Clase 16: Trabajo y Energía Cinética

18 de mayo de 2020

En esta clase vamos a integrar la Segunda Ley de Newton a lo largo de una trayectoria. Como resultado obtendremos el Teorema de Trabajo y Energía Cinética.

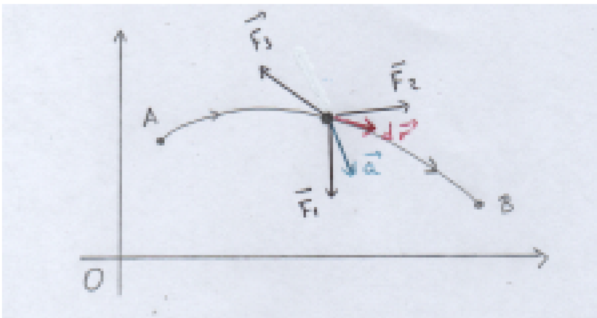
Integración de la Segunda Ley de Newton

Consideremos una partícula de masa m sobre la cual actúan una o más fuerzas $\vec{F}_i$, vista por un observador inercial. La Segunda Ley de Newton nos permite escribir la relación entre fuerzas y aceleración,

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

La partícula sigue un movimiento descripto por una función posición $\vec{r}(t)$. Si consideramos un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, la partícula describe una cierta trayectoria $\mathcal{C}$, entre un punto A dado por $\vec{r}(t_1)$ y un punto B dado por $\vec{r}(t_2)$.

Fijemos la atención en un punto genérico de la trayectoria (un valor del tiempo t y la correspondiente posición $\vec{r}(t)$). Dibujemos las fuerzas que actúan en ese instante y el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ asociado a un incremento tiempo infinitesimal dt,



Multiplicando escalarmente ambos miembros de la Segunda Ley por el desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ obtenemos

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Distribuyendo la sumatoria,

$$\sum_i \left(\vec{F}_i \cdot d\vec{r}\right) = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Sumando sobre todos los $d\vec{r}$ de la trayectoria (es decir, integrando desde el punto A hasta el punto B)

$$\sum_i \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = m \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Del lado izquierdo, por construcción, obtenemos la *suma de todos los trabajos realizados por las fuerzas actuantes sobre la partícula, a lo largo de la trayectoria $\mathcal{C}$.*

Para calcular el lado derecho usamos la parametrización natural $\vec{r}(t)$, con t en el intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} m\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} &= m\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt \\ &= m\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt \end{aligned}$$

Conviene aquí hacer una maniobra. Anotando $v(t)$ al módulo de la velocidad, hagamos la siguiente derivada:

$$\left(\frac{1}{2}v^2(t)\right)' = \left(\frac{1}{2}\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)\right)' = \frac{1}{2}\vec{v}\,'(t)\cdot\vec{v}(t) + \frac{1}{2}\vec{v}\,(t)\cdot\vec{v}\,'(t) = \vec{v}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)$$

Luego podemos reemplazar en nuestro cálculo $\vec{v}\,'(t)\cdot\vec{v}(t)$ por $\left(\frac{1}{2}v^2(t)\right)'$ y escribir

$$m\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} (v^2(t))'\,dt$$

Esto es la integral en el tiempo de una derivada respecto del tiempo; el resultado es inmediato (porque $(v^2(t))'\,dt$ es el diferencial de v^2, luego la integral es el incremento total de v^2),

$$\begin{aligned} m\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} &= \frac{1}{2}m\left[v^2(t)\right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) \end{aligned}$$

Llamando $W_{\vec{F}_i}$ al trabajo realizado por la fuerza i-ésima, $v_A = v(t_1)$ y $v_B = v(t_2)$ encontramos

$$\boxed{\sum_i W_{\vec{F}_i} = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2}$$

Energía cinética

La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$, que aparece naturalmente en la relación entre trabajo y velocidad, se llama energía cinética:

> Cuando un cuerpo de masa m se mueve con velocidad de módulo v, llamamos *energía cinética* del cuerpo a la cantidad
>
> $$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Cabe hacer algunos comentarios:

