Clase 19: Movimiento oscilatorio

1 de junio de 2020

En esta clase estudiamos un tipo de movimiento de partículas en una dimensión, conocido como movimiento oscilatorio.

Primero analizamos el caso general, que puede describirse como el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza restauradora. Esto es una fuerza conservativa que confina a la partícula en un pozo de potencial.

Luego estudiamos con detalle el caso de fuerzas que dependen linealmente de la posición, con la forma $F(x) = -k\,x$. El ejemplo básico es el de un cuerpo sujeto a un resorte, pero hay otras aplicaciones. Otro ejemplo importante es el movimiento de un péndulo.

1. Fuerzas restauradoras y pozos de potencial

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en una dimensión sometida a una fuerza $\vec{F}(x)$ en la misma dirección del movimiento. En esta clase llamaremos $F(x)$ a la *componente*[1] de la fuerza $\vec{F}(x)$. Hemos visto que se puede definir una energía potencial como

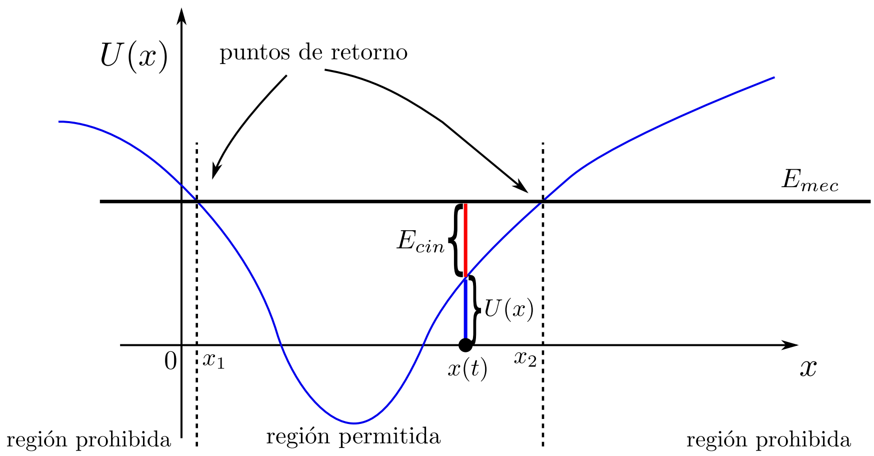
$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \tag{1}$$

donde x_0 es el punto de referencia que fija el cero de la energía potencial. Además, supondremos que $F(x)$ es la única fuerza que actúa (en particular despreciamos fuerzas disipativas como el roce con superficies o con el aire). Entonces, la energía mecánica se conserva:

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{constante de movimiento} \tag{2}$$

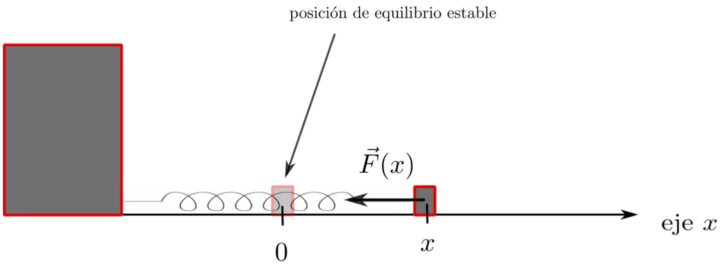
La energía mecánica es una *constante de movimiento:* permanece siempre en el mismo valor mientras la partícula se mueve.

Cuando la gráfica de $U(x)$ tiene un mínimo, se dice que la fuerza es *restauradora* y que la energía potencial tiene forma de *pozo de potencial.* Si el valor de E_{mec} es tal que la partícula no puede salir de ese pozo, la partícula mantiene un movimiento periódico entre dos *puntos de retorno*; se dice que la partícula hace un *movimiento oscilatorio.*



[1] No confundir con módulo; en esta clase $F(x)$ es una componente y puede ser positiva o negativa.

