Clase 23: Momento angular

19 de junio de 2020

En la última parte del curso vamos a estudiar aspectos rotacionales del movimiento de sistemas de partículas y de cuerpos rígidos.

La magnitud fundamental para describir la rotación de un sistema es su *cantidad de movimiento angular*, o *momento angular*. En esta clase la introducimos primero para una partícula, y luego para sistemas de partículas.

Momento angular de una partícula, respecto de un punto fijo O

Consideremos una partícula de masa m, que está en una posición $\vec{r}$ respecto de un punto O fijo en un sistema inercial y que tiene una velocidad $\vec{v}$ respecto de dicho sistema de referencia. Recordemos que su cantidad de movimiento lineal, o momento lineal, se define como la magnitud vectorial.

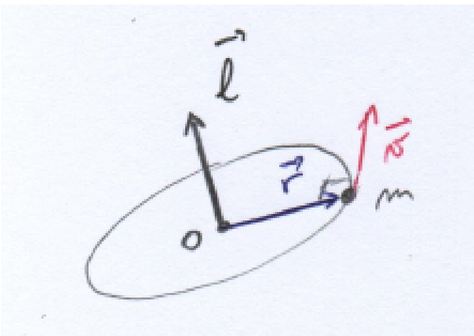
$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

Se define el *momento angular* de la partícula, respecto del punto O, como la magnitud vectorial

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Cabe insistir que es una magnitud vectorial, para interpretarla correctamente hay que conocer su módulo, dirección y sentido. La dirección y el sentido están dados por las propiedades del producto vectorial, y naturalmente *tenemos que visualizarlo en el espacio de tres dimensiones.* Las unidades de $\vec{l}$ son unidades de masa por unidades de velocidad. En el Sistema Internacional se mide en $kg \cdot m/s$. También deben reconocer que el valor de $\vec{l}$ depende del punto O de referencia; en general lo mantendremos fijo pero podemos hacer distintas elecciones, siempre deben tener claro respecto de qué punto están trabajando.

Si $\vec{r} = \vec{0}$ (la partícula está en el punto O), o $\vec{v} = \vec{0}$ (la partícula está en reposo respecto de O), obviamente tenemos que $\vec{l} = \vec{0}$. Si $\vec{v} \parallel \vec{r}$ ($\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{r}$, la partícula se aleja de O o se acerca a O sin girar) también tenemos que $\vec{l} = \vec{0}$. Cuando $\vec{r}$ y $\vec{v}$ no son nulos, y no son paralelos,la dirección de $\vec{l}$ *es perpendicular al plano donde dibujamos* $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y el sentido está dado por la regla de la mano derecha.



Dado que en general la posición y la velocidad dependen del tiempo, tengan en cuenta que el momento angular $\vec{l}$ en general depende del tiempo,

$$\vec{l}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = m\,\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$$

Ejemplo 1: El caso más sencillo de movimiento rotacional es el movimiento circular, conviene tenerlo siempre como ejemplo de referencia.

Movimiento circular en el espacio. Si una partícula de masa m se mueve sobre una circunferencia de radio R alrededor de un punto O, hemos visto (Clase 12, página 6) que su velocidad angular $\vec{\omega}$ (vectorial) es un vector perpendicular al plano de la circunferencia, que define el eje de rotación. Noten que la posición $\vec{r}$ respecto de O y la velocidad están en el plano de la circunferencia y $\vec{\omega}$ es perpendicular a ambos. Dicho con precisión, la velocidad angular $\vec{\omega}(t)$ se escribe

$$\vec{\omega}(t) = \frac{1}{R^2}\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)$$

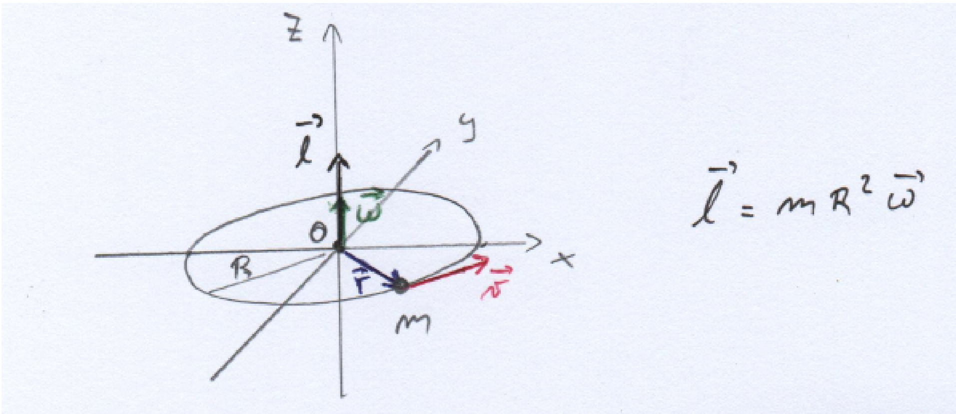
De aquí podemos rescatar que:

