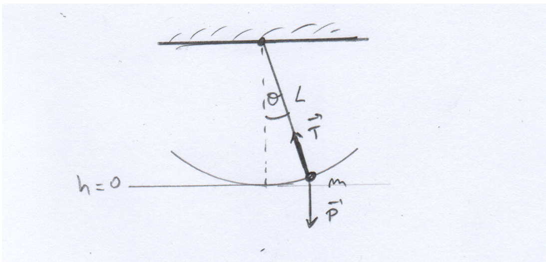
Clase 20: Movimiento oscilatorio (segunda parte)

4 de junio de 2020

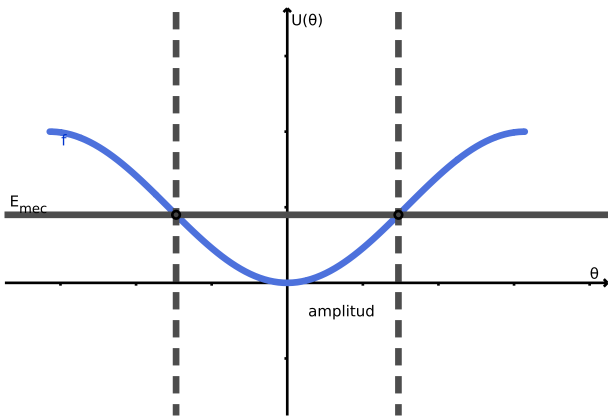
En esta clase trabajamos otros ejemplos de movimiento oscilatorio. Algunos son oscilaciones armónicas simples, y otros son solo aproximadamente armónicos.

Pequeñas oscilaciones de un péndulo ideal

Un péndulo ideal es un sistema compuesto por una masa puntual m suspendida de un hilo ideal (inextensible y de masa despreciable) de longitud L, con un extremo fijo. En su movimiento se desprecia el roce con el aire.



Como vimos en el ejemplo 5 de la clase 18, su energía mecánica (cinética más potencial gravitatoria) se conserva constante. La energía potencial gravitatoria tiene un mínimo cuando el hilo está vertical; si la energía cinética en ese punto es suficientemente pequeña, el péndulo oscila en un pozo de potencial.



Analicemos la dinámica del péndulo ideal. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su propio peso y la tensión del hilo. La Segunda Ley de Newton, en ejes normal y tangencial, relaciona

$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ -mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

donde $a_C = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 L$ es la aceleración centrípeta y $a_T = \alpha L = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración tangencial. En la segunda ecuación vamos a utilizar la aproximación

$$\sin\theta \approx \theta$$

válida si el ángulo se mide en radianes y es suficientemente pequeño[1]. Entonces, para amplitudes pequeños,

$$\begin{aligned} mL\frac{d^2\theta}{dt^2} &\approx -mg\,\theta \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &\approx -\frac{g}{L}\,\theta \end{aligned}$$

el ángulo de desviación respecto de la vertical oscila con MAS, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{g/L}$$

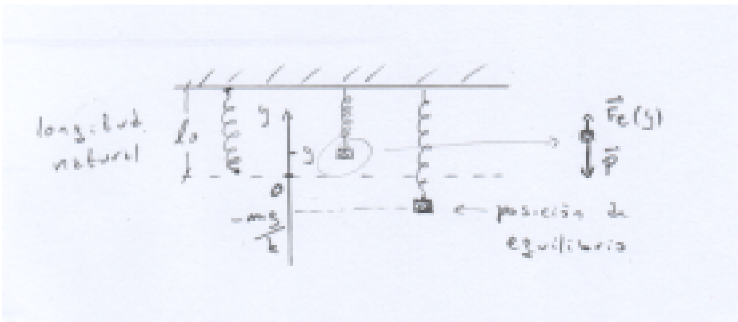
El período del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L/g}$$

La experiencia nos confirma que en verdad un péndulo con gran longitud tiene un período grande, lo que corresponde a una frecuencia pequeña.

Oscilaciones de una masa suspendida de un resorte vertical

Consideremos una partícula de masa m suspendida del extremo de un resorte de constante k y longitud natural l_0, con el otro extremo fijo al techo. Usemos un eje y vertical, con el origen a una distancia l_0 del techo y el sentido positivo hacia arriba.



