Clase 22: Momento lineal en sistemas de partículas: ejemplos y aplicaciones

12 de junio de 2020

En esta clase vamos a usar los conceptos y relaciones de la clase 21. En distintos ejemplos y aplicaciones les cuento características y estrategias para clasificar y analizar las situaciones planteadas en la práctica.

Dado un sistema de partículas,

- lo vamos a describir globalmente como sistema a través de la posición y movimiento de su centro de masa (CM), de su cantidad de movimiento o momento lineal total $\vec{P}$ y de su energía cinética total. Desde este punto de vista, recordemos que la dinámica del sistema se describe a partir de

$$\sum_{\text{fuerzas externas}} \vec{F}_{\alpha}^{(ext)} = \frac{d}{dt}\vec{P} = M\,\vec{A}_{CM}$$

Veremos que las fuerzas externas son suficientes para describir el movimiento del CM, pero que las variaciones de energía cinética dependen además de las fuerzas internas.

- si es necesario, vamos a entrar en detalle acerca de cada partícula del sistema. En ese caso, recordemos que cada partícula i responde a la Segunda Ley,

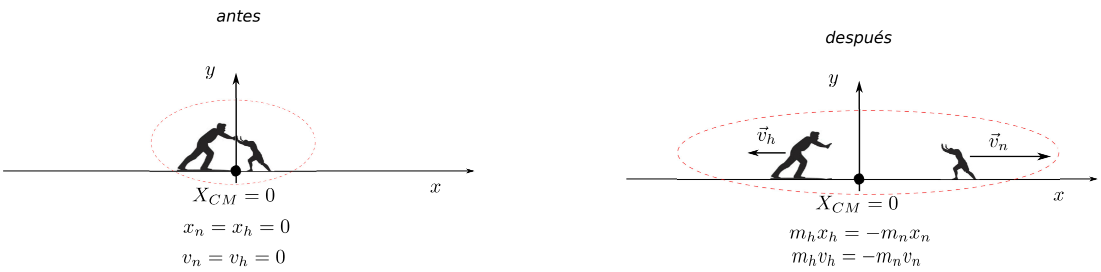
$$\sum_{\alpha_i} \vec{F}_{i,\alpha_i}^{(ext)} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{i,j} = \frac{d}{dt}\vec{p}_i = m_i\vec{a}_i \qquad (1)$$

Respecto del sistema de referencia donde situamos el observador, en general tenemos dos opciones: fijo al piso o montado sobre el CM del sistema de partículas.

Ejemplos

1. Ejemplo de sistema aislado, con el CM en reposo

Situación: Un hombre de masa $m_h = 80\,kg$ y su hijo, un niño de masa $m_n = 40\,kg$, salen a patinar sobre una superficie horizontal helada. En cierto momento t_0 están juntos, y en reposo. Hacen allí una marca para medir posiciones y luego se empujan entre sí, de modo que el niño adquiere una velocidad de módulo $v_n^{(\text{después})} = 2\,m/s$ respecto de la marca en el hielo.



Para analizar esta situación vamos situarnos como un observador inercial quieto en la superficie del hielo. Vamos a utilizar un eje x con el origen en la marca del hielo, con dirección y sentido positivo en la dirección y sentido en que se mueve el niño después del impulso. Vamos a considerar como partículas puntuales tanto al hombre como a su hijo, y como sistema de partículas al conjunto de ambos ($N = 2$ partículas).

Pregunta: ¿cuál es la posición del centro de masas antes empujarse?

Con respecto al eje x elegido,

$$X_{CM}^{(\text{antes})} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i x_i^{(\text{antes})} = \frac{1}{m_h + m_n}\left(m_h \cdot 0 + m_n \cdot 0\right) = 0$$

El CM se encuentra en el origen del sistema de coordenadas. Comentemos que en general, si todas las partículas del sistema están en el mismo lugar, allí se encuentra el CM.

Pregunta: ¿cuál es la velocidad del centro de masas antes empujarse?

Con respecto al hielo como sistema de referencia, y en el eje x elegido,

$$V_{CM,x}^{(\text{antes})} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i v_{i,x}^{(\text{antes})} = \frac{1}{m_h + m_n}\left(m_h \cdot 0 + m_n \cdot 0\right) = 0.$$

El CM se encuentra en reposo respecto del hielo.

Pregunta: ¿cuál es la posición y velocidad del centro de masas después de empujarse?

Analicemos las fuerzas externas que actúan sobre el sistema padre-hijo. Sobre el padre actúa su peso $\vec{P}_h$ ($80\,kg \cdot 9.8\,m/s^2 = 784\,N$) hecho por la Tierra hacia abajo y la fuerza normal $\vec{N}_h$ ejercida por el hielo hacia arriba; consideramos que no hay fuerza de roce sobre él (es un patinador habilidoso). Sobre el niño actúa su peso $\vec{P}_n$ ($40\,kg \cdot 9.8\,m/s^2 = 392\,N$) hecho por la Tierra hacia abajo y la fuerza normal $\vec{N}_n$ ejercida por el hielo hacia arriba; consideramos que tampoco hay fuerza de roce sobre él (también es un patinador habilidoso). En el problema también está la fuerza mutua que el padre hace sobre el hijo, y la que el hijo hace sobre el padre; estas fuerzas son internas al sistema padre-hijo y actúan sólo durante el tiempo del empujón (cuando se separan ya no interactúan).

Entendemos que ninguno se acelera en la dirección vertical (no se agachan, no saltan). Entonces, vistos como partículas distintas, la componente vertical de la Segunda Ley nos dice que para cada uno se cumple que la fuerza normal es de igual módulo que el peso. Sí tienen aceleración horizontal, durante el empujón, pero eso se relaciona con las fuerzas internas. Por lo tanto, encontramos

$$\sum_{\text{fuerzas externas}} \vec{F}_{\alpha}^{(ext)} = \vec{P}_h + \vec{P}_n + \vec{N}_h + \vec{N}_n = \vec{0}.$$

El sistema se puede considerar aislado, y el centro de masa no tiene aceleración. Dado que tenía posición inicial $X_{CM} = 0$ y velocidad inicial $V_{CM,x} = 0$, su posición en función del tiempo es

$$X_{CM}(t) = X_{CM}^{(\text{antes})} + V_{CM,x}^{(\text{antes})}\,(t - t_0) = 0$$

El CM permanece en la marca del hielo *antes*, *durante* y *después* del empujón, y así sigue hasta que actúe alguna fuerza externa sobre alguna de las dos personas.

Pregunta: ¿cuál es el impulso que el padre ejerce sobre su hijo durante el empujón?