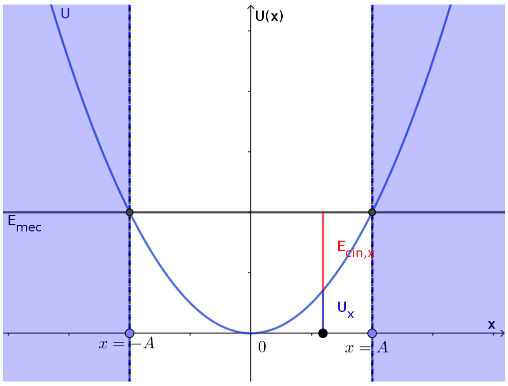
Ejemplo 1: ilustremos con el ejemplo más sencillo: una partícula de masa m unida a un resorte de constante k apoyada en una superficie horizontal sin roce.



Eligiendo un eje x con el origen en el punto de longitud natural del resorte, sabemos que la fuerza elástica se escribe $F(x) = -k\,x$ y que la energía potencial, con cero en $x = 0$, se escribe

$$U(x) = \frac{1}{2} k\, x^2$$

Este potencial, con forma de parábola, es confinante para cualquier valor de la energía mecánica.



Dado que la parábola es simétrica, los puntos de retorno se hallan a igual distancia del origen. Esta distancia $A > 0$ se llama *amplitud* del movimiento oscilatorio.

La energía mecánica, constante, se puede calcular en cualquier punto del recorrido. Por ejemplo, si conocemos la amplitud la podemos evaluar en un punto de retorno, donde la velocidad es cero:

$$E_{mec} = \frac{1}{2} k\, A^2$$

O bien, si conocemos la velocidad $v_{\max}$ de la partícula cuando pasa por el origen, que tiene módulo máximo porque la energía potencial es mínima,

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m\, v_{\max}^2$$

En cualquier otro lugar, como sabemos,

$$\frac{1}{2} m\, v(x)^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 = E_{mec}$$

Opcional: con un poco de Análisis Matemático se puede calcular el *período* del movimiento oscilatorio. Para calcular el tiempo que tarda la partícula en ir desde el punto de retorno izquierdo x_1 hasta el punto de retorno derecho x_2 se despeja el módulo de la velocidad

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\,(E_{mec} - U(x))}$$

Mientras la partícula va hacia la derecha, la componente de la velocidad es igual al módulo,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\,(E_{mec} - U(x))}$$

Como la función $x(t)$ es creciente mientras la partícula va desde x_1 hasta x_2, podemos estudiar la función inversa $t(x)$; mientras $\frac{dx}{dt} \neq 0$ su derivada es

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U(x)\right)}}$$

Integrando entre x_1 y x_2 obtenemos "el tiempo de ida"

$$T_{\text{ida}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U(x)\right)}}\, dx$$

Si calculan el "tiempo de vuelta" obtienen la misma expresión. El período T del movimiento oscilatorio ($T_{\text{ida}} + T_{\text{vuelta}}$) resulta

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_{mec} - U(x)\right)}}\, dx$$

Es interesante resolver esta integral en el sistema masa-resorte del ejemplo 1, es del nivel que se trabaja en Análisis Matemático I. Deberían encontrar $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

2. Cinemática del movimiento oscilatorio con fuerza $F(x) = -kx$

En esta sección estudiamos el problema de una partícula de masa m que se mueve en una dimensión, con una fuerza restauradora que es proporcional al apartamiento de una cierta posición de equilibrio. Podría ser un sistema de masa y resorte como el ejemplo anterior, o podría ser cualquier otro planteo donde la fuerza resultante sea proporcional a la posición.