Cuando la masa está en una posición y, actúan sobre ella la fuerza del peso $\vec{P} = -mg\check{\jmath}$ y la fuerza elástica $\vec{F}_e(y) = -ky\check{\jmath}$ (despreciamos el roce con el aire). Como ambas fuerzas son conservativas, se conserva la energía mecánica de la partícula; fijemos el cero de la energía potencial elástica en $y = 0$, con lo cual $U_e(y) = \frac{1}{2}ky^2$, y el cero de la energía potencial gravitatoria también en $y = 0$, con lo cual $U_g(y) = mgy$. La energía potencial completa,

$$U_{\text{total}}(y) = \frac{1}{2}ky^2 + mgy$$

es una parábola con las ramas hacia arriba y tiene un mínimo cuando $U'_{\text{total}}(y) = ky + mg = 0$, esto es en

$$y_{\min} = -\frac{mg}{k}$$

Por la forma de la energía potencial podemos afirmar que la partícula tendrá un movimiento oscilatorio alrededor de la posición de equilibrio estable $y = y_{\min}$.

Otra forma de ver que $y_{\min} = -mg/k$ es la posición de equilibrio es analizar el problema de estática, $\vec{P} + \vec{F}_e(y) = \vec{0}$. Esta condición de equilibrio se cumple cuando

$$-mg - ky_{\text{equilibrio}} = 0,$$

esto es cuando

$$y_{\text{equilibrio}} = -\frac{mg}{k}$$

Comparando ambos razonamientos vemos que las oscilaciones se dan alrededor de la posición en que el resorte podría permanecer en reposo.

[1]Probablemente recuerden que $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta/\theta) = 1$.

La dinámica del movimiento está dada por la Segunda Ley de Newton; en el eje y tenemos que

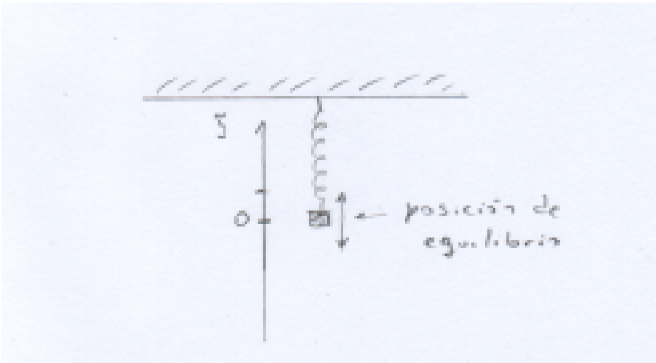
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - mg$$

Esta ecuación diferencial no tiene la forma del MAS, básicamente porque la posición que elegimos como $y = 0$ no es la posición de equilibrio.

Para encontrar la ecuación del MAS es necesario usar un nuevo sistema de coordenadas, con el nuevo origen en la posición de equilibrio. Esto se logra definiendo

$$\tilde{y} = y + \frac{mg}{k}$$

(que se anula cuando $y - y_{\text{equilibrio}}$).



En la nueva coordenada la aceleración es

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y - g = -\frac{k}{m}\left(\tilde{y} - \frac{mg}{k}\right) - g = -\frac{k}{m}\tilde{y}$$

que sí tiene la forma del MAS con $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Las soluciones, que describen movimiento de la partícula, están dadas por

$$\tilde{y}(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Volviendo al sistema de coordenadas del principio,

$$y(t) = -\frac{mg}{k} + A\cos(\omega t + \phi)$$

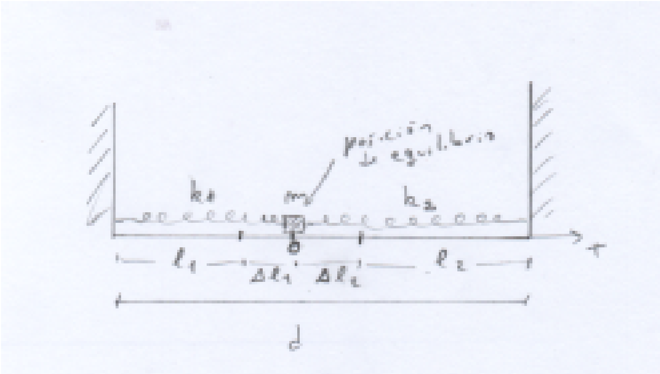
en verdad describe oscilaciones armónicas simples alrededor de $y = -mg/k$. La amplitud y la fase inicial se determinan, como ya saben, a partir de las condiciones iniciales.

