 2\pi R \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(\delta\, A)\, 2\pi R = M$, encontramos que para el **anillo delgado**

$$\boxed{I_{CM} = M\, R^2}$$

Ejemplo: Momento de inercia de un disco circular, homogéneo, de masa M y radio R respecto de un eje perpendicular al plano que pasa por su CM.

El disco es un cuerpo delgado. En general, para cuerpos delgados (bidimensionales), consideramos que tienen un pequeño espesor h y que el volumen de un elemento de área infinitesimal da se expresa[6] como $dV = h\, da$. El elemento infinitesimal de masa asociado a da será

$$dm = \delta\, dV = (\delta\, h)\; da \tag{12}$$

El producto $\sigma = \delta\, h$ se suele llamar *densidad superficial de masa*, sus unidades son las de masa sobre área, por ejemplo kg/m^2 .

Densidad: La masa del disco se calcula como

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{cuerpo}} dm \\ &= \int_{disco} (\delta\, h)\; da \\ &= (\delta\, h) \int_{\text{anillo}} da \\ &= \delta\, h\, \pi R^2 \end{aligned}$$

[6] Base por altura.

Despejamos que la densidad superficial es

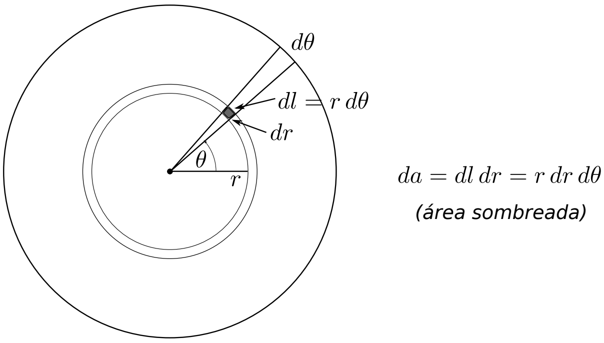
$$\sigma = \delta\, h = \frac{M}{\pi R^2}$$

es decir la masa total sobre la superficie total.

CM: Si ubicamos el disco en un plano xy, con su centro en el origen de coordenadas, vemos que su CM está en el origen (coincide con el centro geométrico). El motivo es la *simetría de inversión* del disco; el cálculo de la posición del CM da

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{cuerpo}} dm\, \vec{r} = \vec{0}$$

porque por cada dm con posición $\vec{r}$ hay otro dm igual con posición $-\vec{r}$; luego la suma (integral) da cero porque sus términos "se cancelan de a pares".



I_{CM}: para resolver el momento de inercia respecto del CM conviene usar coordenadas polares, como en la figura. Un elemento de área infinitesimal se escribe $da = r\, dr\, d\theta$. Para sumar sobre todo el disco se debe recorrer r entre 0 y R, y θ entre 0 y 2π. Con esos elementos el momento de inercia se calcula como

$$\begin{aligned}
I_{CM} &= \int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm \\
&= \int_{\text{disco}} r^2\, (\delta\, h)\, da \\
&= (\delta\, h) \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\, r\, dr\, d\theta \\
&= (\delta\, h)\, 2\pi \int_0^R r^3\, dr \\
&= (\delta\, h)\, 2\pi \frac{1}{4} \left[r^4\right]_0^R \\
&= (\delta\, h)\, \pi \frac{1}{2} R^4
\end{aligned}$$

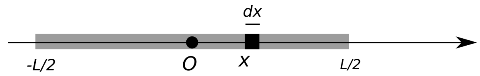
Teniendo en cuenta que $(\delta\, h)\, \pi R^2 = M$, encontramos que para el **disco delgado**

$$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{2} M\, R^2}$$

Ejemplo: Momento de inercia de una varilla recta homogéneo, de masa M y longitud L respecto de un eje perpendicular que pasa por su CM.

La varilla es un cuerpo delgado unidimensional (como el anillo). Supongamos que está ubicada sobre un eje x, entre los puntos $-L/2$ y $L/2$, y usemos la densidad lineal de masa λ para escribir el diferencial de masa como

$$dm = \lambda\, dx \tag{13}$$



Densidad: La masa de la varilla se calcula como

$$\begin{aligned} M &= \int_{\text{cuerpo}} dm \\ &= \int_{\text{varilla}} \lambda \, dx \\ &= \lambda \int_{-L/2}^{L/2} dx \\ &= \lambda \, L \end{aligned}$$

Despejamos que la densidad lineal es

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

es decir la masa total sobre la longitud total.