> Para una partícula en movimiento circular
>
> $$\vec{l}(t) = m\,\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = mR^2\,\vec{\omega}(t)$$

En particular, en un movimiento circular con velocidad constante, el momento angular $\vec{l}$ es constante. Observen el factor escalar $I = mR^2$, es en este ejemplo lo que más adelante llamaremos *momento de inercia.*

Movimiento circular en el plan xy. Miremos el caso en que la circunferencia del movimiento está en el plano xy. Entonces el momento angular tiene una sola componente: está en el eje z y podemos escribir

$$\vec{l} = l_z\check{k}$$

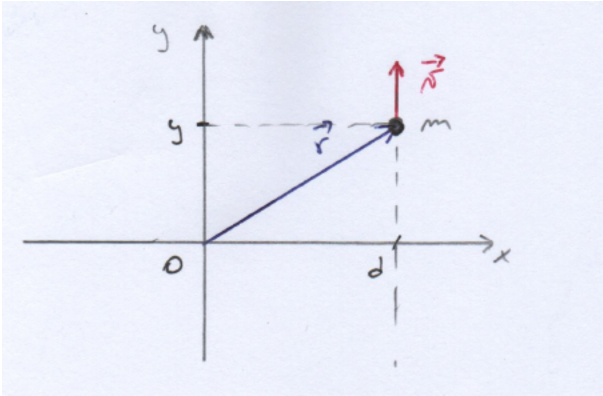


Recuerden que el sentido de los ejes cartesianos debe formar un sistema derecho, para trabajar correctamente con el producto vectorial. En estas clases vamos a elegir siempre los ejes x e y de manera tal que el versor $\check{k}$ apunte hacia afuera de la hoja (pantalla, pizarrón). De esta manera, una partícula que gira en sentido antihorario, y por eso tiene momento angular $\vec{l}$ hacia afuera de la hoja, se describe con una componente l_z positiva.

Para ser consistentes, elegimos que los ángulos del movimiento circular sean positivos en sentido antihorario: con esta elección una partícula en movimiento circular antihorario tiene velocidad angular $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ positiva y componente z de momento angular l_z positiva. Recíprocamente, una partícula en movimiento circular horario tiene velocidad angular ω negativa y componente z de momento angular l_z negativa.

> Cuando el movimiento circular está en el plano xy, y usamos la convención de signos indicada, podemos escribir
>
> $$l_z = mR^2\omega \tag{1}$$

Ejemplo 2: Discutamos el caso de una partícula de masa m viajando en línea recta, con velocidad constante de módulo v. Digamos que el punto O es el origen de coordenadas y que la trayectoria es la recta paralela al eje y que corta al eje x positivo a una distancia d del origen.

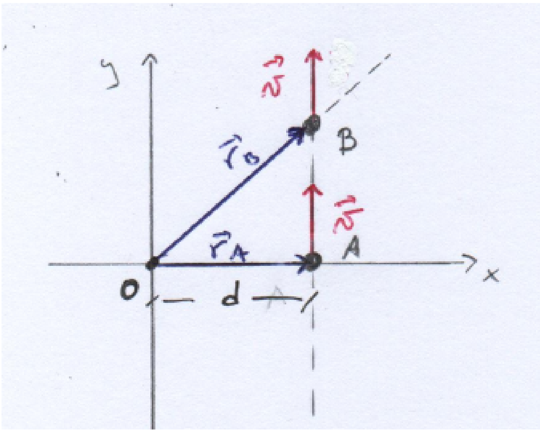


En el sistema de coordenadas del dibujo, $\vec{r} = di + y\check{j}$ y $\vec{v} = v\check{j}$. El momento angular de la partícula respecto de O se puede calcular resolviendo el producto vectorial en componentes,

$$\vec{l} = m\,\vec{r} \times \vec{v} = m\,(dv - y \cdot 0)\,\check{k} = mvd\,\check{k}$$