Observen que la aceleración vista desde los dos sistemas de coordenadas es la misma, porque ambos son inerciales. Vean también que puede ser necesario maniobrar un poco para descubrir que un sistema se mueve con MAS.

Sistemas elásticos compuestos

En algunas situaciones una partícula puede estar sometida a dos o más fuerzas elásticas. El juego de estas fuerzas determina la posición de equilibrio (donde la fuerza neta es cero), y también el valor de la fuerza neta cuando la partícula se aparta de esa posición.

Como ejemplo consideren los dos resortes de la figura, uno con longitud natural l_1 y constante elástica k_1, y el otro con longitud natural l_2 y constante elástica k_2, sujetos a dos paredes separadas una distancia d mayor que $l_1 + l_2$. Ambos se tensionan hasta unirse a una masa m que queda entre ellos, que demás está apoyada en una superficie horizontal sin roce.



Igual que en el problema anterior, la posición de equilibrio de este sistema se puede determinar de dos maneras: como un problema de estática, pidiendo que las fuerzas sumen cero, o como un problema de energía potencial, buscando el mínimo de la energía potencial completa.

Veamos el problema de estática: en la posición de equilibrio el resorte de la izquierda estará elongado una distancia Δl_1 y el resorte de la derecha estará elongado una distancia Δl_2, de manera tal que

$$\begin{cases} l_1 + \Delta l_1 + l_2 + \Delta l_2 = d \\ -k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = 0 \end{cases}$$

La primer ecuación expresa que los resortes elongados cubren la separación d de las paredes y la segunda expresa que la resultante de las fuerza elásticas es cero. Estas dos ecuaciones con dos incógnitas permiten calcular Δl_1 y Δl_2, y con eso la posición de equilibrio.

Veamos ahora el problema de dinámica: usamos un eje x con origen en la posición de equilibrio y positivo hacia la derecha. Cuando la partícula se desplaza hasta un punto de coordenada $x \neq 0$ sentirá una fuerza $-k_1(\Delta l_1 + x)$ debida al resorte de la izquierda, y otra fuerza $+k_2(\Delta l_2 - x)$ debida al resorte de la derecha[2]. La Segunda Ley de Newton indica que, en el eje horizontal,

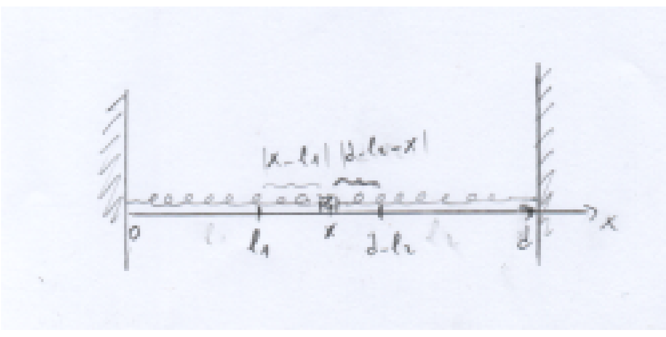
$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k_1(\Delta l_1 + x) + k_2(\Delta l_2 - x) \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)\,x - k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta \\ m\frac{d^2x}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)\,x \end{aligned}$$

La última igualdad tiene la forma de la ecuación diferencial del MAS, con $\omega^2 = (k_1 + k_2)/m$. Por lo tanto la partícula va a oscilar con posición

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

La amplitud y la fase inicial se determinan, como ya saben, a partir de las condiciones iniciales.

Desde el punto de vista energético, las fuerzas que hacen trabajo son las elásticas, que son conservativas. Luego la energía mecánica se conserva. Podemos escribir la energía potencial completa, por ejemplo usando un eje x con origen en la pared izquierda.