El impulso solicitado no lo podemos calcular como integral en el tiempo de la fuerza $\vec{F}_{n,h}$ que el padre hace sobre el hijo, porque no conocemos cómo esa fuerza depende del tiempo. Sí conocemos su efecto neto, que es el cambio de velocidad del niño. Dado que $\vec{F}_{n,h}$ es la fuerza neta que actúa sobre el niño, podemos usar la relación

$$\vec{J}_{n,h} = \Delta\vec{p}_n$$

Tiene solo componente en el eje x,

$$\left(J_{n,h}\right)_x = m_n\left(v_{n,x}^{(\text{después})} - v_{n,x}^{(\text{antes})}\right) = 80\,\frac{kg\,m}{s} = 80\,N\,s$$

Pregunta: ¿cuál es la velocidad del padre después de empujarse?

En todo momento se cumple que la velocidad del CM es nula. Luego la correspondiente expresión debe igualarse a cero

$$V_{CM,x}^{(\text{después})} = \frac{1}{M}\sum_{i} m_i v_{i,x}^{(\text{después})}$$

$$0 = \frac{1}{m_h + m_n}\left(m_h \cdot v_{h,x}^{(\text{después})} + m_n \cdot v_{n,x}^{(\text{después})}\right)$$

Se despeja

$$v_{h,x}^{(\text{después})} = -\frac{m_n}{m_h} v_{n,x}^{(\text{después})} = -1\, m/s$$

Esto es lo que usualmente se llama "velocidad de retroceso" del hombre, por haber empujado al niño. Noten que la velocidad del hombre tiene sentido opuesto a la velocidad del niño.

Pregunta: cuando el niño está a $10\, m$ de la marca en el hielo, ¿dónde está el padre?

La posición del CM permanece constante en $X_{CM} = 0$ (porque el sistema es aislado y el CM no tenía velocidad inicial). Vamos a llamar $x_n(t)$ a la posición del niño y $x_h(t)$ a la posición del padre. En todo momento se cumple

$$\frac{1}{M}\sum_i m_i x_i(t) = X_{CM}$$

que en este caso dice

$$\frac{1}{m_h + m_n}\left(m_h x_h(t) + m_n x_n(t)\right) = 0$$

En el instante t_1 en que $x_n(t_1) = 10\, m$ despejamos

$$x_h(t_1) = -\frac{m_n}{m_h} x_n(t_1) = -5\, m$$

El padre se ha alejado $5\, m$ de la marca del hielo, en sentido contrario al hijo. La distancia entre ambos, en es instante, es de $15\, m$.

Pregunta: ¿cuánto vale la energía cinética del sistema hombre-niño ante y después del empujón? Si hubo alguna variación, ¿a qué se debe?

La energía cinética es una cantidad aditiva, se calcula sumando

$$E_{cin}^{(\text{antes})} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_i^{(\text{antes})}\right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} E_{cin}^{(\text{después})} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_i^{(\text{después})}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_h \left(v_{h,x}^{(\text{después})}\right)^2 + \frac{1}{2} m_n \left(v_{n,x}^{(\text{después})}\right)^2 \\ &= 40\, J + 80\, J = 120\, J \end{aligned}$$

Evidentemente, la energía cinética aumenta durante el empujón, se pasa del reposo de ambas partículas al movimiento de ambas partículas. Esta variación se debe al trabajo de las fuerzas internas: el hombre entrega a su hijo una energía de $80\, J$, en tanto que el niño entrega al padre una energía de $40\, J$,

Observen que la variación de energía cinética del sistema *depende de las fuerzas internas* (y de las externas, en general). También observen que las fuerzas que se ejercen el padre y el hijo entre sí son de igual módulo (Tercera Ley) pero el trabajo realizado por cada una es distinto. Deben acostumbrarse a que el análisis de trabajo y energía no se puede realizar a nivel sistema, se debe realizar atendiendo al detalle de cada partícula del sistema.

Pregunta: ¿cómo se descompone la energía cinética antes y después del empujón, en términos de energía de traslación del sistema y de energía de movimiento respecto del CM?

En general

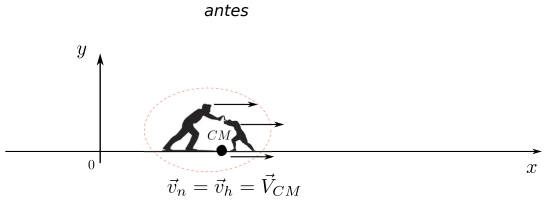
$$E_{cin} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i')^2$$

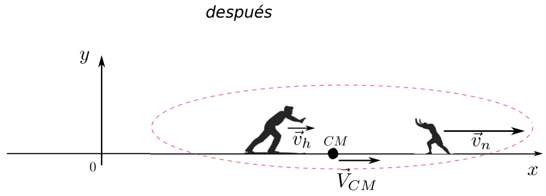
En este caso $V_{CM} = 0$, luego no hay energía de traslación del conjunto ni antes ni después del empujón. Por ser un sistema aislado, la energía de traslación $\frac{1}{2} M V_{CM}^2$ no puede cambiar.

En cambio, la energía cinética del movimiento respecto del CM pasa de $0\, J$ a $120\, J$ a causa del trabajo de las fuerzas internas.

2. Ejemplo de sistema aislado, con el CM en movimiento

Situación: El hombre y el niño de la situación anterior se mueven juntos, con una velocidad en el eje x de $5\,m/s$ respecto de la marca en el hielo. Entonces se empujan entre sí, de modo que el niño aumenta su velocidad en una velocidad $2\,m/s$, manteniendo su dirección y sentido.





Seguimos considerando como partículas puntuales tanto al hombre como a su hijo, y como sistema de partículas al conjunto de ambos ($N = 2$ partículas).

Vamos a analizar esta nueva situación desde dos puntos de vista, mejor dicho desde dos sistemas de referencia distintos.

- Por un lado vamos situarnos como un observador inercial quieto en la superficie del hielo, utilizando el mismo eje x con el origen en la marca del hielo; su dirección y sentido positivo coinciden con la dirección y sentido en que se mueven inicialmente el niño y el hombre cuando van juntos. Es común llamar "sistema de laboratorio" al observador fijo en el piso.
- Por otro lado vamos a analizar la situación como la ve un observador fijo en el CM. Veremos que esto facilita los cálculos.

2.a : "sistema de referencia de laboratorio"

Pregunta: ¿cuál es la velocidad del centro de masas antes empujarse?