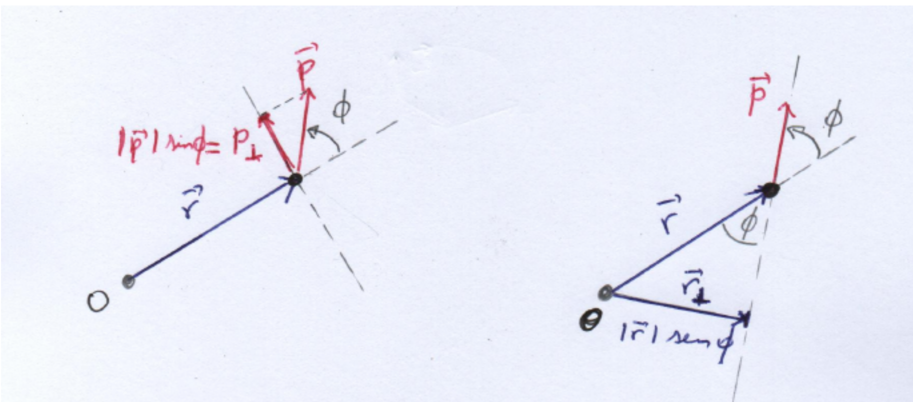
Aunque la partícula va en línea recta, este resultado se interpreta como que la partícula gira alrededor de O en sentido antihorario. Noten que el resultado es independiente de la coordenada y de la partícula.

Es interesante calcular este resultado usando módulos, ángulos y la regla de la mano derecha.



En la posición A de la figura, $|\vec{l}_A| = m|\vec{r}_A||\vec{v}|\sin(90^o) = mdv$ con $\vec{l}_A$ apuntando fuera de la hoja. En la posición B, $|\vec{l}_B| = m|\vec{r}_B||\vec{v}|\sin(\phi_B) = mv\,(|\vec{r}_B|\sin(\phi_B)) = mvd$ también con $\vec{l}_B$ apuntando fuera de la hoja. Encontramos que $\vec{l} = mvd\,\check{k}$ se mantiene constante a lo largo de la trayectoria recta.

Calculando $|\vec{l}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin(\phi)$ hay dos maneras prácticas de interpretar el $\sin(\phi)$. En los dibujos siguientes



vemos a la izquierda que $|\vec{r}||\vec{p}|\sin(\phi) = |\vec{r}|\, p_\perp$ donde $p_\perp = |\vec{p}|\sin(\phi)$ es la proyección de $\vec{p}$ en la dirección perpendicular a $\vec{r}$. Y a la derecha vemos que $|\vec{r}||\vec{p}|\sin(\phi) = |\vec{p}|\, r_\perp$donde $r_\perp = |\vec{r}|\sin(\phi)$ es la distancia desde O hasta la recta que prolonga a $\vec{p}$ y se suele llamar "brazo de giro".

De los ejemplos anteriores debe quedar la idea de que $\vec{l}$ describe cuánto "gira" la partícula respecto de O.

Dinámica del momento angular de una partícula

Consideremos una partícula de masa m, que está en una posición $\vec{r}$ respecto de un punto O fijo en un sistema inercial. Cuando actúan fuerzas $\vec{F}_j$ sobre la partícula, la Segunda Ley de Newton nos dice que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_j \vec{F}_j$$

Podemos calcular la derivada del momento angular de la partícula respecto del tiempo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{l}}{dt} &= \frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt} \\
&= \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \vec{v}\times(m\vec{v}) + \vec{r}\times\sum_j \vec{F}_j \\
&= \sum_j \left(\vec{r}\times\vec{F}_j\right)
\end{aligned}$$