- La energía cinética es una magnitud escalar, y siempre $E_c \geq 0$.
- Las unidades de la energía cinética son
  $$\frac{[\text{masa}][\text{longitud}]^2}{[\text{tiempo}]^2}$$
  que coincide con las unidades de trabajo:
  $$\frac{[\text{masa}][\text{longitud}]^2}{[\text{tiempo}]^2} = \frac{[\text{masa}][\text{longitud}]}{[\text{tiempo}]^2}[\text{longitud}] = [\text{fuerza}][\text{longitud}]$$
  En el Sistema Internacional la energía cinética se mide en Joules.
- La energía cinética es una cantidad instantánea, se puede calcular en cada instante y en general varía con el tiempo.
- El valor de la energía cinética depende del observador. Dos observadores inerciales, en movimiento relativo, miden distintas velocidades para la misma partícula. En consecuencia miden distinta energía cinética[1].

[1] Excepto una casualidad: que las velocidades sean distintas pero tengan el mismo módulo.

Enunciado del Teorema de Trabajo y Energía Cinética

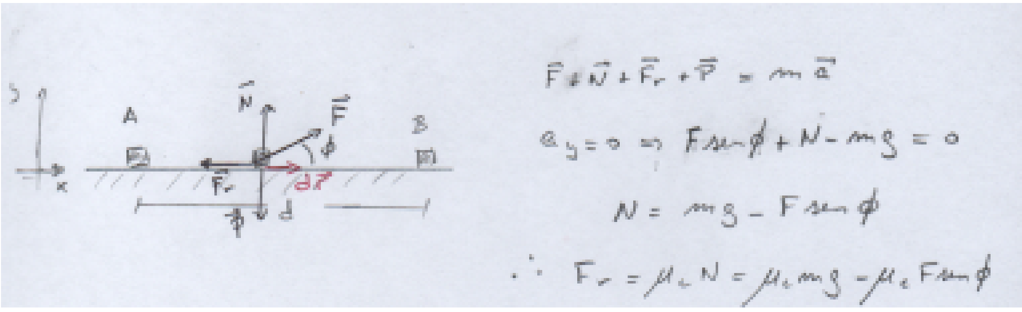
Con los cálculos desarrollados hemos demostrado el *Teorema de Trabajo y Energía Cinética*, que podemos enunciar de la siguiente manera:

> Un observador inercial ve que, en toda trayectoria que describa un cuerpo, la suma de los trabajos de las fuerzas aplicadas es igual a la variación de energía cinética entre el punto inicial A y el punto final B:
>
> $$\sum_i W_{\vec{F}_i} = \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A)$$

Para comprender su utilidad y darle interpretación intuitiva hagamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo: un bloque de masa m es arrastrado una distancia d sobre una superficie horizontal rugosa mediante una fuerza de módulo F que forma un ángulo ϕ con la dirección y sentido del movimiento. Si parte del reposo ($v_A = 0$), calculemos la velocidad final v_B.

Dibujemos un esquema y evaluemos las fuerzas que actúan



El trabajo realizado por la fuerza F es

$$W_F = F d \cos(\phi) > 0$$

El trabajo realizado por la fuerza de roce cinética, de módulo $F_R = \mu_c(mg - F\sin(\phi))$ y opuesta al movimiento, es

$$W_{F_R} = F_R\, d \cos(180^o) = -F_R d < 0$$

El trabajo realizado por el peso es nulo, porque el peso es perpendicular al desplazamiento

$$W_P = 0$$

Por la misma razón el trabajo de la normal es nulo,

$$W_N = 0$$

Ya podemos decir que el trabajo de la fuerza F, que es positivo, *aporta al aumento* de la energía cinética. En cambio el trabajo de la fuerza de roce, que es negativo, *aporta a la disminución* de la energía cinética. Además, las fuerzas que no hacen trabajo *no aportan al cambio* de la energía cinética. El Teorema nos dice que balance neto entre los aportes del trabajo de cada fuerza da lugar al cambio de la energía cinética:

$$F d \cos(\phi) - F_R d = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

En este caso la velocidad inicial es cero, la velocidad final se despeja

$$v_B = \sqrt{2\,(F d \cos(\phi) - F_R d)\,/m}$$

En esta expresión nuevamente se observa que la fuerza $\vec{F}$ da un término positivo que aporta a la velocidad final y que la fuerza de roce da un término negativo que hace que la velocidad final sea menor que en ausencia de roce.