Ya sabemos que el movimiento es oscilatorio; el objetivo ahora es conocer la cinemática del problema. Es decir, encontrar la *posición en función del tiempo.*

Utilizamos como sistema de coordenadas un eje x con el cero en la posición de equilibrio. La fuerza restauradora que actúa sobre la partícula, proporcional a la posición, se escribe

$$F(x) = -kx$$

donde llamamos k a la constante de proporcionalidad. La Segunda Ley de Newton nos permite relacionar

$$-kx(t) = m\frac{dv}{dt}(t)$$

pero no podemos integrar directamente esta ecuación. Si bien formalmente es cierto que

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} -\frac{k}{m}x(t)\, dt$$

no conocemos $x(t)$ para resolver la integral.

Vamos a plantear el problema escribiendo la Segunda Ley de Newton

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x}$$

y entendiendo que $x = x(t)$ es una función de t desconocida. Esta ecuación, que tiene como *incógnita* a la *función* $x(t)$ y que involucra tanto a la función desconocida como a sus derivadas, se llama *ecuación diferencial.*

Hay muchos tipos de ecuaciones diferenciales, y según sus características existen distintas técnicas para resolver algunos tipos; otras ecuaciones no se saben resolver y son objeto de investigación. Por eso es útil clasificarlas. En nuestro caso se dice que:

- la ecuación diferencial es *ordinaria* porque la función incógnita es función de una sola variable
- la ecuación diferencial es de *segundo orden* porque involucra hasta derivada segunda.
- la ecuación diferencial es *lineal* porque tanto la función como sus derivadas aparecen en una forma lineal ("con exponente 1")

- la ecuación diferencial es *homogénea* porque la forma lineal no tiene "término independiente"
- la ecuación diferencial admite *forma normal* porque se puede despejar la derivada de mayor orden,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x$$

En este tipo de ecuaciones se sabe que existe una familia de *infinitas soluciones*, que se escriben como funciones de la variable t con *dos parámetros libres.* El conjunto de todas las soluciones se llama *solución general.* Cuando se les da determinado valor a los parámetros libres se selecciona una *solución particular* dentro de la familia de soluciones posibles.

No vamos a profundizar en la *técnica de solución* de este tipo de ecuaciones diferenciales. Solo vamos a contarles la forma de la solución general de una ecuación diferencial que se escribe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\,x \tag{3}$$

y verificar que realmente es solución. Es importante notar el signo $-$, y resulta útil más adelante llamar ω^2 al coeficiente de $x(t)$. En cada aplicación tendrán que relacionar ω^2 con el coeficiente que encuentren al plantear la Segunda Ley.

Dada la ecuación diferencial (3) con función incógnita $x(t)$, la solución general tiene la forma

$$x(t) = A\,\cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{4}$$

donde A y ϕ son constantes indeterminadas. Se entiende que ωt y ϕ representan ángulos en radianes.
El movimiento descripto por estas soluciones se llama *Movimiento Armónico Simple (MAS).*
A se conoce como *amplitud* del movimiento y ϕ se conoce como *fase inicial* del movimiento.

Verificación:

Dada la función $x(t)$, necesitamos calcular su derivada segunda (la aceleración de la partícula). Usando reglas de derivación[2] tenemos que

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\sin\left(\omega t + \phi\right) \tag{5}$$

y derivando nuevamente

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\,\cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{6}$$

Para verificar que cualquier función $x(t) = A\,\cos\left(\omega t + \phi\right)$ es solución de la ecuación diferencial (3) tenemos que comparar la derivada segunda con

$$-\omega^2\,x(t) = -\omega^2\,A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

Vemos que ambas expresiones son iguales para cualquier valor de la variable t, por lo tanto $x(t) = A\,\cos\left(\omega t + \phi\right)$ es una solución correcta. Esto es cierto para *cualquier* valor de A y para *cualquier* valor de ϕ.

Con esto probamos que las funciones del recuadro son solución. Para probar que esta familia de soluciones es la *solución general* habría que probar que no existe *otra* solución más que las ya escritas. Eso también se demuestra, pero no estamos en condiciones de discutirlo aquí.