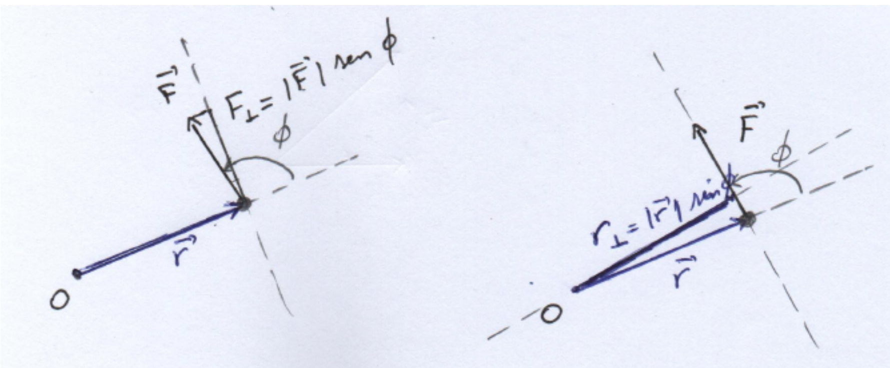
El término $\vec{v}\times(m\vec{v})$ es nulo por propiedad del producto vectorial; los términos que quedaron entre paréntesis se llaman *torque de la fuerza* $\vec{F}_j$ *respecto de* O.

> Dado un punto O fijo, se define el torque de una fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre una partícula en la posición $\vec{r}$, respecto de O, como la magnitud vectorial
> $$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Las unidades de $\vec{\tau}$ son unidades de fuerza por unidades de longitud. En el Sistema Internacional se mide en $N\cdot m$.

Noten que el torque es una magnitud vectorial, su módulo dirección y sentido están dados por un producto vectorial. Al igual que el momento angular, hay que visualizarlo en el espacio. Para su cálculo caben las mismas consideraciones que discutimos para $\vec{l}$.

Para interpretar el módulo del torque, $|\vec{\tau}| = |\vec{r}\times\vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin(\phi)]$ es interesante repetir el esquema del dibujo



vemos a la izquierda que $|\vec{r}||\vec{F}|\sin(\phi) = |\vec{r}|\, F_\perp$ donde $F_\perp = |\vec{F}|\sin(\phi)$ es la proyección de la fuerza $\vec{F}$ en la dirección perpendicular a $\vec{r}$. Y a la derecha vemos que $|\vec{r}||\vec{F}|\sin(\phi) = |\vec{F}|\, r_\perp$donde $r_\perp = |\vec{r}|\sin(\phi)$ es $r_\perp = |\vec{r}|\sin(\phi)$ es la distancia desde O hasta la recta que prolonga a $\vec{F}$ y en el caso del torque se suele llamar "brazo de acción" o "brazo de palanca" .

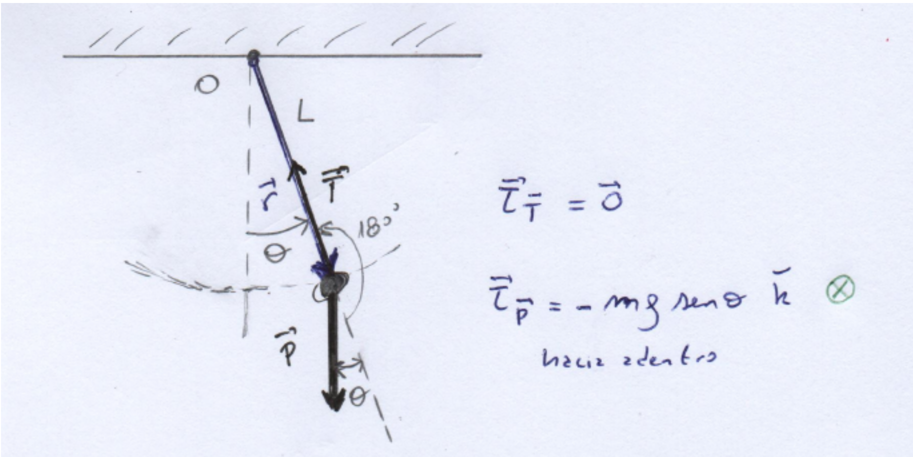
En resumen, encontramos que la *dinámica del momento angular de una partícula* está dada por la relación

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum_j \vec{\tau}_j \tag{2}$$

incluyendo en la suma los torques de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Dado que el momento angular describe cuánto "gira" la partícula respecto de O, podemos decir que el torque de una fuerza es la medida de cúanto la fuerza influye en el cambio del giro de la partícula.

Ejemplo 3: Movimiento angular de un péndulo ideal.

