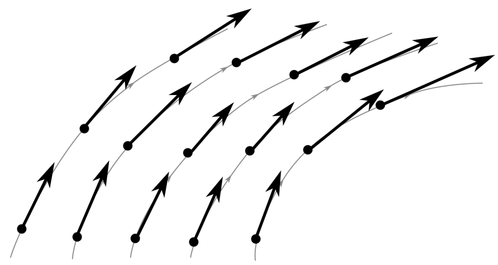
Clase 17: Fuerzas conservativas y energía potencial

22 de mayo de 2020

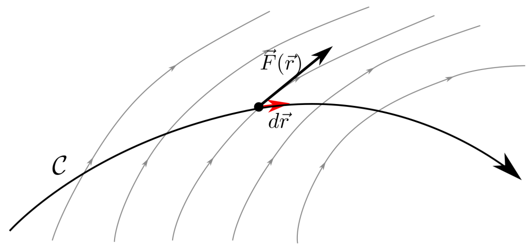
Repaso de la definición de trabajo mecánico

Después de conversar con ustedes la clase 15, me pareció conveniente resumir la noción de trabajo mecánico (realizado por una cierta fuerza sobre una partícula a lo largo de determinada trayectoria). Aprovechando que ya introdujimos todo lo necesario, intento darles una descripción menos técnica y más intuitiva.

Consideremos un partícula que recorre una trayectoria $\mathcal{C}$ desde un punto A hasta un punto B, en una región del espacio donde actúa un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. En primer lugar vamos a visualizar el campo de fuerzas con un recurso gráfico: se dibujan *líneas de fuerza* como líneas (curvas en general) que acompañan la dirección de las fuerzas en cada punto del espacio. Como ejemplo, dibujemos las fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ en distintos puntos $\vec{r}$ y las líneas de fuerza correspondientes



En segundo lugar dibujemos la trayectoria pasando por la región donde actúa el campo de fuerzas, que representamos por las líneas de campo. Ubiquemos la partícula en algún punto de la trayectoria y dibujemos la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ que siente en ese lugar:



En cada desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ de la partícula decimos que la fuerza realiza un diferencial de trabajo definido como

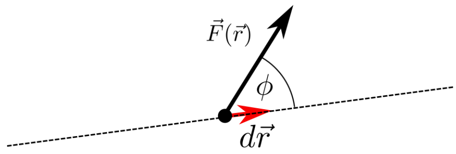
$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

es decir el producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento (infinitesimal). Recordemos que el producto escalar se puede calcular de dos maneras: por módulos y ángulo y por componentes.

En términos de módulos y ángulo

$$dW_{\vec{F}} = |\vec{F}(\vec{r})| \cos(\phi)\, dl$$

donde $dl = |d\vec{r}|$ es la distancia (infinitesimal) recorrida y ϕ es el ángulo que forma la fuerza con la dirección del desplazamiento (que a veces llamamos dirección del movimiento).

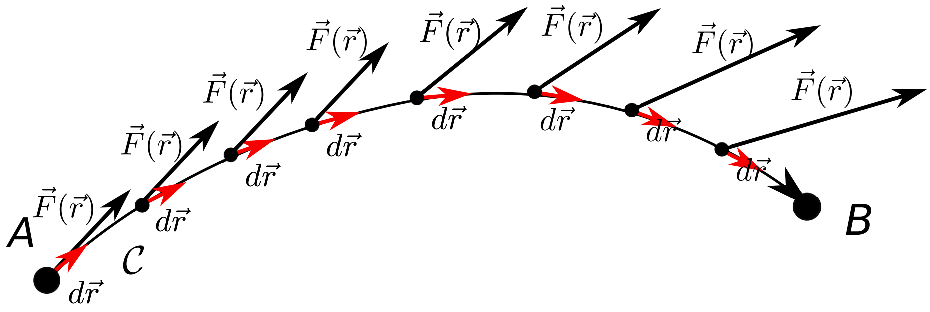


En esta forma se reconoce fácilmente que $dW_{\vec{F}}$ puede tener signo positivo, nulo o negativo según el ángulo ϕ esté en primer cuadrante, sea recto o esté en segundo cuadrante. Y que en valor absoluto no puede ser mayor que $|\vec{F}(\vec{r})|\,dl$.

En términos de componentes

$$dW_{\vec{F}} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

El trabajo $W_{\vec{F},\mathcal{C}}$ realizado por la fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ sobre la partícula a lo largo de la trayectoria $\mathcal{C}$ completa es la suma de los $dW_{\vec{F}}$ realizados en cada tramo infinitesimal. Simbolicemos la suma dibujando varias contribuciones $dW_{\vec{F}}$:



Esta suma, hecha en el límite en que los desplazamientos infinitesimales tienden a cero, es la integral de línea que se escribe

$$W_{\vec{F},\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

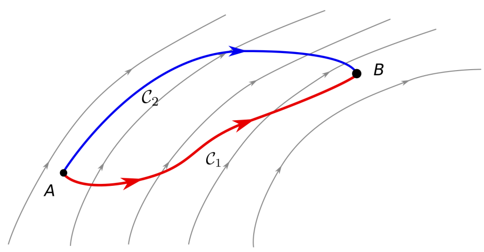
Técnicamente, esta integral se desarrolla parametrizando la curva con alguna función $\vec{r}(u)$, con un parámetro $u \in [u_0, u_f]$. Pero en casos sencillos, como tenemos en nuestra práctica, podemos hacerla "con las manos" a partir de un buen dibujo y consideraciones de geometría. Un primer ejemplo (que ya hemos hecho) es el cálculo del trabajo de una fuerza constante en una trayectoria recta. Otro ejemplo es el caso en que la fuerza se mantiene siempre perpendicular a la trayectoria (incluso cuando la trayectoria sea curva), y el trabajo suma cero.