CM: La coordenada x del CM

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{varilla}} x \, dm = \frac{1}{M} \int_{-L/2}^{L/2} x \, \lambda \, dx = \frac{\lambda}{M} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L/2}^{L/2} = 0$$

es decir, el CM está en el origen coincidiendo con el punto medio de la varilla. Este resultado era de esperar por simetría de inversión, por cada dm con posición x hay otro dm igual con posición $-x$ y la suma (integral) da cero porque sus términos "se cancelan de a pares". Noten que lo verificamos explícitamente.

I_{CM}: El momento de inercia respecto del CM se calcula como

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \int_{\text{varilla}} x^2 \, dm \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, \lambda \, dx \\ &= \lambda \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \lambda \frac{L^3}{12} \\ &= (\lambda L) \, \frac{L^2}{12} \\ &= \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\lambda L = M$, encontramos que para la **varilla** de longitud L

$$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{12} M \, L^2}$$

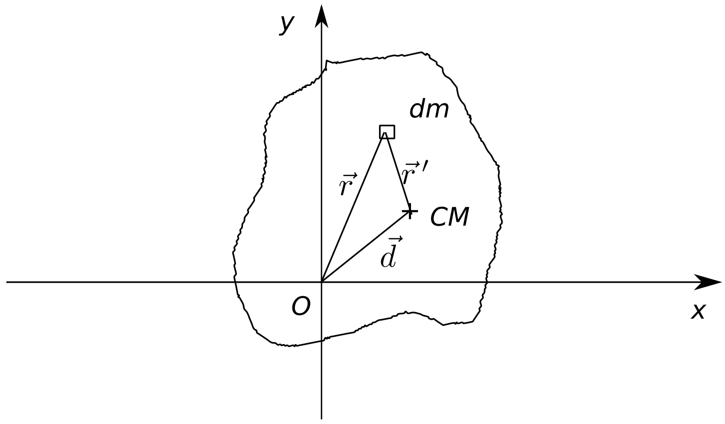
Comentario: Radio de giro. Calcularán otros momentos de inercia respecto del CM en la práctica. Se define el radio de giro como una longitud ξ tal que

$$I_{CM} = M \xi^2$$

Por los cálculos anteriores vemos que el anillo tiene radio de giro $\xi_{\text{anillo}} = R$ y un disco de igual radio tiene un radio de giro menor, $\xi_{\text{disco}} = R/\sqrt{2}$. La varilla tiene radio de giro $\xi_{\text{varilla}} = L/\sqrt{12}$.

Cálculo del momento de inercia de un cuerpo plano respecto de un eje perpendicular que pasa fuera del CM. Regla de Steiner.

Cuando el eje perpendicular al cuerpo plano pasa por un punto O distinto del CM, se puede relacionar el momento de inercia I_O del cuerpo respecto al eje que pasa por O con el momento de inercia I_{CM} del cuerpo respecto al eje que pasa por el CM. Para eso llamemos $\vec{d}$ a la posición del CM respecto de O.



Para cada elemento de masa dm tenemos que su posición $\vec{r}$ respecto de O se puede escribir como $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{d}$ donde $\vec{r}\,'$ es su posición respecto del CM. Necesitamos resolver

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \left(\vec{r}\,' + \vec{d}\right) \cdot \left(\vec{r}\,' + \vec{d}\right) = \vec{r}\,' \cdot \vec{r}\,' + 2\vec{r}\,' \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{d} = \left(r'\right)^2 + d^2 + 2\vec{r}\,' \cdot \vec{d}$$

Luego calculamos el momento de inercia

$$\begin{aligned} I_O &= \int_{\text{cuerpo}} r^2\, dm \\ &= \int_{\text{cuerpo}} \left(r'\right)^2\, dm + \int_{\text{cuerpo}} d^2\, dm + \int_{\text{cuerpo}} 2\vec{r}\,' \cdot \vec{d}\, dm \\ &= \int_{\text{cuerpo}} \left(r'\right)^2\, dm + \left(\int_{\text{cuerpo}} dm\right) d^2 + 2\left(\int_{\text{cuerpo}} \vec{r}\,'\, dm\right) \cdot \vec{d} \\ &= I_{CM} + Md^2 \end{aligned}$$