Condiciones iniciales, ajuste de amplitud y fase inicial

Como anticipamos, la familia de soluciones tiene dos parámetros indeterminados. Esto es análogo al caso de encontrar soluciones de movimiento con aceleración constante; hay distintas posibilidades y la solución particular adecuada a un problema se encuentra a partir de las *condiciones iniciales* de posición x_0 y velocidad v_0 en un instante t_0 dado. En el MAS estas condiciones iniciales determinan los valores de la amplitud A y de la fase inicial ϕ.

Usando las expresiones de posición y velocidad que ya escribimos, en el tiempo inicial t_0,

$$\begin{cases} A\,\cos\left(\omega t_0 + \phi\right) = x_0 \\ -A\omega\,\sin\left(\omega t_0 + \phi\right) = v_0 \end{cases} \tag{7}$$

[2] Ver Clase 5.

Esto es un sistema de dos ecuaciones (no lineales) con dos incógnitas A y ϕ que debemos despejar. Conviene despejar primero seno y coseno de cada ecuación. Por un lado, elevando seno y coseno al cuadrado y sumando se obtiene

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \tag{8}$$

Por otro lado, haciendo el cociente de seno y coseno se obtiene

$$\tan(\omega t_0 + \phi) = \frac{v_0}{\omega x_0} \tag{9}$$

Estas expresiones permiten despejar A y ϕ (con el debido cuidado al tomar arcotangente que es multivaluado; recomendamos verificar calculando de nuevo x_0 y v_0 con la amplitud y fase obtenidas). En lugar de recordarlas, sugerimos plantear las condiciones (7) en cada caso particular y rehacer el despeje .

Observación: En muchos problemas no se precisan la posición y/o velocidad inicial, sino que se dan indicaciones para conocer directamente la amplitud A y la fase inicial ϕ. Deben acostumbrarse a interpretar los enunciados y la descripción usual del MAS.

Interpretación de las soluciones.

Para interpretar las funciones $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ es necesario que estén familiarizados con las gráficas de las funciones trigonométricas, y con algunas de sus propiedades.

Interpretación analítica

Recuerden que $\omega t + \phi$ es una medida angular en radianes; si no, no serían ciertas las reglas de derivación que utilizamos. Además, usando identidades trigonométricas se pueden reescribir muchas expresiones de maneras equivalentes. Las identidades de mayor utilidad en este tema probablemente sean la Pitagórica

$$\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi) = 1$$

y las que se desprenden de las fórmulas de seno y coseno de una suma[3] (o resta); por ejemplo

$$\cos(\omega t + \phi) = \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin(\omega t + \phi) = \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right);$$

se suele decir que seno y coseno están "desfasados" en $\pi/2$, y siempre se puede cambiar una expresión con seno por otra equivalente con coseno ajustando la fase inicial, y viceversa. Por eso, cuando nos parezca conveniente, podemos usar como solución del MAS una expresión $x(t) = A\sin\left(\omega t + \tilde{\phi}\right)$.

También podemos asumir que $\omega = \sqrt{\omega^2}$ siempre es positivo, sin perder generalidad, porque siendo el coseno una función par podemos escribir

$$\cos(-\omega t + \phi) = \cos(\omega t - \phi)$$

Aquí también el ajuste de la fase inicial se encarga de cambiar el signo de ω.

Para una interpretación analítica empecemos por destacar que la función coseno es periódica, con período 2π. Para la variable tiempo, esto implica que para cualquier n entero

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t + nT) + \phi)$$

siempre que $\omega T = 2\pi$. Es decir,

> El *período temporal* del movimiento armónico simple es
>
> $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
>
> Se expresa en unidades de tiempo.

Asociada al todo movimiento periódico se introduce la frecuencia, que mide la cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo:

[3] $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ y $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

La *frecuencia* del movimiento armónico simple es

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\omega$$

Se expresa en ciclos por unidad de tiempo.