Para terminar este repaso vamos a recordar que el trabajo mecánico en general depende de la forma de la trayectoria. Si dos distintas curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ empiezan en el mismo punto A y terminan en el mismo punto B, en general es de esperar que

$$W_{\vec{F},\mathcal{C}_1} \neq W_{\vec{F},\mathcal{C}_2}$$

En general,

$$W_{\vec{F},\mathcal{C}_1} \neq W_{\vec{F},\mathcal{C}_2}$$



Ejemplo: comparen los ejercicios 6-b y 7 de la práctica 7.

Campos de fuerzas conservativas

Algunos campos de fuerzas, no todos, tienen una propiedad que los destaca. Esos campos de fuerzas se llaman conservativos.

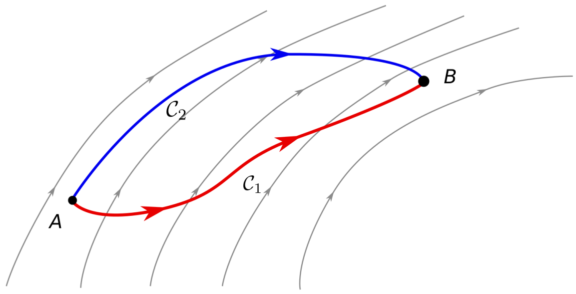
> Se dice que un campo de fuerzas $\vec{F}_c(\vec{r})$, definido en cierta región del espacio, es *conservativo* si el trabajo que realiza sobre una partícula depende solamente del punto inicial y del punto final de la trayectoria.

Es decir, un campo de fuerzas es conservativo si para cualesquiera curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ distintas que empiezan en el mismo punto A y terminan en el mismo punto B, se verifica que

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Fuerza Conservativa

$$W_{\vec{F}_c,\mathcal{C}_1} = W_{\vec{F}_c,\mathcal{C}_2} = W_{\vec{F}_c,A\to B}$$



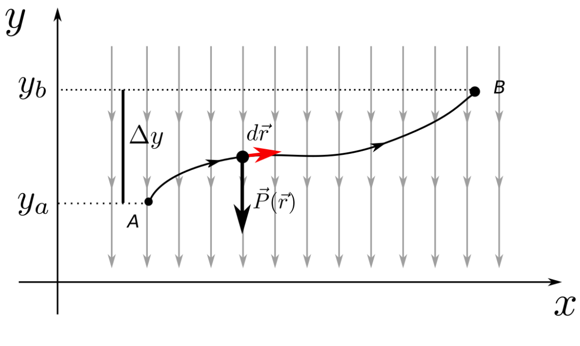
En ese caso se puede usar una notación que indique el punto inicial y el punto final, sin especificar la curva. Por ejemplo

$$\boxed{W_{\vec{F}_c,A\to B} = \int_A^B \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

De hecho, para una fuerza conservativa el valor de la integral se puede calcular sobre cualquier curva (se aconseja elegir la más sencilla para hacer el cálculo, aunque no sea la trayectoria real).

Ejemplo: Campo de fuerzas constante

Tomemos ejemplo un caso importante: la fuerza peso de una partícula de masa m en una posición $\vec{r}$, en una región donde podamos considerar que el peso $\vec{P}(\vec{r}) = m\vec{g}$ es constante.



Si nos quedamos en un plano xy, con los ejes tomados como en el dibujo, tenemos que $\vec{r} = x\,\check{\imath} + y\,\check{\jmath}$ y $\vec{P}(\vec{r}) = 0\,\check{\imath} - mg\,\check{\jmath}$. Cuando la partícula hace un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r} = dx\,\check{\imath} + dy\,\check{\jmath}$ el peso realiza un diferencial de trabajo

$$dW_{\vec{P}} = \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -mg\,dy$$

Cuando la partícula se desplaza desde $\vec{r}_A = x_A\,\check{\imath} + y_A\,\check{\jmath}$ hasta $\vec{r}_B = x_B\,\check{\imath} + y_B\,\check{\jmath}$ por un camino genérico $\mathcal{C}$,

$$W_{\vec{P},\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} -mg\,dy = -mg\int_{\mathcal{C}} dy = -mg\Delta y = -mg(y_B - y_A)$$

Está a la vista que el resultado no depende del camino, cualquier camino entre A y B nos da el mismo resultado. Es decir, *la fuerza peso (constante) es un campo de fuerzas conservativo*. Podemos olvidar la curva y anotar

El trabajo de la fuerza peso sobre una partícula al ir desde A hasta B es

$$W_{\vec{P},A\to B} = -mg(y_B - y_A)$$

(usando un eje y vertical y positivo hacia arriba).

Un resultado similar es válido para cualquier campo de fuerzas constante.