Llamemos $v_x^{(\text{antes})} = 5\,m/s$. Dado que van juntos, esta es la velocidad tanto del padre como del hijo antes de empujarse. La velocidad del CM, respecto del observador quieto en el hielo, es

$$V_{CM,x}^{(\text{antes})} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i v_{i,x}^{(\text{antes})} = \frac{1}{m_h + m_n}\left(m_h v_x^{(\text{antes})} + m_n v_x^{(\text{antes})}\right) = v_x^{(\text{antes})} = 5\,\frac{m}{s}.$$

Antes del empujón el CM se encuentra siempre en el mismo lugar que el padre y el hijo juntos, se mueve junto a ellos. Este resultado es general para cualquier sistema que tenga sus partículas juntas.

Pregunta: ¿cuál es la cantidad de movimiento lineal del sistema hombre-niño antes empujarse?

La cantidad de movimiento lineal, o momento lineal, es una cantidad aditiva, $\vec{P}^{(\text{antes})} = m_h \vec{v}_h^{(\text{antes})} + m_n \vec{v}_n^{(\text{antes})}$. En este caso tiene solo componente x,

$$P_x^{(\text{antes})} = m_h v_x^{(\text{antes})} + m_n v_x^{(\text{antes})} = (m_h + m_n)\, v_x^{(\text{antes})} = 600\,\frac{kg\,m}{s}$$

.

Pregunta: ¿cuál es la velocidad del centro de masas después de empujarse?

Las fuerzas externas son las mismas que en el análisis anterior, y suman $\vec{0}$. Luego el CM no tiene aceleración, *antes*, *durante* y *después* del empujón; se mueve con velocidad constante

$$V_{CM,x}(t) = v_x^{(\text{antes})} = 5\,\frac{m}{s}$$

Pregunta: ¿cuál es el momento lineal del sistema hombre-niño después de empujarse?

El momento lineal $\vec{P}$ se conserva, porque las fuerzas externas suman $\vec{0}$. Por lo tanto

$$P_x^{(\text{después})} = P_x^{(\text{antes})} = 600\,\frac{kg\,m}{s}.$$

Pregunta: ¿cuál es la cantidad de movimiento lineal del sistema hombre-niño antes empujarse?

La cantidad de movimiento lineal después del empujón puede igualarse con su valor (conservado)

$$\sum_i m_i v_{i,x}^{(\text{después})} = P_x$$

$$m_h \cdot v_{h,x}^{(\text{después})} + m_n \cdot v_{n,x}^{(\text{después})} = (m_h + m_n)\, v_x^{(\text{antes})}$$

donde $v_{n,x}^{(\text{después})} = 5\,m/s + 2\,m/s = 7\,m/s$. Se despeja

$$v_{h,x}^{(\text{después})} = \frac{m_h + m_n}{m_h} v_x^{(\text{antes})} - \frac{m_n}{m_h} v_{n,x}^{(\text{después})} = 4\,m/s.$$

Pregunta: ¿cuál es el impulso que el padre ejerce sobre su hijo durante el empujón?

Dado que $\vec{F}_{n,h}$ es la fuerza neta que actúa sobre el niño, podemos usar la relación

$$\vec{J}_{n,h} = \Delta \vec{p}_n$$

Solo la componente en el eje x es distinta de cero, vale

$$(J_{n,h})_x = m_n \left(v_{n,x}^{(\text{después})} - v_{n,x}^{(\text{antes})} \right) = 80\,\frac{kg\,m}{s} = 80\,N\,s$$

Pregunta: ¿cuánto vale la energía cinética del sistema hombre-niño ante y después del empujón? Si hubo alguna variación, ¿a qué se debe?

La energía cinética antes del empujón se calcula sumando

$$\begin{aligned} E_{cin}^{(\text{antes})} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_x^{(\text{antes})} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_h + m_n) \left(v_x^{(\text{antes})} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \left(v_x^{(\text{antes})} \right)^2 \\ &= 1500\,J \end{aligned}$$

Noten que es la misma energía que la de una partícula de masa $M = m_h + m_n = 120\,kg$ moviéndose con velocidad $v_x^{(\text{antes})}$.

La energía cinética después del empujón se calcula sumando

$$\begin{aligned} E_{cin}^{(\text{después})} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_i^{(\text{después})} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_h \left(v_{h,x}^{(\text{después})} \right)^2 + \frac{1}{2} m_n \left(v_{n,x}^{(\text{después})} \right)^2 \\ &= 640\,J + 980\,J = 1620\,J \end{aligned}$$

La variación es

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{(\text{después})} - E_{cin}^{(\text{después})} = 120\,J$$

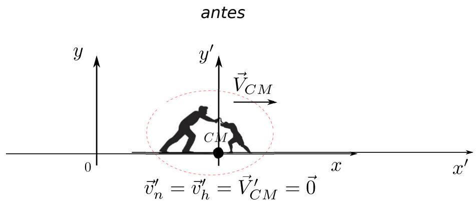
La energía cinética del sistema aumenta $120\,J$ durante el empujón, a causa del trabajo de las fuerzas internas.

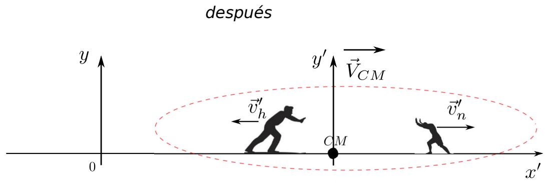
Antes y después del empujón la energía cinética de traslación es $\frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 1500\,J$. Esta cantidad no cambia, porque el sistema es aislado y $\vec{P}$ se conserva. El resto de la energía cinética es la asociada al movimiento interno, respecto del CM. Antes del empujón es nula (las partículas no se mueven respecto del CM) y después del empujón es de $120\,J$ (el niño y el hombre sí se mueven respecto del CM.

Podemos enunciar en general: en un sistema aislado, ya que la energía cinética de traslación es $\frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 1500\,J$ no cambia, el trabajo de las fuerzas internas cambia solo la energía cinética es la asociada al movimiento interno.

2.b: Sistema del CM

Hemos visto que el sistema hombre-niño es aislado, luego **la velocidad de su CM es constante** respecto del "sistema de laboratorio". Luego **un observador montado al CM del sistema es un observador inercial**. Podemos trabajar allí usando las Leyes de Newton. Insistimos en que no pueden hacer esto en cualquier caso, solo cuando el sistema de partículas tiene un CM que se mueve con velocidad constante respecto de un sistema inercial (cosa que sucede para los sistemas de partícula aislados).





Estrategia: primero calculamos la velocidad del CM, y traducimos todos los datos de "laboratorio" al sistema del CM. En particular, tenemos que calcular velocidades relativas.