La unidad de frecuencia del Sistema Internacional es el Hertz, $1\,Hz = 1$ ciclo$/s$. Recuerden que vimos estos conceptos en el movimiento circular uniforme, que también es un movimiento periódico.

La constante ω, que aparece en la ecuación diferencial del movimiento armónico simple, se llama *frecuencia angular*. Cabe recordar que

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Se expresa en radianes por unidad de tiempo.

Recuerden que la ecuación del MAS aparece en algunos sistemas al plantear la dinámica (la Segunda Ley de Newton u otros formalismos equivalentes). Por lo tanto la frecuencia angular ω **queda determinada por el sistema** que se estudia; por lo mismo, el período y la frecuencia quedan determinados por el sistema que se estudia. En cambio, la amplitud A y la fase inicial ϕ **quedan determinadas por condiciones iniciale**s; el mismo sistema físico puede oscilar con distintas amplitudes y fase inicial según cómo se lo inicie. Además, la fase inicial se puede manipular eligiendo el instante en que se inicia el cronómetro que mide el tiempo t (ver el comentario al final de esta clase).

Antes de pasar a los gráficos resolvamos un ejemplo:

Ejemplo 2: un bloque de masa m oscila unido a un resorte de constante k, sobre una superficie horizontal lisa. Si en un dado instante pasa por la posición de equilibrio con componente de velocidad $v_0 > 0$, escriban las funciones posición, velocidad y aceleración. Indiquen la frecuencia, período y amplitud del movimiento. Encuentren cuándo la velocidad es máxima y mínima, y cuándo la aceleración es máxima y mínima.

Usemos el esquema del ejemplo anterior. Contamos con un eje x con su origen en la posición de equilibrio. Usemos además un cronómetro que marca $t = 0$ en la situación descripta en el enunciado. Entonces el instante inicial es $t_0 = 0$ y conocemos la posición inicial $x_0 = 0$ y la velocidad inicial v_0.

La Segunda Ley de Newton nos dice que $m\,a = -kx$, luego $a = -(k/m)x$. De aquí reconocemos que se trata de un MAS y leemos por comparación que $\omega^2 = k/m$, es decir que la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{k/m} \tag{10}$$

que queda escrita en términos de los datos del problema.

La función posición puede escribirse $x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi)$ y la función velocidad como $v(t) = -A\omega\,\sin(\omega t + \phi)$. Evaluadas en $t_0 = 0$ tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = A\,\cos(\phi) = 0 \\ v_0 = -A\omega\,\sin(\phi) > 0 \end{cases}$$

Podemos ajustar las constantes con las expresiones (8 ,9). Otra manera (aconsejable) es resolver las condiciones iniciales en cada caso particular; en este caso vemos que $\cos(\phi) = 0$, luego $\phi = \pi/2$ o $\phi = 3\pi/2$. Si $\phi = \pi/2$, tendríamos $\sin(\phi) = 1$ y la velocidad inicial sería negativa, lo cual contradice el enunciado. Por lo tanto

$$\phi = \frac{3}{2}\pi$$

y $\sin(\phi) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$. Entonces la velocidad inicial cumple $A\omega = v_0$ y despejamos

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11}$$

que queda escrita en términos de los datos del problema. Con esto contestamos la amplitud y la fase inicial del movimiento.

Con el eje x y el cronómetro que utilizamos, la posición en función del tiempo resulta

$$x(t) = A\,\cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

con A y ω ya calculados en (10,11).

Usando el desarrollo del coseno de una suma, vemos que $\cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = \cos(\omega t)\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \sin(\omega t)\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(\omega t)$; podemos escribir la forma equivalente

$$x(t) = A\,\sin(\omega t)\,.$$

La velocidad en función del tiempo es la derivada de la posición; podemos usar la forma (5) o simplemente derivar:

$$v(t) = A\omega\,\cos(\omega t) = v_0\,\cos(\omega t)$$

donde usamos que $A = v_0/\omega$ (11).