La descripción del movimiento de un péndulo ideal resulta elegante en términos de momento angular. Calculemos el torque de las fuerzas tensión y peso respecto del punto O en el soporte del hilo, cuando el péndulo está apartado un ángulo θ respecto de la vertical (θ positivo en sentido antihorario y $\check{k}$ apuntando fuera de la hoja):



$$\begin{cases} \text{tensión:} & \vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{T} = \vec{0} \\ \text{peso:} & \vec{\tau}_P = \vec{r} \times \vec{P} = -mgL\sin\theta\,\check{k} \end{cases}$$

Noten que el torque del peso tiene componente z negativa cuando $\theta > 0$, y positiva cuando $\theta < 0$; la expresión que escribimos vale en ambos casos.

Como el movimiento ocurre en el plano xy, el momento angular de la partícula del péndulo tiene solo componente z. La única componente no trivial de la ecuación (2) es

$$\frac{dl_z}{dt} = -mgL\sin\theta$$

Dado que el movimiento es circular podemos usar el resultado 1 para escribir $l_z = mL^2\frac{d\theta}{dt}$. Reemplazando llegamos a

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta$$

o bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)\sin\theta$$

Esta es la misma ecuación diferencial que hallamos en la Clase 20 aplicando la Segunda Ley de Newton, describe las oscilaciones del péndulo ideal. Para pequeñas oscilaciones, escribimos $\sin\theta \approx \theta$ y recuperamos la ecuación del movimiento armónico simple con frecuencia angular $\omega\sqrt{g/L}$.

Momento angular de un sistema de partículas

El momento angular de un sistema de partículas, con respecto a un punto fijo O, se define simplemente como la suma vectorial del momento angular de cada partícula del sistema. Digamos que el sistema está formado por partículas m_i, cada una con posición $\vec{r}_i(t)$ respecto del punto O. Entonces

Se define el momento angular $\vec{L}$ del sistema de partículas como

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Ejemplo: si todas las partículas del sistema se mantienen en un mismo plano, en el cual usamos coordenadas x e y, y todas sus velocidades se mantienen en el mismo plano, entonces cada momento angular $\vec{l}_i$ tiene solo componente z. Entonces, es sencillo realizar la suma vectorial de los $\vec{l}_i$ porque todos están en el mismo eje, perpendicular al plano del movimiento:

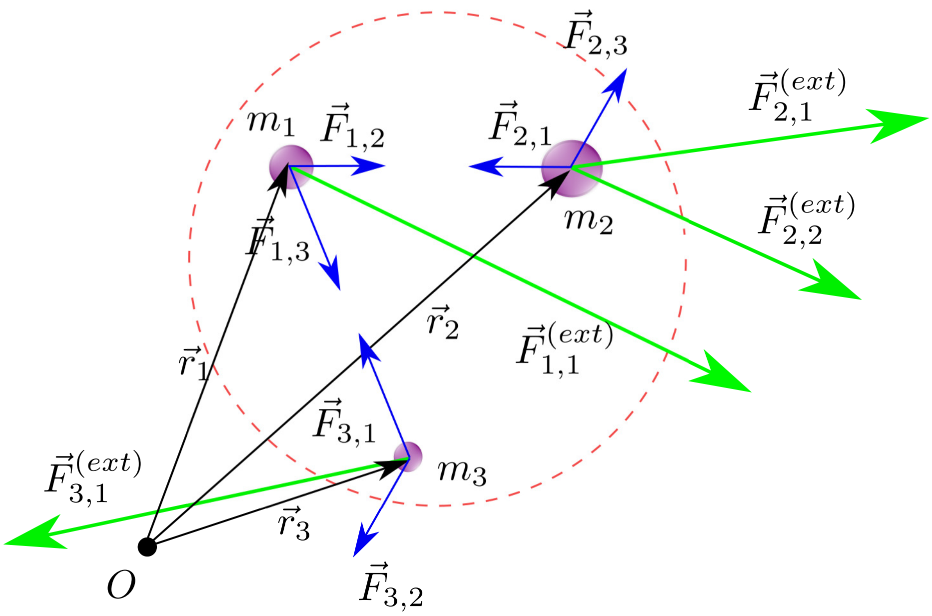
$$\vec{L} = \sum_i l_{i,z}\,\check{k} = L_z\check{k} \qquad \text{con} \qquad L_z = \sum_i l_{i,z}$$

Con las convenciones que venimos usando, noten que las partículas con giro antihorario contribuyen con $l_{i,z}$ positivo y las partículas con giro horario contribuyen con $l_{i,z}$ negativo.