En el sistema del CM contamos con relaciones de validez general que nos facilitan los cálculos; algunas son las propiedades numeradas como (14, 15, 16, 17) en la Clase 21:

$$\vec{P}\,' = \vec{0}$$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i\,' = \vec{0}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i\,' = \vec{0}$$

$$E'_{cin} = E_{cin}^{(\text{interna})} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i')^2$$

Con la teoría general, y estas relaciones como guía, resolvemos el problema (contestamos todas las preguntas, como las contestaría el observador en el CM).

Finalmente traducimos los resultados al sistema de "laboratorio" para contestar las preguntas originales.

Con un poco de experiencia verán que los planteos y cálculos en el sistema del CM son mucho más sencillos que los correspondientes planteos y cálculos en el "sistema de laboratorio". Esto justifica que nos tomemos el trabajo de traducir los datos de laboratorio a ese sistema, y luego traducir los resultados de vuelta al "laboratorio". Todos los cálculos de colisiones en aceleradores, por ejemplo, se hacen siguiendo esta estrategia.

Análisis de la situación: el primer paso es traducir todos los datos de "laboratorio" al sistema del CM. En el caso de las velocidades, usando la ecuación (12) de la Clase 21 y escribiendo solo las componentes x,

$$\begin{aligned} v'_{h,x}(t) &= v_{h,x}(t) - V_{CM,x} \\ v'_{n,x}(t) &= v_{n,x}(t) - V_{CM,x} \end{aligned}$$

donde las velocidades "prima" son las que se observan desde el CM.

Antes del empujón, usando la $V_{CM,x}$ calculada en la parte **2.a**,

$$\begin{aligned} \left(v'_{h,x}\right)^{(\text{antes})} &= \left(v_{h,x}\right)^{(\text{antes})} - V_{CM,x} = 5\,\frac{m}{s} - 5\,\frac{m}{s} = 0 \\ \left(v'_{n,x}\right)^{(\text{antes})} &= \left(v_{n,x}\right)^{(\text{antes})} - V_{CM,x} = 5\,\frac{m}{s} - 5\,\frac{m}{s} = 0 \end{aligned}$$

Después del empujón el niño adquiere una velocidad de $7\,m/s$ en el sistema de laboratorio. Desde el CM,

$$\left(v'_{n,x}\right)^{(\text{después})} = \left(v_{n,x}\right)^{(\text{después})} - V_{CM,x} = 7\,\frac{m}{s} - 5\,\frac{m}{s} = 2\,\frac{m}{s}$$

Vista desde el sistema del CM, la situación es idéntica a la que planteamos cuando el padre y el hijo estaban inicialmente en reposo. Intuitivamente debe ser claro: mientras permanecen juntos su posición coincide con la del CM y no hay movimiento relativo al CM.

En este caso elegí un planteo que nos llevó al problema anterior, solo para ahorrar tiempo (normalmente tiene que resolver lo que les queda en el CM). Podemos copiar los resultados de la sección **1.Ejemplo de sistema aislado, con el CM en reposo** e interpretarlos como lo que ve el observador desde el CM.

Por último, tenemos que traducir los resultados al sistema de "laboratorio". Veamos algunos:

La velocidad del hombre respecto del CM después del empujón es de $-1\,m/s$. Volviendo al sistema de laboratorio,

$$(v_{n,x})^{(\text{después})} = \left(v'_{n,x}\right)^{(\text{después})} + V_{CM,x} = -1\,\frac{m}{s} + 5\,\frac{m}{s} = 4\,\frac{m}{s}$$

En el sistema del CM, por construcción, $\vec{V}_{CM} = \vec{0}$. Luego, no hay energía cinética de traslación. La energía cinética observada es puramente energía interna.

$$E_{cin}^{\prime(\text{después})} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i')^2 = 120\,J$$

Volviendo al sistema de "laboratorio",

$$E_{cin}^{(\text{después})} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + E_{cin}^{\prime(\text{después})} = 1500\,J + 120\,J = 1620\,J$$

$1620\,J - 1500\,J = 120\,J$.

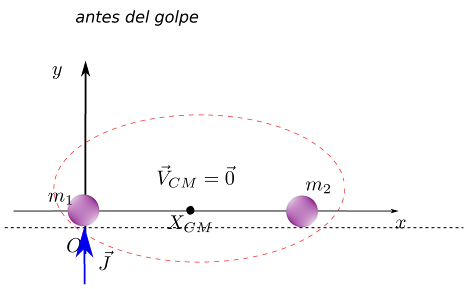
Les recomiendo chequear todas las preguntas de la parte **2.a** y ver que, volviendo al "laboratorio", obtenemos los mismos resultados.

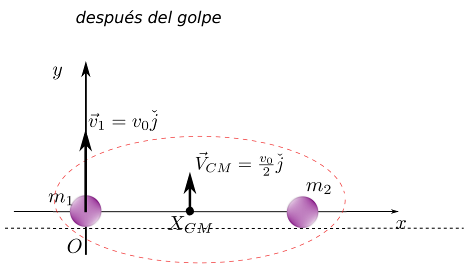
En resumen, hemos resuelto la situación **2.Ejemplo de sistema aislado, con el CM en movimiento** de dos maneras: resolviendo en el sistema de "laboratorio" y pasando los datos al sistema CM, resolviendo allí y trayendo los resultados de vuelta al "laboratorio"

Los resultados son consistentes, por supuesto; aunque pueden elegir la manera que les resulte más a gusto, tendrían que acostumbrarse a los dos puntos de vista. Varios problemas de la práctica les piden resolver de las dos maneras y comparar.

3. Ejemplo de sistema de partículas con fuerzas externas

Situación: dos masas iguales, $m_1 = m_2 = 200\,g$ (que llamaré m) se encuentran unidas por un hilo elástico, apoyadas en reposo sobre una membrana horizontal elástica y separadas una distancia $d = 10\,cm$. En un cierto instante se le aplica a la primera un golpe desde abajo (una fuerza impulsiva) que en el lapso de un milisegundo le da una velocidad hacia arriba de módulo $v_0 = 8\,m/s$. El hilo estaba flojo, de tal manera que en el milisegundo en que la masa $m_1$es acelerada, la masa m_2 todavía permanece en reposo.





Utilizaremos un eje x horizontal, en el cual las posiciones iniciales son $x_1 = 0$ y $x_2 = d$, y un eje vertical y orientado hacia arriba, en el cual las alturas iniciales son $y_1 = y_2 = 0$. El golpe es tan repentino que en el primer milisegundo la masa m_1 adquiere velocidad pero prácticamente no recorre ninguna distancia. Estas hipótesis de trabajo (aproximaciones) son las usuales en golpes, impactos, choques, explosiones, etc. Consideramos como sistema de partículas al conjunto de ambas masas.