La aceleración en función del tiempo es la derivada de la velocidad; podemos usar la forma (6) o simplemente derivar:

$$a(t) = -v_0\omega\,\sin(\omega t)$$

La velocidad es máxima cuando $\cos(\omega t) = 1$ y vale $v_0 > 0$ (en el sentido del eje x) ; esto sucede periódicamente, cada vez que $\omega t = n2\pi$ con n entero. La velocidad es mínima cuando $\cos(\omega t) = -1$ y vale $v = -v_0 < 0$ (en el sentido contrario al eje x); esto sucede periódicamente, cada vez que $\omega t = \pi + n2\pi$ con n entero. En ambos casos el módulo de la velocidad es máximo y vale v_0.

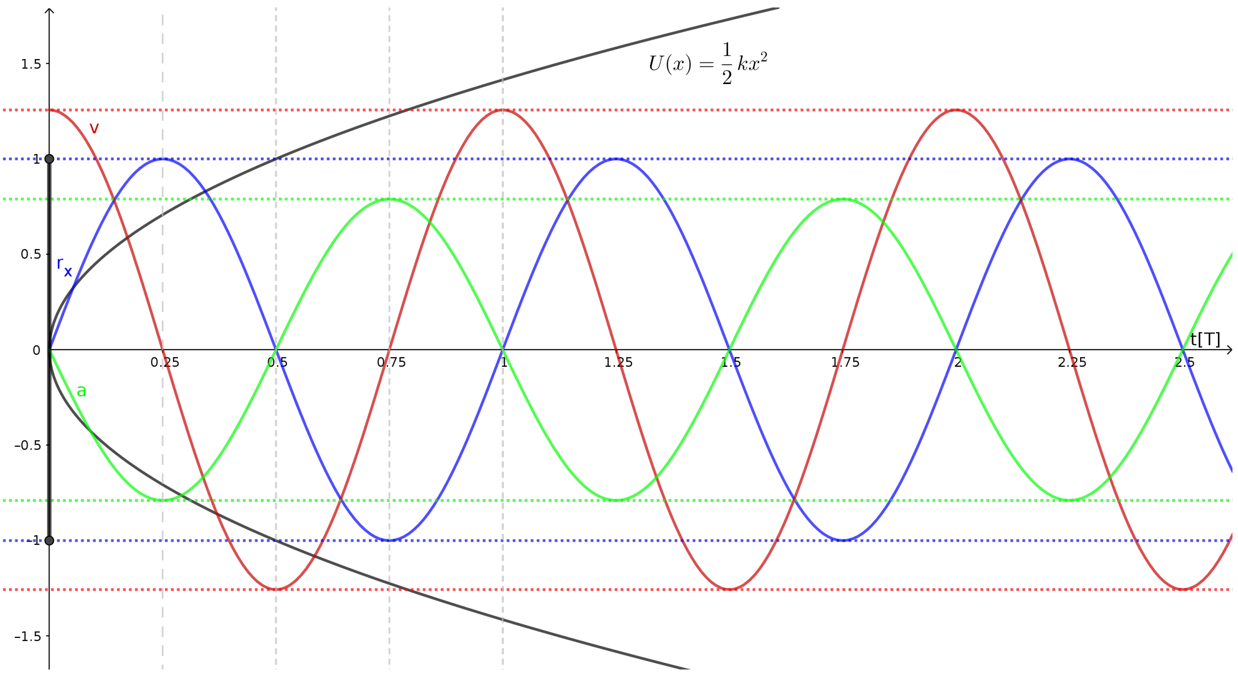
La aceleración es máxima, con valor $a_{\max} = v_0\omega$, cuando $\sin(\omega t) = -1$; esto sucede periódicamente, cada vez que $\omega t = 3\pi/2 + n2\pi$ con n entero. Observen que la posición es $x = -A$ en ese momento. La aceleración es mínima, con valor $a_{\min} = -v_0\omega$, cuando $\sin(\omega t) = 1$; esto sucede periódicamente, cada vez que $\omega t = \pi/2 + n2\pi$ con n entero, y la partícula se encuentra en el otro punto de retorno, $x = A$.