Este resultado se conoce como Regla de Steiner o Teorema de los ejes paralelos (en su versión para cuerpos planos):

El momento de inercia de un cuerpo plano dee masa M, respecto de un eje perpendicular al mismo que pase por un punto O a una distancia d del CM, se calcula como

$$I_O = I_{CM} + Md^2$$

Dinámica de la rotación del cuerpo rígido plano alrededor de un eje fijo

Una vez que hemos escrito el momento angular de un cuerpo plano como $\vec{L} = I_O\vec{\omega}$, y usando el Teorema de Variación del Momento Angular (Clase 23, página 7), es inmediato escribir que

$$\sum_{\text{fuerzas externas } \alpha} \vec{\tau}_\alpha^{(ext)} = \frac{d\left(I_O\vec{\omega}\right)}{dt} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

En el caso que estamos trabajando, los torques y la velocidad angular solo tienen componente a lo largo del eje de rotación. Entonces encontramos la

Ecuación fundamental de la rotación del cuerpo rígido, en el caso de cuerpos planos y eje perpendicular fijo a un sistema inercial: en la dirección del eje (digamos z)

$$\sum_{\text{fuerzas externas } \alpha} \tau_{z,\alpha}^{(ext)} = I_O\, \alpha$$

Esta ecuación relaciona el torque de fuerzas externas con la aceleración angular del cuerpo. Noten el parecido formal con la Segunda Ley de Newton: para el movimiento de rotación los torques son análogos a las fuerzas, el momento de inercia es análogo a la masa, y la aceleración angular es análoga a la aceleración lineal.

Dinámica de la rotación del cuerpo rígido plano alrededor de un eje que pasa por el CM

Recuerden que el Teorema de Variación del Momento Angular es válido para momentos angulares y torques respecto del CM, aunque no esté acelerado respecto del sistema inercial. En un movimiento general, *cuando el CM se traslada y el cuerpo gira*, corresponde plantear:

Ecuación fundamental de la rotación del cuerpo rígido, en el caso de cuerpos planos y eje perpendicular que pase por el CM: aunque el CM esté en movimiento, incluso acelerado, en la dirección del eje (digamos z)

$$\sum_{\text{fuerzas externas } \alpha} (\tau_{CM})_{z,\alpha}^{(ext)} = I_{CM}\, \alpha$$

Trabajo y energía en el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo

En un cuerpo rígido, las fuerzas internas no pueden realizar trabajo neto. Solo las fuerzas externas influyen en la variación de energía cinética.

En el caso de la rotación alrededor de un eje fijo podemos escribir una relación práctica para expresar el trabajo de una fuerza externa $\vec{F}$: dado que el punto de aplicación $\vec{r}$ solo puede describir un movimiento circular, su desplazamiento ante una rotación infinitesimal será

$$d\vec{r} = \vec{d\theta} \times \vec{r}$$

El trabajo infinitesimal de la fuerza $\vec{F}$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \left(\vec{d\theta} \times \vec{r}\right)$$

Esta combinación de producto escalar y vectorial, conocida como "producto mixto" tiene una propiedad cíclica: se pueden rotar los tres factores sin alterar el producto[7]. Por eso, el trabajo realizado por un torque en un giro infinitesimal se calcula como

$$dW = \vec{d\theta} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \vec{\tau} \cdot \vec{d\theta}$$

Así mismo, dado que en un tiempo infinitesimal dt el giro es $\vec{d\theta} = \vec{\omega}dt$, podemos escribir la potencia desarrollada por la fuerza como

$$\text{Potencia desarrollada por un torque: } \frac{dW}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

Noten que estas relaciones están escritas para un giro general, en el espacio. Si se trata de un cuerpo plano moviéndose en el plano xy, y una fuerza que está en el mismo plano xy, tanto el torque como la velocidad angular tendrán solo componente z. En ese caso $dW = \tau_z\, d\theta$ y la potencia es $\tau_z\, \omega$.

[7] Pueden probar usando las definiciones de los productos que $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$