Pregunta: ¿Cuál es la fuerza media aplicada a la masa m_1 durante el golpe?

La velocidad de la masa m_1 pasa de $\vec{v}_1^{(\text{antes})} = \vec{0}$ a $\vec{v}_1^{(\text{después})} = v_0 \check{j}$. Es decir, sufre un cambio en la cantidad de movimiento

$$\Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1^{(\text{después})} - m_1 \vec{v}_1^{(\text{antes})} = m_1 v_0 \check{j}$$

en $\Delta t = 10^{-3} s$. La fuerza media aplicada es

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{m_1 v_0}{\Delta t} \check{j} = 1600 \, N$$

Pregunta: ¿cuál es la posición y velocidad del CM del sistema *inmediatamente* después del golpe?

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{1}{2m} \left(m \cdot 0 + m \, d \right) = \frac{d}{2}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{1}{2m} \left(m \cdot 0 + m \cdot 0 \right) = 0$$

$$V_{CM,x} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{i,x} = \frac{1}{2m} \left(m \cdot 0 + m \cdot 0 \right) = 0$$

$$V_{CM,y} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{i,y} = \frac{1}{2m} \left(m \, v_0 + m \cdot 0 \right) = \frac{v_0}{2}$$

Pregunta: ¿cuál es el movimiento del CM mientras las masas están en el aire, unidas por el hilo elástico?

El movimiento del CM está gobernado por las fuerzas externas. Mientras las masas están en el aire, las fuerzas externas son el peso de cada una, ejercido hacia abajo por la Tierra. Por lo tanto,

$$\begin{cases} x: & 0 = 2m \, A_{CM,x} \\ y: & -mg - mg = 2m \, A_{CM,y} \end{cases}$$

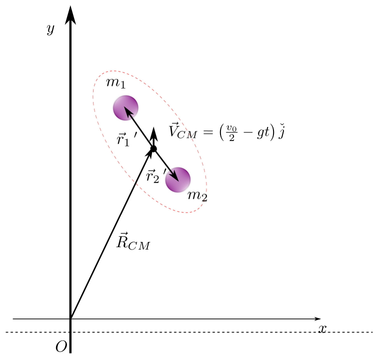
Despejamos que $A_{CM,x} = 0$ y $A_{CM,y} = -g$. Es decir, el CM se mueve con la aceleración de la gravedad. Lo podemos describir como una partícula librada a su propio peso (tiro vertical, caída libre, tiro oblicuo,...).

La posición y velocidad del CM *inmediatamente* después del golpe dan la posición y velocidad iniciales del CM. Si arrancamos en ese momento un cronómetro,

$$\begin{cases} X_{CM}(t) & = 0 \\ Y_{CM}(t) & = \frac{v_0}{2} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{CM,x}(t) & = 0 \\ V_{CM,y}(t) & = \frac{v_0}{2} - g t \end{cases}$$

Pregunta: Si en un dado momento t_1, mientras las masas están en el aire, unidas por el hilo elástico, la masa m_1 tiene una posición $\vec{r}_1{}'$ y una velocidad $\vec{v}_1{}'$ respecto del CM, ¿cuál es la posición y velocidad de la masa m_2 respecto del "laboratorio"?



Podemos calcular fácilmente la posición y velocidad de la masa m_2 respecto del CM:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = \vec{0} \Longrightarrow m_1\vec{r}_1{}' + m_2\vec{r}_2{}' = \vec{0} \Longrightarrow \vec{r}_2{}' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1{}' = -\vec{r}_1{}'$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i{}' = \vec{0} \Longrightarrow m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v}_2{}' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1{}' = -\vec{v}_1{}'$$

Volviendo al sistema del "laboratorio",

$$\vec{r}_2(t_1) = \vec{R}_{CM}\vec{r}_2(t_1) + \vec{r}_2{}'\vec{r}_2(t_1) = \left(\frac{v_0}{2}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2\right)\check{j} - \vec{r}_1{}'$$

$$\vec{v}_2\vec{r}_2(t_1) = \vec{V}_{CM}\vec{r}_2(t_1) + \vec{v}_2{}'\vec{r}_2(t_1) = \left(\frac{v_0}{2} - gt_1\right)\check{j} - \vec{v}_1{}'$$

nos dan la posición y velocidad de la masa m_2 respecto del "laboratorio".

Noten que el sistema del CM es un sistema acelerado (no inercial). *Podemos usar las relaciones cinemáticas que relacionan posición y velocidad entre "laboratorio" y CM, pero no podemos usar la Segunda Ley de Newton en el sistema CM.*

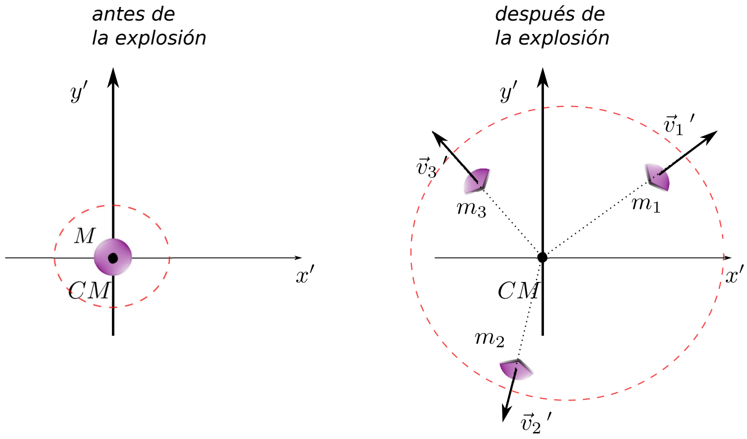
Aplicaciones

Con los mismos conceptos y estrategias que usamos en los ejemplos anteriores podemos resolver algunos casos típicos que reciben nombres particulares.

Explosiones y reacciones

Se llama así al proceso en que un cuerpo se fracciona en dos o más partes debido a fuerzas internas que actúan en un intervalo muy breve de tiempo. Luego del evento, las partículas son independientes, es decir no interactúan entre sí.

Modelamos cada fracción del cuerpo como una partícula, y al cuerpo como el sistema formado por esas partículas. Antes de la explosión (o reacción) todas las partículas están juntas, en el mismo punto que define el CM del sistema. Después de la explosión (o reacción) las partículas tienen movimiento relativo al CM.