Un campo de fuerzas constante es conservativo, el trabajo que realiza sobre una partícula al ir desde A hasta B es

$$W_{\vec{F}_c,A\to B} = \vec{F}_c \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

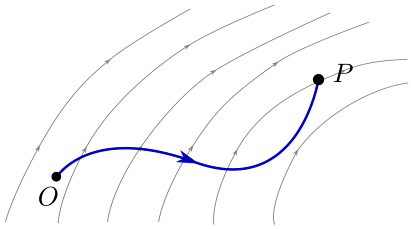
Propiedades de un campo de fuerzas conservativo

Como ya vimos, en un campo de fuerzas conservativo el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula depende solo del punto inicial y del punto final de la curva recorrida. Además,el resultado en una magnitud escalar. Por lo tanto, podemos expresarlo como un *función escalar de la posición*. Veamos cómo construir esa función.

Definición: en una región del espacio donde exista un campo de fuerzas conservativo $\vec{F}_c(\vec{r})$, vamos a elegir un *punto de referencia* fijo, digamos un punto O con posición $\vec{r}_0$ en nuestro sistema de coordenadas y calcular el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula va desde el punto de referencia O hasta otro punto, digamos P con posición $\vec{r}$. Ahora que el punto inicial $\vec{r}_0$ está fijo, el resultado depende solo de $\vec{r}$; se puede escribir el trabajo como una función escalar de la posición $\vec{r}$:

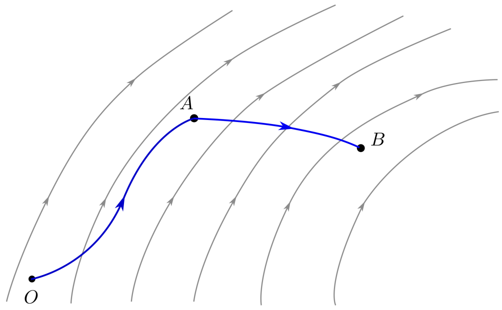
$$W_c(\vec{r}) = W_{\vec{F}_c,\vec{r}_0\to\vec{r}} = \int_O^P \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{1}$$

Noten que esto no se puede hacer en general, cuando el trabajo dependa de la trayectoria; solo tiene sentido para campos conservativos.



$W_c(\vec{r}) = \int_O^P \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Propiedad: el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula cuando va desde cualquier punto A con posición $\vec{r}_A$ hasta cualquier otro punto B con posición $\vec{r}_B$ se puede calcular en forma sencilla usando esta función $W_c(\vec{r})$. El truco está en usar caminos apropiados, aprovechando que la fuerza es conservativa y nos da la libertad de elegir los caminos.



Eligiendo un camino que empieza en O, pasa por A y luego sigue hasta B podemos separar la integral desde O hasta B en dos tramos

$$\int_O^B \vec{F}_c(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_O^A \vec{F}_c(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}_c(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

usando la propiedad de aditividad respecto del camino (que no es otra cosa que la propiedad asociativa de la suma, agrupando términos del primer tramo y del segundo tramo). Despejando la integral entre A y B y usando la definición de $W_c(\vec{r})$ tenemos que

$$\int_A^B \vec{F}_c(\vec{r})\cdot d\vec{r} = W_c(\vec{r}_B) - W_c(\vec{r}_A)$$

o bien

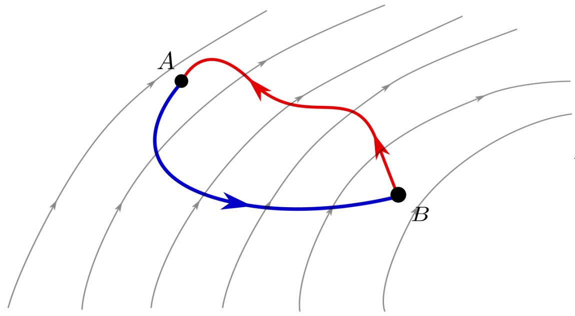
$$W_{\vec{F}_c,A\to B} = W_c(\vec{r}_B) - W_c(\vec{r}_A) \tag{2}$$

Noten que *si calculamos una vez la función* $W_c(\vec{r})$ y recordamos su expresión, luego *el cálculo del trabajo se reduce a una simple resta.*

Propiedad: una característica fundamental de los campos de fuerzas conservativos es que *el trabajo de una fuerza conservativa es reversible.* Con esto queremos decir que el trabajo realizado al ir desde A hasta B es "menos" el trabajo realizado al volver desde B hasta A2

$$W_{\vec{F}_c,B\to A} = -W_{\vec{F}_c,A\to B} \tag{3}$$

Este resultado se desprende de la ecuación (2), cambiando el rol inicial o final de lo puntos A y B.



$$W_{\vec{F}_c,B\to A} = -W_{\vec{F}_c,A\to B}$$

En los cursos de Matemática la función $W_c(\vec{r})$ se llama *función potencial del campo conservativo*, es un tema de Análisis Matemático II. En nuestro curso de Mecánica es conveniente usar otra convención, cambiándole el signo a la función potencial. Eso nos permite interpretarla como una forma de energía.

