

Clase 14: Dinámica en sistemas no inerciales rotantes

8 de mayo de 2020

Continuamos analizando la forma que toman las ecuaciones de la dinámica en sistemas de referencia no inerciales. En esta clase nos enfocamos en sistemas de referencia en movimiento de rotación. Más precisamente, en sistemas con su origen fijo en un cierto sistema inercial, y sus ejes cartesianos rotando con velocidad angular constante $\vec{\omega}$ respecto del sistema inercial.

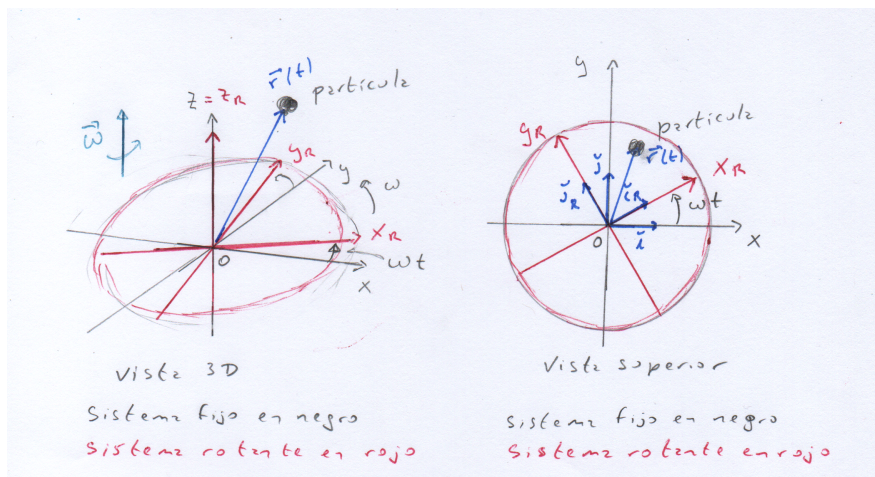
Recordemos que la estrategia de comparación es aprovechar lo que ve el observador inercial, y las relaciones que puede plantear (Segunda Ley de Newton), para generar una *dinámica modificada* que pueda usar un observador fijo en el sistema rotante.

1. Transformación explícita de observaciones, en componentes

Planteo: consideremos una situación con una escala de tiempos tal que el suelo (la superficie terrestre) es un buen sistema inercial.

Un observador monta su equipo de medición sobre la plataforma de una calesita que rota alrededor de un eje vertical, con velocidad angular ω constante; elige el origen de sus ejes cartesianos en el centro de la plataforma, con su eje z_R vertical hacia arriba y sus ejes x_R e y_R fijos en el plano de la plataforma. Dado que sus ejes horizontales giran respecto del suelo, lo llamaremos O_R , observador rotante. Llamaremos \check{i}_R , \check{j}_R y \check{k}_R a los versores de los ejes x_R , y_R y z_R , elegidos de tal forma que el sistema cartesiano sea derecho, es decir que $\check{i}_R \times \check{j}_R = \check{k}_R$.

Otro observador monta su equipo de medición sobre el suelo, eligiendo el origen de sus ejes cartesianos también en el centro de la calesita, con su eje z hacia arriba y sus ejes x e y fijos al suelo. Este segundo observador es inercial y lo llamaremos O_I . Llamaremos \check{i} , \check{j} y \check{k} a sus versores cartesianos, que no varían con el tiempo.



Si usamos un cronómetro que marca $t = 0$ cuando los ejes x_R e y_R rotantes coinciden con los ejes x e y fijos al suelo, podemos describir los versores \check{i}_R , \check{j}_R y \check{k}_R en función del tiempo:

$$\begin{cases} \check{i}_R(t) = \cos(\omega t)\check{i} + \sin(\omega t)\check{j} \\ \check{j}_R(t) = -\sin(\omega t)\check{i} + \cos(\omega t)\check{j} \\ \check{k}_R(t) = \check{k} \end{cases} \quad (1)$$