El período del movimiento es $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$, y la frecuencia es su inversa, $\nu = 1/T = \sqrt{k/m}/(2\pi)$.

Noten que para resolver el ejemplo no utilizamos directamente un conjunto de fórmulas, sino que razonamos las relaciones que nos llevan a esas fórmulas. Esperamos que trabajen así en la práctica, justificando todos los procedimientos.

Interpretación gráfica

Concretamente, grafiquemos las funciones posición, velocidad y aceleración del ejemplo 2 (les muestro gráficos de GeoGebra, eligiendo valores para los datos).



- En el eje horizontal se representa el tiempo, en unidades del período (1 significa un período, etc.; se marcan en gris las cuartas partes del primer período).

- En azul está graficada la posición $x(t)$. Sobre el eje vertical se dibuja un segmento (en negro) que representa la trayectoria, entre los dos puntos de retorno $x = A$ y $x = -A$; estos valores se proyectan en azul punteado para apreciar que la posición alcanza los puntos de retorno repetidas veces. Está superpuesta la energía potencial $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ para apreciar los puntos de retorno (comparen con el gráfico del ejemplo 1, ustedes pueden agregar la energía mecánica). La partícula comienza en $x = 0$ yendo hacia x positivos, ganando energía potencial y perdiendo energía cinética hasta que se detiene en $x = A$ cuando $t = T/4$. Luego vuelve hasta el origen recuperando energía cinética hasta que $t = T/2$. Luego pasa a x negativos hasta detenerse en $x = -A$ cuando $t = 3T/4$. Finalmente se mueve desde $x = -A$ hasta el origen y *recupera su posición y velocidad inicial* cuando $t = T$. A partir de ese instante el movimiento se repite.

- En rojo está graficada la posición $v(t)$ (en una escala diferente, no se puede comparar velocidad con posición. Se observa que la velocidad es cero cada vez que la posición es $x = A$ o $x = -A$, indicando que no hay energía cinética justo cuando es máxima la energía potencial. Cuando $t = T/2$ la partícula recupera su posición inicial pero la velocidad es negativa; claramente volver por primera vez a la posición inicial no completa un período. Observen en general que la velocidad mide la pendiente del gráfico de posición.

- En verde está graficada la aceleración $a(t)$. Observen en general que la aceleración mide la pendiente del gráfico de velocidad, y la concavidad del gráfico de posición. Obviamente el movimiento tiene aceleración variable (comparen con MRU y MRUV, donde la aceleración era constante). Se observa, como corresponde, que la aceleración siempre tiene signo opuesto a la posición: la fuerza restauradora provoca una aceleración negativa cuando la posición es positiva, y una aceleración positiva cuando la posición es negativa.

Fase inicial y traslación en el tiempo

Para terminar la clase, recordemos que una función $g(x) = f(x - a)$ tiene el "mismo" gráfico que $f(x)$, pero trasladado una distancia a hacia los x positivos.

En ese sentido, la fase inicial implementa una traslación de las funciones posición, velocidad y aceleración en el eje de la variable t. Por ejemplo, podemos escribir la función posición como

$$x(t) = A\,\cos(\omega t + \phi) = A\,\cos[\omega\,(t + \phi/\omega)]$$

La gráfica de $x(t)$ (con fase inicial) es como la de $A\,\cos(\omega t)$ (sin fase inicial) trasladada un tiempo $\Delta t = \phi/\omega$ hacia atrás. La misma traslación registran las respectivas derivadas primera y segunda.

Esta observación los puede ayudar a graficar la posición, velocidad y aceleración en un caso particular a parir de recordar el caso con fase inicial cero. También nos muestra que *siempre se puede poner la fase inicial en cero,* refiriendo el movimiento a un cronómetro "trasladado", corrido un Δt adecuado.