En el caso general, cuando las posiciones y velocidades se distribuyen en el espacio, la suma vectorial de los términos $\vec{l}_i$ es más trabajosa y menos intuitiva.

Dinámica del momento angular de un sistema de partículas

Estamos en condiciones de discutir cómo responde el momento angular $\vec{L}$ de un sistema de partículas cuando se le aplican fuerzas. Para fijar ideas dibujemos un sistema de tres partículas.



Distinguimos las fuerzas externas en verde y las fuerzas internas en azul, y dibujamos las posiciones $\vec{r}_i$ respecto de un punto O en negro. Como en la clase 21, anotamos con $\vec{F}^{(ext)}_{i,\alpha_i}$ a las fuerzas externas que actúan sobre la partícula i y $\vec{F}_{i,j}$ a las fuerzas internas que actúan sobre la partícula i.

Repasemos lo que sabemos de cada partícula i. Las fuerzas $\vec{F}^{(ext)}_{i,\alpha_i}$ ejercen un torque sobre esta partícula, respecto de O, dado por

$$\vec{\tau}^{(ext)}_{i,\alpha_i} = \vec{r}_i \times \vec{F}^{(ext)}_{i,\alpha_i}$$

Las fuerzas $\vec{F}_{i,j}$ ejercen un torque sobre la misma partícula dado por

$$\vec{\tau}^{(int)}_{i,j} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j}$$

Según la ecuación (2),

$$\frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_{\alpha_i} \vec{\tau}^{(ext)}_{i,\alpha_i} + \sum_{j\neq i} \vec{\tau}^{(int)}_{i,j}$$

Calculemos ahora la derivada respecto del tiempo de $\vec{L}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{dt} \\
&= \sum_i \left(\sum_{\alpha_i} \vec{\tau}^{(ext)}_{i,\alpha_i} + \sum_{j\neq i} \vec{\tau}^{(int)}_{i,j} \right) \\
&= \sum_{\text{fuerzas externas}} \vec{\tau}^{(ext)}_{\alpha} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{\tau}^{(int)}_{i,j}
\end{aligned} \tag{3}$$

En el primer término agrupamos la suma de todos los torques de fuerzas externas, que en general están aplicados a distintas partículas, y en el segundo agrupamos todos los torques de fuerzas internas.

Analicemos el segundo término[1]: aquí aparecen pares de torques, por ejemplo el de la fuerza que la partícula 1 hace sobre la 2 y también el que la partícula 2 hace sobre la 1. Sumando el par y usando la Tercera Ley de Newton, vemos que

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}^{(int)}_{1,2} + \vec{\tau}^{(int)}_{2,1} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,1} \\
&= -\vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,1} \\
&= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{2,1}
\end{aligned} \tag{4}$$

Vamos a asumir[2] que la fuerza de interacción entre cualquier par de partículas actúa en la dirección del segmento que separa a las partículas; es decir, que es puramente atractiva o puramente repulsiva. Bajo esta hipótesis, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y $\vec{F}_{2,1}$ son vectores paralelos, con lo cual $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{2,1} = \vec{0}$. Lo mismo encontramos para los torques internos entre cualquier par de partículas i y j. Es decir, *la suma de los torques de las fuerzas internas de un sistema se cancela.*

Hemos probado el teorema de variación del momento angular de un sistema de partículas:

Teorema de variación del momento angular de un sistema de partículas
La variación del momento angular de un sistema de partículas, respecto de un punto fijo O, depende solo de los torques de fuerzas externas al sistema, y está dada por

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\text{fuerzas externas } \alpha} \vec{\tau}^{(ext)}_{\alpha}$$

Deben reconocer que cada fuerza externa está aplicada sobre una determinada partícula; se dice que la posición de esa partícula es el *punto de aplicación* de la fuerza externa.