Propiedad: la función potencial $W_c(\vec{r})$ se podría definir con un punto de referencia distinto, digamos un punto O^* con posición $\vec{r}_0^*$. Sería otra función, llamémosla $W_c^*(\vec{r})$. Como podemos elegir la trayectoria desde O^* hasta P de forma tal que pase por O, vemos que

$$\int_{O^*}^{P} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{O^*}^{O} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{O}^{P} \vec{F}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

La nueva función $W_c^*(\vec{r})$ es igual a $W_c(\vec{r})$ más una constante: el valor del trabajo realizado desde O^* hasta O.

$$W_c^*(\vec{r}) = W_c(\vec{r}) + W_{\vec{F}_c, O^* \to O}$$

Para calcular trabajo como restas podemos usar cualquier versión, porque esta constante se cancela,

$$W_{\vec{F}_c, A\to B} = W_c(\vec{r}_B) - W_c(\vec{r}_A) = W_c^*(\vec{r}_B) - W_c^*(\vec{r}_A)$$

Se dice que la función potencial está definida "a menos de una constante aditiva".

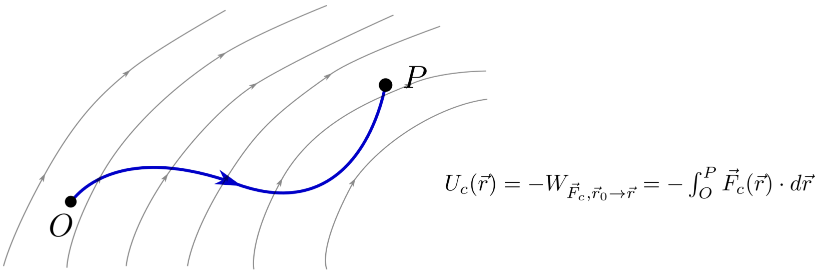
Energía potencial asociada a una fuerza conservativa

Estamos en condiciones de definir la energía potencial asociada a una fuerza conservativa.

Cuando una partícula se ubica en una región del espacio donde exista un campo de fuerzas conservativo $\vec{F}_c(\vec{r})$ que actúa sobre ella, y dado un *punto de referencia* fijo $\vec{r}_0$, se define la *energía potencial* asociada a la fuerza $\vec{F}_c(\vec{r})$, con respecto al punto $\vec{r}_0$, como la función escalar $U_c(\vec{r})$, dada por

$$U_c(\vec{r}) = -W_{\vec{F}_c, \vec{r}_0 \to \vec{r}} \tag{4}$$

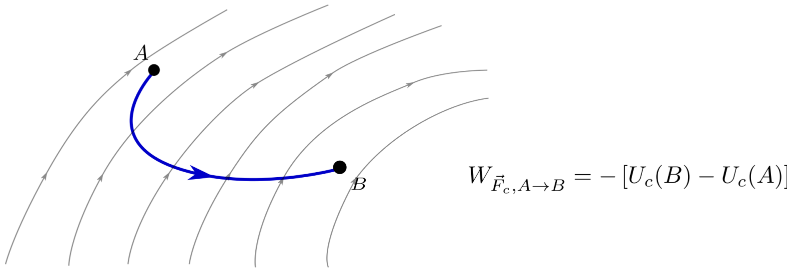
Esto es, el valor del trabajo realizado por la fuerza al llevar a la partícula desde un punto O de posición fija $\vec{r}_0$ hasta el punto P de posición $\vec{r}$, pero cambiado de signo.



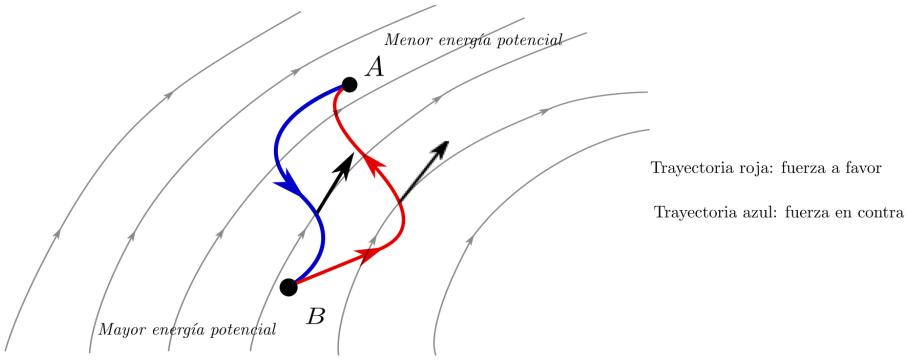
La energía potencial asociada a la fuerza conservativa es como la función $W_c(\vec{r})$ de la ecuación (1), pero cambiada de signo. Por lo tanto, podemos traducir todas las propiedades ya vistas al lenguaje de energía potencial. En particular,

Propiedad: el trabajo realizado por la fuerza conservativa sobre la partícula cuando va desde cualquier punto A con posición $\vec{r}_A$ hasta cualquier otro punto B con posición $\vec{r}_B$ se puede calcular como "menos" la variación de energía potencial:

$$W_{\vec{F}_c, A\to B} = -\left[U_c(\vec{r}_B) - U_c(\vec{r}_A)\right] \tag{5}$$



Para interpretar esta función $U_c(\vec{r})$ como una forma de energía vamos a hacer algunas observaciones. Aunque una fuerza es, como siempre, una interacción entre dos cuerpos, con el lenguaje estamos distinguiendo a la partícula como protagonista: es el cuerpo que "siente" la fuerza y también el que "tiene" energía cinética. En el mismo tono, se suele decir que una partícula, al cambiar de posición en un campo conservativo, "gana" o "pierde" energía potencial.[1] Para seguir estos razonamiento es muy útil tener presentes las líneas de fuerza.