Hipótesis de trabajo: consideramos que las fuerzas internas, *durante la explosión*, son mucho más grandes que cualquier fuerza externa que actúe sobre las partículas (podrían ser el peso o fuerzas de roce, por ejemplo)[1]. En consecuencia, despreciamos las fuerzas externas y consideramos que el sistema de partículas, *durante* la explosión, es *aislado*.

Entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva *durante* la explosión. Vamos a llamar "antes" al instante en que comienzan a actuar las fuerzas internas y "después" al preciso instante en que dejan de actuar las fuerzas internas

Bajo esta hipótesis, y con esta convención de "antes" y "después", corresponde plantear la conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema. Visto desde el "laboratorio",

$$\vec{P}^{(\text{después})} = \vec{P}^{(\text{antes})}$$

Si el cuerpo tiene masa M y se fracciona en N partes de masas m_i, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i} = M\vec{V}^{(\text{antes})}$$

Observen que esta ecuación es vectorial, al plantearla en componentes tendrán una ecuación por cada eje donde haya movimiento.

Por otro lado, visto desde el sistema del CM estas ecuaciones se ven más sencillas:

$$\left(\vec{P}\,'\right)^{(\text{después})} = \vec{0}$$

o bien

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_i}\,' = \vec{0}$$

Si interesa seguir la evolución del CM y de las partes del sistema después de la explosión ("más después"), recuerden que el CM evoluciona según todas las fuerzas externas, como en el ejemplo **3.Ejemplo de sistema de partículas con fuerzas externas**. Además, las partes del sistema no interactúan entre sí; cada partícula evoluciona según la fuerza externa que actúe sobre ella.

[1] En la práctica deben verificar que las fuerzas externas no se incrementen durante la explosión; por ejemplo, si el cuerpo está apoyado en una superficie resistente, la normal se incrementa para impedir el movimiento de partes que tiendan a atravesar la superficie.

Consideraciones de energía en explosiones y reacciones

En esta situación la energía cinética interna antes de la explosión es nula: no hay movimiento relativo de las partes respecto del CM. Después de la reacción, sí hay movimiento de las partes respecto del CM, el sistema gana energía interna debido al trabajo de las fuerzas internas (que consumen energía de alguna otra fuente)[2].

Como la $\vec{V}_{CM}$ se conserva durante la explosión, la energía cinética de traslación $\frac{1}{2}MV_{CM}^2$ no varía. Visto desde el laboratorio, la variación de energía cinética total es igual a la variación de energía cinética interna.

Ejemplos:

- El ejercicio del padre y el hijo sobre la superficie de hielo tiene todos los elementos de una explosión: las dos partes están unidas al principio, luego una fuerza interna las separa entre sí haciendo que adquieran velocidad relativa al CM. En la parte **1** la analizamos con el CM en reposo; en la parte **2.a** la resolvimos con el CM en movimiento; en la parte **2.b** la resolvimos desde el sistema del CM y vimos que eso es equivalente a tener el CM en reposo.
- Les recomiendo discutir el ejercicios 9 de la práctica 9. En esa situación encuentran velocidades en distintas direcciones, recuerden que la conservación del momento lineal es una ecuación vectorial:

$$\vec{P}^{(\text{antes})} = \vec{P}^{(\text{después})} \iff \begin{cases} x: & P_x^{(\text{antes})} = P_x^{(\text{después})} \\ y: & P_y^{(\text{antes})} = P_y^{(\text{después})} \\ z: & P_z^{(\text{antes})} = P_z^{(\text{después})} \end{cases}$$

Choque de dos partículas

Se llama así al proceso en que dos partículas independientes, cada una con cierta velocidad inicial, interactúan entre sí por contacto durante un intervalo muy breve de tiempo. Luego del evento, las partículas vuelven a ser independientes, es decir no interactúan entre sí (excepto en el caso en que queden "pegadas").

Verán que el análisis es muy similar al que hicimos para explosiones.

Hipótesis de trabajo: consideramos que las fuerzas internas, *durante el choque*, son mucho más grandes que cualquier fuerza externa que actúe sobre las partículas (podrían ser el peso o fuerzas de roce, por ejemplo). En consecuencia, despreciamos las fuerzas externas y consideramos que el sistema de partículas, *durante* el choque, es *aislado*.

Entonces la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva *durante el choque*. Vamos a llamar "antes" al instante en que comienzan a actuar las fuerzas internas y "después" al preciso instante en que dejan de actuar las fuerzas internas

Bajo esta hipótesis, y con esta convención de "antes" y "después", corresponde plantear la conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema. Visto desde el "laboratorio",

$$\vec{P}^{(\text{antes})} = \vec{P}^{(\text{después})}$$

En términos de las masas m_1 y m_2 que chocan, y sus velocidades,

$$m_1\vec{v_1}^{(\text{antes})} + m_2\vec{v_2}^{(\text{antes})} = m_1\vec{v_1}^{(\text{después})} + m_2\vec{v_2}^{(\text{después})}$$

Observen que esta ecuación es vectorial, al plantearla en componentes tendrán una ecuación por cada eje donde haya movimiento.

[2]Un modelo mecánico interesante para describir una explosión consiste en dos partículas que comprimen un resorte ideal, mantenidas juntas por una traba. Si se suelta la traba, el resorte se descomprime y empuja a las partículas; la energía potencial del resorte se convierte en energía cinética de las partículas.

Por otro lado, visto desde el sistema del CM estas ecuaciones se ven más sencillas:

$$\left(\vec{P}\,'\right)^{(\text{antes})} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \left(\vec{P}\,'\right)^{(\text{después})} = \vec{0}$$

o bien

$$m_1 \left(\vec{v}_1\,'\right)^{(\text{antes})} + m_2 \left(\vec{v}_2\,'\right)^{(\text{antes})} = \vec{0} \quad \text{y} \quad m_1 \left(\vec{v}_1\,'\right)^{(\text{después})} + m_2 \left(\vec{v}_2\,'\right)^{(\text{después})} = \vec{0}$$

Si interesa seguir la evolución del CM y de las partes del sistema después del choque ("más después"), recuerden que el CM evoluciona según todas las fuerzas externas, como en el ejemplo **3.Ejemplo de sistema de partículas con fuerzas externas**. Además, las partes del sistema no interactúan entre sí; cada partícula evoluciona según la fuerza externa que actúe sobre ella.