[2] Noten que esto es cierto tanto para x positivo, que estira más al resorte de la izquierda y relaja el de la derecha, como para x negativo, que estira más al resorte de la derecha y relaja el de la izquierda.

Tenemos que

$$U_{\text{total}}(x) = \frac{1}{2}k_1(x - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x - (d - l_2))^2$$

donde cada paréntesis al cuadrado expresa la elongación de cada resorte. El mínimo de esta función nos da la posición de equilibrio. La fuerza elástica se puede recuperar como $F_{\text{total}}(x) = -\frac{d}{dx}U_{\text{total}}(x)$. La Segunda Ley de Newton

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d}{dx}U_{\text{total}}(x)$$

y un cambio de coordenadas al sistema que tiene su origen en la posición de equilibrio los lleva a la ecuación diferencial del MAS.

Pequeñas oscilaciones en un pozo de potencial

Cuando una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la acción de una fuerza $F(x)$ con energía potencial asociada $U(x)$, alrededor de un punto x_{min} donde es mínima la energía potencial y entre dos puntos de retorno, sabemos que el movimiento es periódico. Pero en general no es un MAS.

Solo cuando el potencial es parabólico, digamos

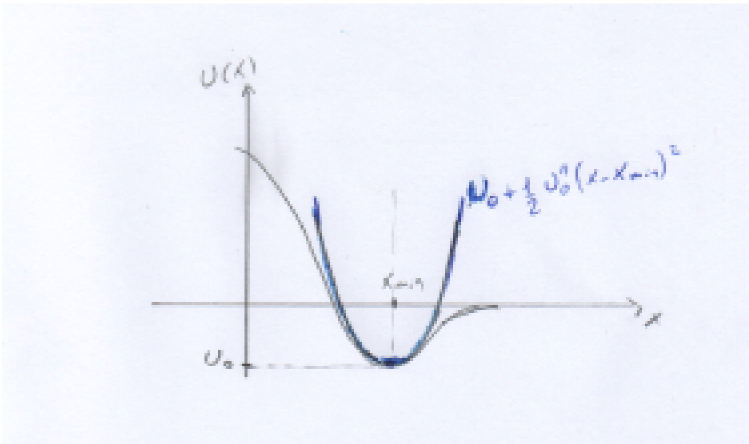
$$U_{\text{cuadrático}}(x) = \alpha\,(x - x_{\text{min}})^2 + \beta$$

resulta que la fuerza es restauradora y lineal respecto del desplazamiento,

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U_{\text{cuadrático}}(x) = -2\alpha\,(x - x_{\text{min}})$$

y el movimiento es armónico simple con $\omega^2 = 2\alpha/m$.

Ahora bien, si las oscilaciones tienen pequeña amplitud, cualquier función potencial con un mínimo suave se puede aproximar por una parábola, que copie el valor del mínimo y la concavidad (derivada segunda). Y la aproximación es tan buena como se quiera si se cuida que la amplitud de oscilación sea tan pequeña como sea necesario[3].



Si llamamos $U_0 = U(x_{\text{min}})$ al valor de la energía potencial en el punto x_{min} (donde la derivada $U'(x_{\text{min}}) = 0$) y $U_0'' = U''(x_{\text{min}})$ al valor de su derivada segunda, la función cuadrática que mejor aproxima[4] al potencial real (para pequeñas oscilaciones) es

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}U_0''\,(x - x_{\text{min}})^2$$

Asociada a esta aproximación la fuerza restauradora es lineal y se escribe

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) \approx -U_0''\,(x - x_{\text{min}})$$

[3] La idea es similar a la aproximación lineal, o diferencial. En este caso hablamos de una aproximación cuadrática. Pueden consultar el texto de *Análisis Matemático para Ciencias Exactas y Naturales*, capítulo 10, o cualquier texto que trate los Polinomios de Taylor.

[4] Con el criterio de reproducir el valor, derivada primera y derivada segunda de $U(x)$ en el punto x_{min}.

Luego las oscilaciones de pequeña amplitud son aproximadamente armónicas, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{U_0''}{m}}$$