- Según la definición, si al llevar a la partícula desde A hasta B (por ejemplo siguiendo la trayectoria azul) la fuerza conservativa hace trabajo negativo, "en contra del movimiento", la energía potencial de la partícula aumenta. Se interpreta que la fuerza conservativa, mientras tiende a quitar energía cinética, va acumulando energía potencial en la partícula. En otras palabras, "transforma" energía cinética en energía potencial.
- Siguiendo el ejemplo, si la partícula vuelve desde B hasta A (por ejemplo siguiendo la trayectoria roja) la fuerza conservativa hace trabajo positivo, "a favor del movimiento". Mientras tiende a entregar energía cinética, va consumiendo su energía potencial. En otras palabras, "transforma" energía potencial en energía cinética.
- Según la ecuación (5), el trabajo de la fuerza conservativa es reversible. La cantidad de energía potencial que se acumula al ir en contra de la fuerza conservativa es exactamente igual a la energía potencial que se consume para volver al punto inicial. En el dibujo lo ilustramos con la trayectoria azul y la trayectoria roja; por supuesto, siendo la fuerza conservativa, estas afirmaciones son independientes del camino real recorrido.
- En términos más geométricos, cuando la partícula se desplaza desde un punto A "en contra" del campo de fuerza conservativo, hasta un punto B, decimos que la partícula llega a una zona de mayor energía potencial. Y cuando se desplaza desde B hacia A, "a favor" del campo de fuerza, va a una zona de menor energía potencial.

Elección del punto de referencia y ambigüedad de la definición de energía potencial

La definición de energía potencial dada en la ecuación (4) depende del punto de referencia $\vec{r}_0$. Y su elección es arbitraria. Es decir, podemos definir distintas funciones energía potencial.

Notemos que en el punto de referencia $\vec{r}_0$ la energía potencial definida en la ecuación (4) vale cero, $U(\vec{r}_0) = 0$. Se suele decir que ese punto es "el cero de la energía potencial" que estamos utilizando.

Si elegimos otro punto $\vec{r}_0^*$, construiremos una función distinta para la energía potencial

$$U_c^*(\vec{r}) = -W_{\vec{F}_c,\vec{r}_{0^*}\to\vec{r}} = U_c(\vec{r}) - W_{\vec{F}_c,O^*\to O}$$

pero la diferencia es una constante ($-W_{\vec{F}_c,O^*\to O}$ que no depende de $\vec{r}$). Esta nueva definición de energía potencial es igualmente válida, con la característica de valer cero en $\vec{r}_0^*$.

Como comentamos, se puede generar toda una familia de funciones energía potencial con solo cambiar el punto $\vec{r}_0$. Que difieren entre sí por la suma (o resta) de un valor constante. En este sentido se dice que *la*

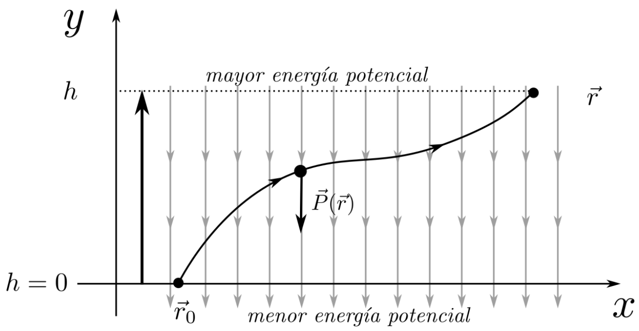
[1]Desde un punto de vista sistémico, se diría que *el sistema de partículas en interacción* "gana" o "pierde" energía potencial, según la posición relativa de sus distintas partes.

energía potencial está definida a menos de una constante aditiva. Esa constante se puede fijar eligiendo dónde la energía potencial vale cero. Así calibramos nuestra escala de energía potencial, es análogo a ubicar el cero de una regla antes de medir una longitud.

La ambigüedad en la definición de energía potencial es físicamente irrelevante en todas las aplicaciones. Veremos que la cantidad importante es la *diferencia de energía potencial* entre dos puntos. Al calcular diferencias una constante aditiva se cancela: *las diferencias de energía potencial se mantienen invariantes si usamos* $U_c^*(\vec{r})$ *en lugar de* $U_c(\vec{r})$.

Energía potencial gravitatoria

Como ejemplo de lo anterior veamos la *energía potencial gravitatoria* de una partícula de masa m, es decir la energía potencial asociada a la fuerza conservativa peso. Lo hacemos en regiones en que el peso se mantiene constante[2], $\vec{P} = m\vec{g}$.



Para definir la función energía potencial gravitatoria $U_g(\vec{r})$ vamos a usar un sistema de coordenadas como el de la figura, con el eje y positivo hacia arriba a partir de una altura de referencia que llamamos $h = 0$. Entonces,

$$\boxed{U_g(\vec{r}) = -W_{\vec{P},\vec{r}_0\to\vec{r}} = mgh}$$

Cuando la partícula se traslada a un punto de mayor altura "gana" energía potencial, en tanto que el peso le hace un trabajo negativo. Y cuando la partícula se traslada a un punto de menor altura "pierde" energía potencial, en tanto que el peso le hace un trabajo positivo.

Observen que la energía potencial puede ser negativa. Simplemente significa que la partícula está en un punto de menor energía potencial que la del punto de referencia. En este caso gravitatorio, si la partícula está por debajo del nivel elegido como $h = 0$ su energía potencial gravitatoria es negativa. Nunca olviden avisar dónde están poniendo el cero de la energía potencial.