Ejemplos:

- Les recomiendo discutir el ejercicio 11 de la práctica 9. En esa situación las velocidades después del choque tienen direcciones distintas de las velocidad antes del choque. Recuerden que la conservación del momento lineal es una ecuación vectorial,

$$\vec{P}^{(\text{antes})} = \vec{P}^{(\text{después})} \iff \begin{cases} x: & P_x^{(\text{antes})} = P_x^{(\text{después})} \\ y: & P_y^{(\text{antes})} = P_y^{(\text{después})} \\ z: & P_z^{(\text{antes})} = P_z^{(\text{después})} \end{cases}$$

Consideraciones de energía en choques

Antes de un choque la energía cinética interna del sistema formado por las dos partículas que chocan no es nula: hay movimiento relativo de las partes respecto del CM. Durante el choque es usual que las fuerzas internas sean disipativas: su trabajo provoca una disminución de la energía cinética interna. Por otro lado, dado que la $\vec{V}_{CM}$ se conserva durante el choque, la energía cinética de traslación $\frac{1}{2}MV_{CM}^2$ no varía. Visto desde el laboratorio, la disminución de energía cinética total es igual a la disminución de la energía cinética interna.

Mencionemos dos casos extremos:

- si las fuerzas internas son estrictamente conservativas, durante el choque la energía cinética interna se convierte en potencial (las partículas de frenan entre sí) y luego se convierte nuevamente en energía cinética (las partículas se aceleran entre sí) de forma tal que la energía cinética final es igual a la energía cinética inicial. En este caso se dice que el choque es *perfectamente elástico*. Visto desde el "laboratorio", a la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se agrega la relación

$$\frac{1}{2}m_1 \left(v_1^{(\text{antes})}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(v_2^{(\text{antes})}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(v_1^{(\text{después})}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(v_2^{(\text{después})}\right)^2$$

  Observen que en este caso contamos con una ecuación extra, y podremos resolver el problema con un dato menos.

- si la energía cinética interna se pierde por completo, las partículas no tienen movimiento relativo al CM después del choque; se mantienen unidas en el punto del CM y se las puede considerar como una sola partícula de masa $m_1 + m_2$ con una única velocidad $\vec{v_1}^{(\text{después})} = \vec{v_2}^{(\text{después})} = \vec{v}^{(\text{después})}$. En este caso se dice que el choque es *plástico* o *perfectamente inelástico*. Visto desde el "laboratorio", a la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se escribe

$$m_1\vec{v_1}^{(\text{antes})} + m_2\vec{v_2}^{(\text{antes})} = (m_1 + m_2)\,\vec{v}^{(\text{después})}$$

  Observen que en este caso contamos con una incógnita (vectorial) menos, y el problema resulta más sencillo.

Además de estos casos extremos, en general sucede que una fracción de la energía cinética interna se mantiene después del choque y el resto se disipa. Se puede caracterizar la fracción de energía cinética perdida mediante el *coeficiente de restitución*

$$h = \frac{E_{cin}^{\prime(\text{después})}}{E_{cin}^{\prime(\text{antes})}} = \frac{\frac{1}{2}m_1\left(v_1^{\prime(\text{después})}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^{\prime(\text{después})}\right)^2}{\frac{1}{2}m_1\left(v_1^{\prime(\text{después})}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^{\prime(\text{después})}\right)^2}$$

donde "prima" significa que las cantidades se calculan en el sistema de referencia del CM. Como su nombre lo indica, el coeficiente de restitución expresa la fracción de energía cinética que, luego de frenarlas es devuelta al sistema por las fuerzas internas. El caso $h = 1$ es el que llamamos perfectamente elástico, en tanto que el caso $h = 0$ es el que llamamos perfectamente inelástico. Entremedio, se dice que el choque es *parcialmente elástico.*

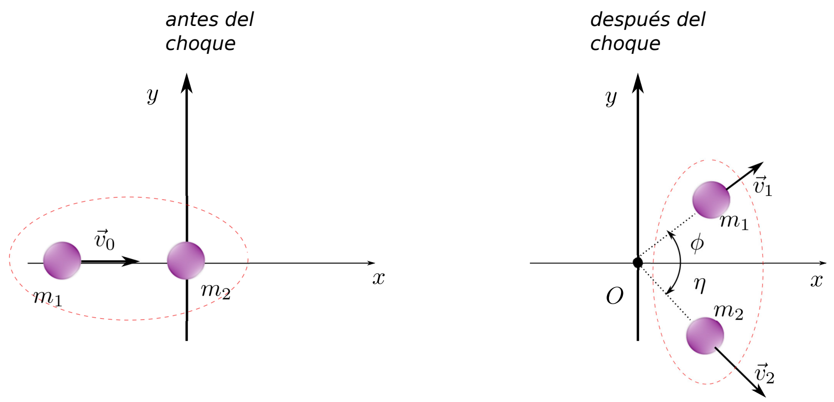
Ejemplos:

- en el ejercicio 11 de la práctica 9 les recomiendo comparar la energía cinética interna antes y después del choque, y calcular el coeficiente de restitución.
- el ejercicio 14 de la práctica 9 es un ejemplo de choque inelástico (el enunciado dice que los bloques quedan pegados después del choque).

Ejemplo: choque elástico de partículas de igual masa

Esta situación está propuesta en el ejercicio 13 de la práctica 9. Es un ejemplo clásico, interesante por sus resultados y completo por su desarrollo; vamos a resolverlo en detalle tanto desde el "laboratorio" como desde el CM.

a. "Laboratorio".



Consideramos el sistema formado por las dos partículas, y llamemos m a la masa de cada partícula. Anotemos v_0 al módulo de la velocidad de la partícula incidente, y v_1y v_2 a los módulos de las partículas después del choque; cada una forma un ángulo distinto con la dirección de la partícula incidente. Usando los ejes cartesianos de la figura y las variables dibujadas, la conservación de la cantidad de movimiento establece que

$$\vec{P}^{(\text{antes})} = \vec{P}^{(\text{después})} \Longrightarrow \begin{cases} x: & mv_0 = mv_1\cos\phi + mv_2\cos\theta \\ y: & 0 = mv_1\sin\phi - mv_2\sin\theta \end{cases}$$

y la característica de choque elástico establece que

$$E_{cin}^{(\text{antes})} = E_{cin}^{(\text{después})} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Vemos que el valor de m se simplifica y no es necesario conocerlo. Contamos entonces con tres ecuaciones y tres incógnitas: v_2, θ y ϕ, y los datos v_0 y $v1$ del enunciado. El sistema se puede resolver (es algo intrincado, usando identidades trigonométricas, acabo de revisar que sale). Deben obtener $v_1 = v_0\cos\phi$ y $v_2 = v_0\sin\phi$.