Sugerencia: resuelvan el mismo problema con las técnicas de cinemática. Tendrán que calcular la aceleración, luego el tiempo necesario para recorrer la distancia d y finalmente evaluar la velocidad final. Con la técnica de trabajo y energía cinética el resultado se obtiene prácticamente en un renglón.

Comentario: transferencia de energía

Los trabajos mecánicos con signo positivo y negativo, y su relación con el cambio de energía cinética, se pueden interpretar como "entregar y quitar", "ganar o perder", o cualquier otro mecanismo de transferencia y contabilidad. Cuando una fuerza realiza trabajo positivo sobre un cuerpo, entrega energía a ese cuerpo; cuando una fuerza realiza trabajo negativo sobre un cuerpo, quita energía a ese cuerpo. En ese sentido el cuerpo (la materia) es capaz de acumular la energía recibida, y es capaz de devolverla cuando se la quitan.

Esta forma de razonar de permite una interpretación intuitiva de la energía, como un *bien que se transfiere*. Esta interpretación se completa cuando aprendemos otras formas de almacenar energía, y de transferirla. Históricamente, la noción de energía como cantidad que se transfiere se consolidó en el siglo XIX, mucho después de Newton, cuando se entendieron otras formas de energía. Como habrán escuchado, el razonamiento completo nos lleva a interpretar que "la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma" (prefiero decir "se transfiere"). Con los elementos de este curso no llegaremos a discutir por completo el concepto de energía; solo llegaremos a precisar el concepto de *energía mecánica*, en las próximas clases.

Potencia

Una fuerza realiza trabajo W sobre una partícula solamente cuando ésta se desplaza. El desplazamiento insume un determinado tiempo Δt. Se llama *potencia P desarrollada por una fuerza* a la relación entre el trabajo realizado y el tiempo transcurrido. Genéricamente,

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

En cada contexto debe quedar claro cuál es la fuerza que desarrolla esa potencia, o mejor aún cuál es el agente que realiza esa fuerza y desarrolla esa potencia. Por ejemplo, cuando el motor de un malacate enrolla un cable y a través del mismo desplaza un cuerpo, se habla de la potencia que desarrolla (o entrega) el motor.

La potencia es una magnitud escalar. Tiene unidades propias,

$$[\text{Potencia}] = \frac{[\text{trabajo}]}{[\text{tiempo}]} = \frac{[\text{energía}]}{[\text{tiempo}]}$$

En el Sistema Internacional se define el Watt (W) como unidad de potencia,

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$$

Si consideramos un desplazamiento infinitesimal, cuando transcurre un diferencial de tiempo, podemos calcular la *potencia instantánea*. Ante un diferencial de tiempo dt la partícula se desplaza $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$. Una fuerza $\vec{F}$ actuando sobre la partícula realiza un diferencial de trabajo

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$$

La potencia instantánea desarrollada por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula es

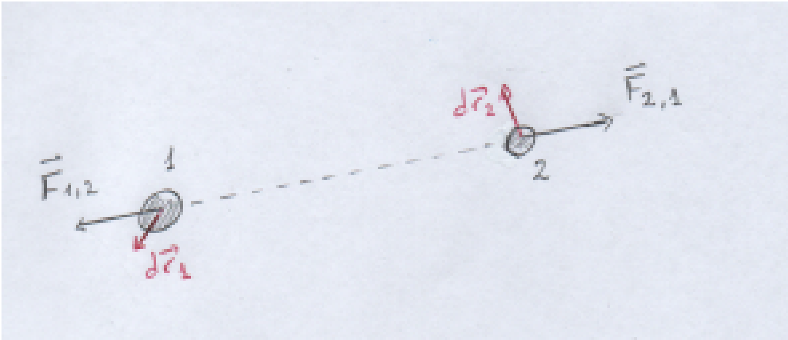
$$P(t) = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Cabe comentar que la potencia instantánea la calculamos como un cociente de diferenciales pero no es propiamente una derivada, por la sencilla razón de que el trabajo mecánico no es una función del tiempo.