Aplicación: con la expresión de $U_g(\vec{r})$ podemos calcular el trabajo que hace la fuerza peso sobre un cuerpo cuando se eleva desde una altura h_1 hasta otra altura h_2 (comparen con el ejemplo 1 de la clase 15). Usando la relación entre trabajo de la fuerza conservativa y variación de la energía potencial (ecuación 5)

$$W_{\vec{P},x_1\to x_2} = -\left[U_g(h_2) - U_g(h_1)\right] = mgh_1 - mgh_2 = -mg\Delta h$$

Obtenemos el mismo resultado que en la clase 15; aquella vez resolvimos la integral de trabajo y esta vez solo tuvimos que recordar la expresión de la energía potencial y hacer una resta.

Como comentamos antes, el resultado es el mismo si ubicamos el cero de energía potencial a cualquier altura; el trabajo realizado siempre se relaciona con la variación de energía potencial y en este caso depende de la diferencia de alturas.

[2]El campo gravitatorio en toda escala, dado por la Ley de Gravitación Universal, también es conservativo. Es tema de Física II.

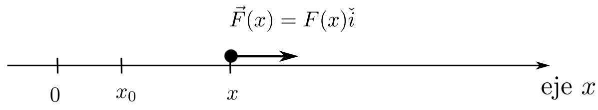
Campos de fuerza en una dimensión

En esta sección vamos a analizar el caso de una partícula que solamente se mueve sobre una recta, bajo la acción de una fuerza que depende de la posición pero solo tiene componente en la dirección del movimiento. Es decir, nos restringimos a un problema en una dimensión. Como sistema de coordenadas usamos x en la dirección del movimiento (en las aplicaciones puede ser horizontal, vertical o inclinado). Como es un caso relativamente sencillo, podremos analizarlo con mucha generalidad. En particular, podremos aplicar herramientas de Análisis Matemático I.

Una fuerza que depende de la posición en una dimensión se puede escribir como

$$\vec{F}(x) = F(x)\check{i}$$

donde tenemos que aclarar que $F(x)$ es la componente x de la fuerza, no confundir con el módulo. Por lo tanto puede ser positiva, negativa o nula (podríamos llamarla F_x, pero en problemas unidimensionales sería recargar la notación).



Como el movimiento está restringido a la recta, para ir de un punto A a otro punto B *hay un solo camino posible*. El trabajo de la fuerza $F(x)$ sobre la partícula es único, no cabe la posibilidad de hacerlo por distintos caminos. Por este motivo se considera que *cualquier campo de fuerzas unidimensional es conservativo*, y *tiene asociada una energía potencial* $U(x)$.

Tomando un punto de referencia x_0, la energía potencial queda definida como

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' \tag{6}$$

En la integral usamos la notación x' para distinguir el punto de integración (el que vamos moviendo para hacer la integral) de la posición real x de la partícula. Es la notación usual, no confundan x' con una derivada.

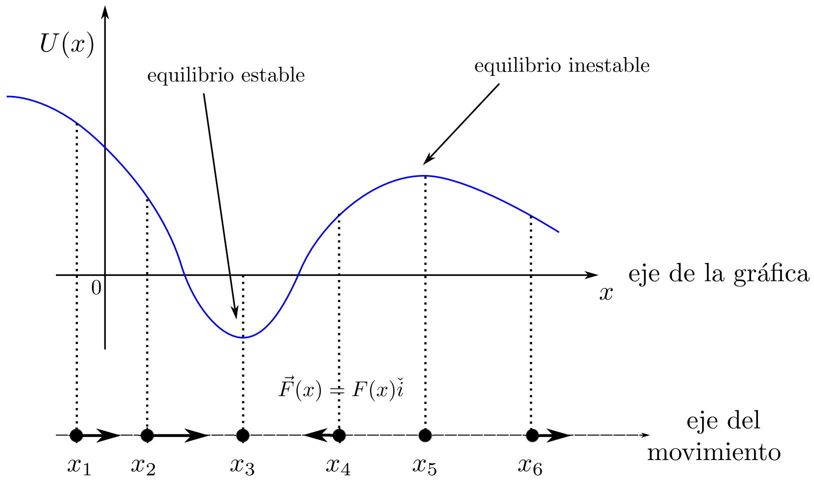
El valor de $U(x)$ depende de x a través del límite superior de integración. Es importante comprender que cuando pasamos de un valor de x a otro valor más grande, estamos agregando contribuciones a la integral.

Si pensamos en un desplazamiento infinitesimal, pasando de x a $x + dx$, la energía potencial cambia porque agregamos un término infinitesimal en la suma: $dU = -F(x)\,dx$.

Según lo que resaltemos en el recuadro, cuando la fuerza tiene componente positiva y la partícula se desplaza en la dirección positiva del eje x se agregan a la energía potencial contribuciones $-F(x)\,dx$ negativas. En consecuencia, $U(x)$ es una función *decreciente cuando la fuerza tiene componente positiva.*

Análogamente, cuando la fuerza tiene componente negativa y la partícula se desplaza en la dirección positiva del eje x se agregan a la energía potencial contribuciones $-F(x)\,dx$ positivas. En consecuencia, $U(x)$ es una función *creciente cuando la fuerza tiene componente negativa.*

Este análisis nos permite relacionar la gráfica de la función $U(x)$ con la fuerza que actúa en cada punto. Es decir, mirando el crecimiento de la gráfica de $U(x)$ podemos visualizar la fuerza sobre la partícula. Miremos un ejemplo esquemático, suponiendo que $\vec{F}(x)$ es la única fuerza presente.