Conservación del momento angular de un sistema de partículas

El teorema de variación del momento angular de un sistema de partículas tiene un corolario inmediato: si no hay torques de fuerzas externas, entonces $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ y $\vec{L}$ se mantiene constante. Lo enunciamos como

Principio de conservación del momento angular de un sistema de partículas
Cuando un sistema de partículas no recibe torques fuerzas externas, respecto de un punto fijo O, entonces se momento angular $\vec{L}$ se mantiene constante en el tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

o sea que para todo instante

$$\vec{L}(t) = \vec{L}(t_0)$$

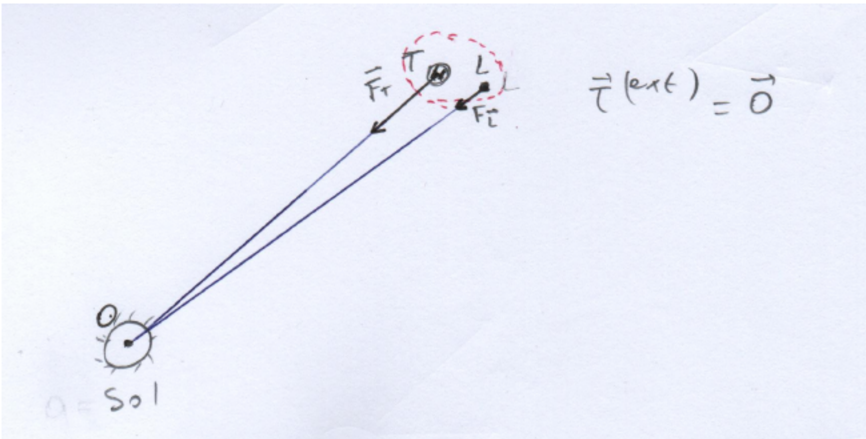
[1]La notación indica todos los pares (i,j) de partículas distintas. Por ejemplo, está el par $(1,2)$ cuando $i=1$ y también el par $(2,1)$ cuando $i=2$.

[2]Esta hipótesis se conoce como Tercera Ley de Newton en sentido fuerte. Por ejemplo, la interacción gravitatoria y la interacción electrostática tienen esta propiedad.

Ejemplos:

- Un sistema de partículas aislado (que no recibe fuerzas externas) obviamente no recibe torques externos. En consecuencia, en un sistema aislado se conservan su momento lineal $\vec{P}$ y también su momento angular $\vec{L}$. Noten que $\vec{L}$ se conserva como vector: son constantes su módulo, su dirección y su sentido.

- El sistema Tierra-Luna recibe fuerzas externas, ejercidas por el Sol. Si tomamos el punto O en el Sol, que es un sistema inercial, vemos que la atracción del Sol sobre la Tierra tiene torque nulo y que la atracción del Sol sobre la Luna también tiene torque nulo. Vemos que aunque hay fuerzas externas, éstas no ejercen torque. Por lo tanto el momento angular $\vec{L}$ del sistema Tierra-Luna respecto del Sol se mantiene constante en el tiempo (en módulo, dirección y sentido).

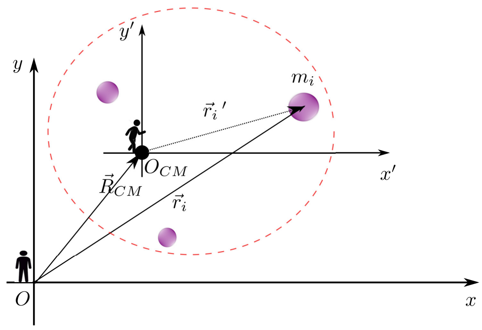


Noten que el momento lineal $\vec{P}$ no se conserva; el CM del sistema Tierra-Luna está acelerado hacia el Sol. Esta es una aceleración centrípeta, como corresponde porque el CM hace un movimiento (casi) circular alrededor del Sol.

Momento angular respecto del Centro de Masas

Como hicimos antes con el momento lineal $\vec{P}$, y con la energía cinética, vamos a descomponer el momento angular $\vec{L}$ de un sistema de partículas, respecto de un punto O, en una parte relacionada con el movimiento colectivo del sistema (es decir, de su centro de masas CM) y una parte relacionada con su movimiento interno, tal como lo vería un observador ubicado en el CM.

Comencemos por recordar cómo describe el observador ubicado en el CM el *movimiento interno* del sistema de partículas, y cómo se comparan sus medidas con las de un observador en el punto O.