Acción y reacción. El trabajo como intercambio de energía cinética o de otras formas de energía de un sistema.

Hasta aquí hablamos de fuerzas actuando sobre un cierto cuerpo. Por supuesto, las fuerzas son interacciones y están ejercidas por otros cuerpos. Y sobre los otros cuerpos actúa la correspondiente reacción. Una visión sistémica[2] de la energía tiene que considerar los trabajos sobre las distintas partículas en interacción.

Consideremos dos cuerpos, 1 y 2 en interacción:

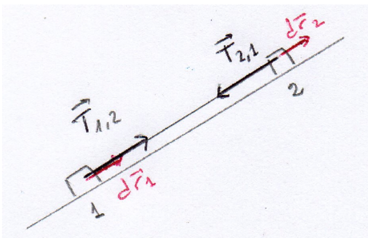


La Tercera Ley de Newton nos dice que la fuerza $\vec{F}_{1,2}$ que el cuerpo 2 hace sobre el cuerpo 1 y la fuerza $\vec{F}_{2,1}$ que el cuerpo 1 hace sobre el cuerpo 2 son opuestas, $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$. Pero los desplazamientos de cada partícula no están relacionados a priori, el movimiento de cada una depende de las condiciones iniciales y más en general depende de otras interacciones presentes. Si llamamos $d\vec{r}_1$ y $d\vec{r}_2$ a los desplazamientos de cada cuerpo en un tiempo infinitesimal, y llamamos $dW_{1,2} = \vec{F}_{1,2} \cdot d\vec{r}_1$ al trabajo infinitesimal que el cuerpo 2 hace sobre el cuerpo 1 y $dW_{2,1} = \vec{F}_{2,1} \cdot d\vec{r}_2$ al trabajo infinitesimal que el cuerpo 1 hace sobre el cuerpo 2, vemos que en general

$$dW_{1,2} \neq -dW_{2,1}$$

No podemos decir que la energía cinética que pierde un cuerpo la gana el otro. Es decir, no podemos razonar la interacción como un intercambio de energía cinética. Como comentamos antes, ese tipo de razonamiento requiere introducir otras formas de energía.

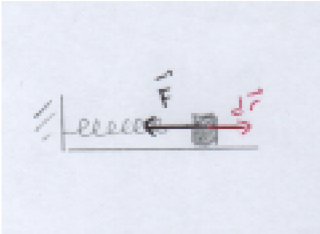
Un caso particular se encuentra en algunos sistemas con vínculos (por ejemplo dos cuerpos atados por una cuerda) de tal manera que los desplazamientos estén relacionados. Por ejemplo, cuando un bloque arrastra a otro como en la figura

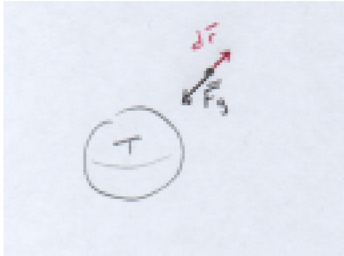


tenemos que las fuerzas que cada cuerpo hace sobre el otro (mediadas por la cuerda) son opuestas y que $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$; en consecuencia $dW_{1,2} = -dW_{2,1}$. Si encuentran ese caso (es decir, si previamente verifican esta relación) y la velocidad es variable, pueden decir que un cuerpo transfiere energía cinética al otro mediante la cuerda.

En otros casos, la energía cinética que se quita a un cuerpo haciéndole un trabajo mecánico negativo no se manifiesta como energía cinética de otro cuerpo. Por ejemplo, cuando la fuerza de un resorte frena el movimiento de un cuerpo que se aleja del equilibrio, le quita energía cinética. Otro ejemplo, cuando un cuerpo tiene velocidad hacia arriba y la fuerza peso lo frena, le quita energía cinética.

[2] Desde el punto de vista de sistemas, no de partículas aisladas.





Para describir dónde queda esa energía quitada al cuerpo necesitamos el concepto de energía potencial, que veremos en la clase 17.