En la parte superior graficamos la función $U(x)$ y en la parte inferior representamos la partícula en distintas posiciones sobre el eje del movimiento. Describamos los puntos indicados en la figura:

- $U(x)$ es decreciente en x_1; cuando la partícula está allí, siente una fuerza hacia la derecha.
- $U(x)$ es decreciente en x_2, con más pendiente; cuando la partícula está allí, siente una fuerza hacia la derecha de mayor módulo
- $U(x)$ tiene un mínimo local en x_3; cuando la partícula está allí, no siente fuerza. Además, si se la aparta de ese lugar siente una fuerza que tiende a hacerla volver. Se dice que x_3 es un punto de *equilibrio estable.*
- $U(x)$ es creciente en x_4; cuando la partícula está allí, siente una fuerza hacia la izquierda.
- $U(x)$ tiene un mínimo local en x_5; cuando la partícula está allí, no siente fuerza. Pero si se la aparta de ese lugar siente una fuerza que tiende a hacerla alejar aún más. Se dice que x_5 es un punto de *equilibrio inestable.*
- $U(x)$ es decreciente en x_6; cuando la partícula está allí, siente una fuerza hacia la derecha.

Esta discusión se puede hacer más formal mencionando el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), que se ve en Análisis Matemático I. Aplicado a nuestra definición de energía potencial en una dimensión, el Teorema afirma que

Si el campo de fuerzas unidimensional $F(x)$ es una función continua, entonces la energía potencial $U(x)$ definida en (4) es una función derivable respecto de x. La derivada es

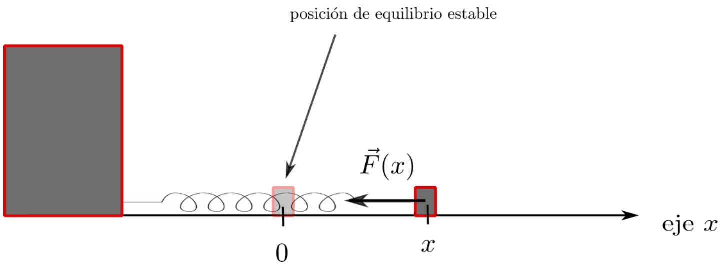
$$\frac{dU}{dx}(x) = -F(x)$$

En consecuencia el signo de dU/dx, que indica si $U(x)$ es creciente o decreciente, también indica para donde apunta la fuerza conservativa (en una dimensión). Además el valor de dU/dx nos da la intensidad de la fuerza conservativa.

Comentario matemático: El TFC dice lo que informalmente usamos más arriba. Si recuerdan el recuadro anterior, dijimos que $dU = -F(x)\,dx$ pensando en el incremento del valor de U. Por otro lado, el diferencial de $U(x)$, como el de cualquier función derivable, se escribe $dU = \frac{dU}{dx}\,dx$. Comparando las dos expresiones de dU vemos que efectivamente usamos $\frac{dU}{dx} = -F(x)$. Pero no hemos justificado que $U(x)$ sea derivable. El valor conceptual del Teorema Fundamental del Cálculo, por el cual amerita su nombre, es la demostración rigurosa de que una función construida como en la (1) o como en la (4) es derivable .

Energía potencial elástica

Como ejemplo de campo de fuerzas en una dimensión consideremos un bloque sujeto a un resorte ideal de constante k, apoyado en una superficie horizontal sin roce. El otro extremo del resorte está fijo a una pared.



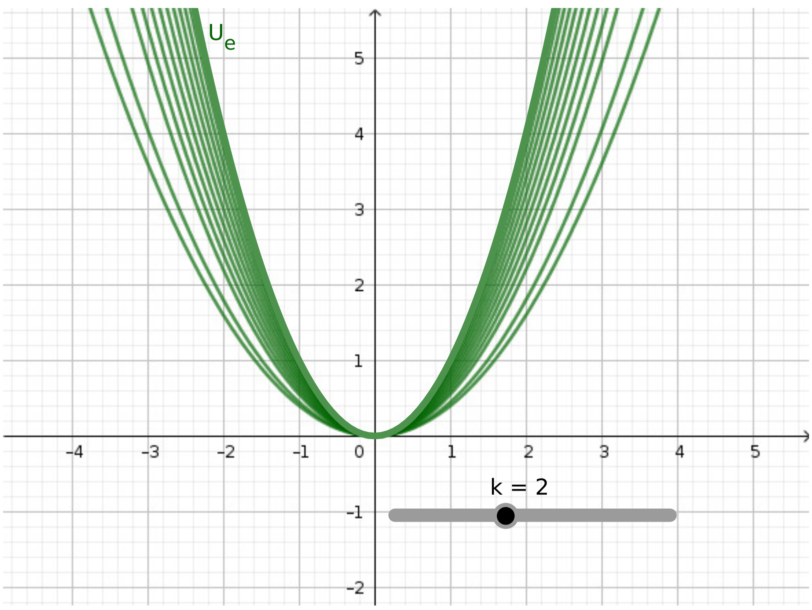
Usamos un eje x con el origen en el punto donde el resorte no hace fuerza sobre el bloque (longitud natural del resorte). Cuando el bloque se aparta de esa posición, hasta un punto x, el resorte le ejerce una fuerza restauradora, tendiente a regresarlo al punto $x = 0$. Según la ley de Hooke esa fuerza vale $\vec{F}(x) = F(x)\,\check{i}$ con

$$F(x) = -k\,x \tag{7}$$

Para calcular la energía potencial elástica $U_e(x)$ usamos la ecuación (6), *eligiendo como cero de la energía el punto* $x_0 = 0$. Encontramos que

$$\boxed{U_e(x) = -\int_0^x -kx'dx' = +k\frac{1}{2}\left[x'^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2}$$