Conviene usar una maniobra para ayudar el despeje, que se escribe mejor en lenguaje vectorial: la conservación de la cantidad de movimiento establece que

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Simplificando m tenemos que $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, luego

$$v_0^2 = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

Por otro lado, simplificando m y $1/2$ en la expresión de la conservación de la energía cinética vemos que

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Comparando estas dos igualdades vemos que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Acabamos de demostrar una propiedad interesante[3]: cuando una partícula choca en forma elástica con otra de igual masa en reposo, las velocidades de salida son perpendiculares, o la primera queda en reposo (este caso se conoce como ***choque de sustitución***, porque la segunda sale con la misma velocidad con que llega la primera).

Aplicada a este ejercicio, vemos que $\theta + \phi = \pi/2$ (son ángulos complementarios). Luego $\cos\theta = \sin\phi$ y $\sin\phi = \cos\theta$ nos permite eliminar la incógnita θ. El planteo es el mismo, pero despejar resulta bastante más sencillo. Como dijimos, deben obtener $v_1 = v_0 \cos\phi$ y $v_2 = v_0 \sin\phi$.

b. Sistema del CM

Resolvamos el mismo problema desde el sistema del CM. En primer lugar necesitamos la velocidad del CM, vista desde el "laboratorio"; resulta

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{2m} m v_0 \check{\imath} = \frac{v_0}{2}\check{\imath}$$

La velocidad de la partícula incidente, vista desde el CM, es

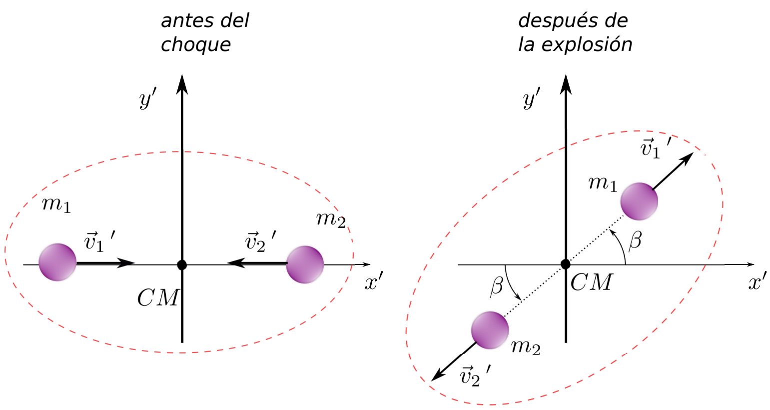
$$\left(\vec{v}_1^{(\text{antes})}\right)' = \vec{v}_1^{(\text{antes})} - \vec{V}_{CM} = v_0\check{\imath} - \frac{v_0}{2}\check{\imath} = -\frac{v_0}{2}\check{\imath}$$

La velocidad de la partícula inicialmente en reposo, vista desde el CM, es

$$\left(\vec{v}_2^{(\text{antes})}\right)' = \vec{v}_2^{(\text{antes})} - \vec{V}_{CM} = -\frac{v_0}{2}\check{\imath}$$

Como corresponde, observen que $m\left(\vec{v}_1^{(\text{antes})}\right)' + m\left(\vec{v}_2^{(\text{antes})}\right)' = \vec{0}$.

Conviene dibujar el choque tal como se ve en el sistema CM:



[3] Propiedad útil para jugar al billar o al pool.

Llamemos $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ a las velocidades de las partículas después del choque (no anotamos "(después)"), vistas desde el CM. Dado que

$$m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' = \vec{0}$$

despejamos que $\vec{v}_2' = -\vec{v}_1'$. Estas velocidades tienen el mismo módulo v_1' y dirección y sentidos opuestos; dibujamos $\vec{v}_1'$ con un ángulo β a determinar.

Como el choque es elástico, la energías cinéticas vistas desde el CM antes y después del choque son iguales:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1'\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(v_1'\right)^2$$

de donde despejamos que $v_1' = v_0/2$.

Desde el punto de vista del CM el choque está resuelto: las dos partículas salen con velocidades opuestas, del mismo módulo que cuando llegan. El ángulo β no se puede determinar en este planteo[4], cualquier valor de β entre 0 y π es posible.

Para llevar estos resultados de vuelta al sistema de "laboratorio" hacemos la transformación de velocidades

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{V}_{CM} = \left(\frac{v_0}{2}\cos\beta + \frac{v_0}{2}\right)\check{i} + \frac{v_0}{2}\sin\beta\,\check{j}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{V}_{CM} = \left(-\frac{v_0}{2}\cos\beta + \frac{v_0}{2}\right)\check{i} - \frac{v_0}{2}\sin\beta\,\check{j}$$

El ángulo β se puede determinar con los datos del enunciado, ya que sabemos el ángulo ϕ que forma $\vec{v}_1$ con el eje x. Calculemos el módulo de $\vec{v}_1$:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\cos\beta + \frac{v_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\sin\beta\right)^2} \\ &= \frac{v_0}{2}\sqrt{\cos^2\beta + 2\cos\beta + 1 + \sin^2\beta} \\ = v_0 &\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\beta} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{v_{1,x}}{v_1} = \frac{\frac{v_0}{2}\left(\cos\beta + 1\right)}{\frac{v_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\beta} \end{aligned}$$

que permite terminar de calcular v_1 como

$$v_1 = v_0\cos\phi$$

y permite despejar β como

$$\cos\beta = 2\cos^2\phi - 1$$

El módulo de $\vec{v}_2$ se calcula a partir de sus componentes,

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{\left(-\frac{v_0}{2}\cos\beta + \frac{v_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\sin\beta\right)^2} \\ &= \frac{v_0}{2}\sqrt{\cos^2\beta - 2\cos\beta + 1 + \sin^2\beta} \\ = v_0 &\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\beta} \end{aligned}$$

[4]Depende de que el choque sea frontal, o "de refilón". Para discutirlo, por ejemplo en un choque de bolas de pool, necesitamos modelar a las bolas como esferas con cierto radio. El modelo de partículas puntuales que usamos acá no permite esa discusión.

La dirección de $\vec{v}_2$ la averiguamos calculando el ángulo η de la figura:

$$\begin{aligned}
\cos\eta &= \frac{v_{2,x}}{v_2} = \frac{\frac{v_0}{2}\left(-\cos\beta + 1\right)}{\frac{v_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\beta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\beta} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2\cos^2\phi+1} \\
&= \sqrt{1-\cos^2\phi} \\
&= \sin\phi
\end{aligned}$$

Este resultado indica que η y ϕ son complementarios; es decir, $\eta = \pi/2 - \phi$. Efectivamente, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares en el sistema de "laboratorio".