Para cada partícula m_i el observador ubicado en el CM mide una posición $\vec{r}_i{}'(t)$ relativa al CM como

$$\vec{r}_i{}'(t) = \vec{r}_i(t) - \vec{R}_{CM}(t) \tag{5}$$

y derivando respecto del tiempo encuentra que su *velocidad* $\vec{v}_i{}'(t)$ relativa al CM es

$$\vec{v}_i{}'(t) = \vec{v}_i(t) - \vec{V}_{CM}(t) \tag{6}$$

Derivando nuevamente, también encuentra que su *aceleración* $\vec{a}_i{}'(t)$ *relativa al CM* es

$$\vec{a}_i{}'(t) = \vec{a}_i(t) - \vec{A}_{CM}(t) \tag{7}$$

El momento angular $\vec{L}$ del sistema de partículas, respecto del punto O, se descompone así

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{r}_i{}' + \vec{R}_{CM}\right) \times \left(\vec{v}_i{}' + \vec{V}_{CM}\right) \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}' + \vec{R}_{CM} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}_i{}'\right) + \left(\sum_i m_i \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{V}_{CM} + \left(\sum_i m_i\right) \vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}
\end{aligned}$$

En el tercer renglón $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \vec{0}$ y $\sum_i m_i \vec{v}_i{}' = \vec{0}$ por propiedades del CM, en tanto que $\sum_i m_i = M$ es la masa total del sistema.

Encontramos que el momento angular $\vec{L}$ del sistema de partículas, respecto de O, tiene dos partes:

$$\vec{L} = M\,\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$$

- $M\,\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}$ es el momento angular que tendría, respecto de O, una partícula de masa M ubicada en el CM y moviéndose con la velocidad del CM. Se llama *momento angular orbital* y está asociado al movimiento de traslación colectivo del sistema de partículas.
- $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$ es el momento angular que tienen las partículas por su movimiento respecto del CM. Se llama *momento angular interno* del sistema de partículas y está asociado a *la rotación del sistema alrededor del CM*. Lo anotaremos como

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i m_i\,\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'$$

Ejemplo: con datos astronómicos, calculen el momento angular orbital y el momento angular interno del sistema Tierra-Luna orbitando alrededor del Sol.

Dinámica del momento angular interno $\vec{L}_{CM}$

El momento angular interno $\vec{L}_{CM}$ tiene una propiedad muy importante:

aunque el CM esté acelerado, se verifica que

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum_{\text{fuerzas externas } \alpha} (\vec{\tau}_{CM})_\alpha^{(ext)} \tag{8}$$

donde el índice α incluye todas las fuerzas externas y cada torque $(\vec{\tau}_{CM})_\alpha^{(ext)} = \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_{i,\alpha_i}^{(ext)}$ está calculado respecto del CM.

Demostración: calculemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} &= \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i{}' \times \vec{v}_i{}'\right) \\
&= \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} \times \vec{v}_i{}' + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \frac{d\vec{v}_i{}'}{dt} \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{a}_i{}' \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \left(\vec{a}_i - \vec{A}_{CM}\right) \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{a}_i - \left(\sum_i m_i \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{A}_{CM} \\
&= \sum_i \vec{r}_i{}' \times \left(m_i \vec{a}_i\right)
\end{aligned}
$$

Noten que en el segundo renglón el primer término se anula porque contiene $\vec{v}_i{}' \times \vec{v}_i{}' = \vec{0}$; en el quinto reglón la suma se anula por propiedades del CM (Clase 21, ecuación (14)). Ahora que tenemos la aceleración $\vec{a}_i$ respecto del sistema inercial O usamos la Segunda Ley (escribimos las fuerzas con la notación de la Clase 21, ecuación (20)),

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i{}' \times \left(\sum_{\alpha_i} \vec{F}^{(ext)}_{i,\alpha_i} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{i,j}\right) \\
&= \sum_i \sum_{\alpha_i} \vec{r}_i{}' \times \vec{F}^{(ext)}_{i,\alpha_i} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_{i,j}
\end{aligned}
$$

La segunda sumatoria se anula, como vimos en (4), porque se forman pares de términos $(\vec{r}_i{}' - \vec{r}_j{}') \times \vec{F}_{i,j}$ con $\vec{F}_{i,j} \parallel \vec{r}_i{}' - \vec{r}_j{}'$. La primer sumatoria contiene los torques respecto del CM de todas las fuerzas externas, sobre todas las partículas del sistema. Como en (3), anotamos con un solo índice α todas las fuerzas externas y queda probada la propiedad (8).

Este resultado nos permitirá en las próximas clases estudiar la rotación de un sistema de partículas alrededor del CM con toda generalidad, igual que se estudia la rotación del sistema respecto de un punto O fijo en un sistema inercial.