La gráfica de esta función energía potencial es una parábola. Les copio un gráfico de GeoGebra, donde se ven las parábolas para distintos valores de la constate k.



Como era de esperar, el punto $x = 0$ es un punto de equilibrio estable; cuando el bloque se ubica con $x > 0$ la función U_e es creciente y la fuerza elástica apunta hacia el origen; cuando el bloque se ubica con $x < 0$ la función U_e es de creciente y la fuerza elástica también apunta hacia el origen.

Aplicación: con la expresión de $U_e(x)$ podemos calcular el trabajo que hace la fuerza elástica sobre el bloque cuando se desplaza desde una posición x_1 hasta otra posición x_2 (comparen con el último ejemplo de la clase 15). Usando la relación entre trabajo de la fuerza conservativa y variación de la energía potencial (ecuación 5)

$$W_{\vec{F},x_1\to x_2} = -\left[U_e(x_2) - U_e(x_1)\right] = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Obtenemos el mismo resultado que en la clase 15; aquella vez resolvimos la integral de trabajo y esta vez solo tuvimos que recordar la expresión de la energía potencial y hacer una resta.

Relaciones matemáticas en tres dimensiones (opcional)

En esta sección les dejo escritas:
- las condiciones matemáticas que permiten distinguir si un campo de fuerzas en dos o tres dimensiones espaciales es conservativo o no.
- las relaciones que generalizan la relación entre derivada de la energía potencial y valor de la fuerza conservativa al caso de tres dimensiones.

La teoría necesaria se ve en Análisis Matemático II.

Para escribir estas relaciones es conveniente mencionar un *operador diferencial en derivadas parciales,* actuando sobre funciones de tres variables x, y y z. Se lo conoce como *nabla* y se escribe

$$\vec{\nabla} = \check{i}\frac{\partial}{\partial x} + \check{j}\frac{\partial}{\partial y} + \check{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

donde $\dfrac{\partial}{\partial x}$ se lee "derivada parcial respecto de x" y se calcula como una derivada de una variable manteniendo y y z como constantes; análogamente las otras derivadas parciales.

Dado un campo de fuerzas $\vec{F}(x,y,z)$ se define su *rotor* como

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\check{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\check{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\check{k}$$

Propiedad: un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ es conservativo si y solo si su rotor se anula en un dominio simplemente conexo,

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0} \text{ en un dominio simplemente conexo}$$

(una región es simplemente conexa si cualquier curva cerrada se puede contraer continuamente hasta convertirse en un punto sin salirse de la región)

Dada una función escalar $U(x,y,z)$ (también llamada *campo escalar*) se define su *gradiente* como

$$\vec{\nabla}U = \check{i}\frac{\partial U}{\partial x} + \check{j}\frac{\partial U}{\partial y} + \check{k}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Cuando el campo es conservativo se define la energía potencial asociada $U(x,y,z)$ como en la ecuación (4).

Propiedad: la energía potencial $U(x,y,z)$ asociada a un campo de fuerzas conservativo continuo $\vec{F}(x,y,z)$, definida como

$$U(x,y,z) = -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{F}(x',y',z')\cdot(dx',dy',dz')$$

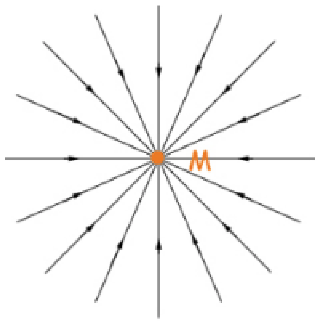
tiene derivadas parciales en todo punto se verifica

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Ejemplo: en la clase 15 escribimos el campo de fuerza gravitatoria sobre una partícula de masa m, generado por una partícula de masa M en el origen de coordenadas, como

$$\vec{F}_g(x,y,x) = -GMm_m \left(\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\,\check{\imath} + \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\,\check{\jmath} + \frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\,\check{k} \right)$$

Analizarán este campo de fuerzas en Física General II. Un esquema de líneas de fuerza se ve así:



Si quieren adelantar algunos cálculos, pueden verificar que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_g = \vec{0}$$

en todo punto del espacio, excepto en el origen $(0,0,0)$. Luego el campo gravitatorio es conservativo.

La energía potencial gravitatoria en un punto (x,y,z) se calcula respecto de un punto en el infinito como

$$\lim_{(x_0,y_0,z_0)\to\infty} -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \vec{F}(x',y',z')\cdot(dx',dy',dz')$$

El resultado es

$$U(x,y,z) = -GMm\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

que tiende a cero cuando la distancia al origen, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, tiende a infinito.

Si toman el gradiente de $U(x,y,z)$, y le cambian el signo, recuperan la expresión del campo de fuerzas.