Ambos observadores describen el movimiento de la misma partícula. Dado que los dos observadores usan el mismo origen de coordenadas, describen la posición de la partícula con el mismo vector $\vec{r}(t)$. Sin embargo, cada uno descompone el vector posición en sus propios ejes y obtiene distintas componentes; para distinguir esas componentes llamemos

$$\vec{r}_I(t) = x(t)\check{i} + y(t)\check{j} + z(t)\check{k}$$

y

$$\vec{r}_R(t) = x_R(t)\check{i}_R(t) + y_R(t)\check{j}_R(t) + z_R(t)\check{k}_R(t)$$

Hemos escrito dos nombres para el mismo vector posición, las dos expresiones representan en cada instante al mismo vector $\vec{r}(t)$:

$$x(t)\check{i} + y(t)\check{j} + z(t)\check{k} = x_R(t)\check{i}_R(t) + y_R(t)\check{j}_R(t) + z_R(t)\check{k}_R(t) \quad (2)$$

Para calcular el **vector velocidad de la partícula**, cada observador hará la derivada respecto del tiempo de las componentes que él observa. El observador inercial calcula

$$\vec{v}_I(t) = x'(t)\check{i} + y'(t)\check{j} + z'(t)\check{k}$$

El observador rotante calcula

$$\vec{v}_R(t) = x'_R(t)\check{i}_R + y'_R(t)\check{j}_R + z'_R(t)\check{k}_R$$

sin derivar los versores, ya que desde su punto de vista no se mueven. Derivando la igualdad (2) respecto del tiempo encontraremos la relación entre las velocidades observadas. Teniendo en cuenta que el lado derecho contiene productos de funciones,

$$\begin{aligned} (x(t)\check{i} + y(t)\check{j} + z(t)\check{k})' &= (x_R(t)\check{i}_R(t) + y_R(t)\check{j}_R(t) + z_R(t)\check{k}_R(t))' \\ x'(t)\check{i} + y'(t)\check{j} + z'(t)\check{k} &= x'_R(t)\check{i}_R(t) + y'_R(t)\check{j}_R(t) + z'_R(t)\check{k}_R(t) \\ &\quad + x_R(t)\check{i}'_R(t) + y_R(t)\check{j}'_R(t) + z_R(t)\check{k}'_R(t) \end{aligned} \quad (3)$$

El trabajo se centra ahora en el último renglón. Para calcular las derivadas de los versores rotantes usamos su expresión (1), escrita en términos de los versores fijos:

$$\begin{aligned} \check{i}'_R(t) &= -\omega \sin(\omega t)\check{i} + \omega \cos(\omega t)\check{j} = \omega \check{j}_R(t) \\ \check{j}'_R(t) &= -\omega \cos(\omega t)\check{i} - \omega \sin(\omega t)\check{j} = -\omega \check{i}_R(t) \\ \check{k}'_R(t) &= \vec{0} \end{aligned} \quad (4)$$

Con estos resultados, el último renglón de (3) se desarrolla

$$x_R(t)\check{i}'_R(t) + y_R(t)\check{j}'_R(t) + z_R(t)\check{k}'_R(t) = \omega x_R(t)\check{j}_R(t) - \omega y_R(t)\check{i}_R(t)$$

Esta expresión coincide con el producto vectorial $\vec{\omega} \times \vec{r}(t)$ desarrollado en las componentes de O_R , donde $\vec{\omega} = \omega \check{k} = \omega \check{k}_R(t)$ es la velocidad angular vectorial. Lo verificamos usando la definición:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t) = \begin{vmatrix} \check{i}_R(t) & \check{j}_R(t) & \check{k}_R(t) \\ 0 & 0 & \omega \\ x_R(t) & y_R(t) & z_R(t) \end{vmatrix} = (0 \cdot z_R(t) - \omega y_R(t)) \check{i}_R(t) + (\omega x_R(t) - 0 \cdot y_R(t)) \check{j}_R(t)$$

Finalmente, la ecuación (3) nos dice que

$$\vec{v}_I(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t) \quad (5)$$

donde no es necesario aclarar en qué versores se desarrolla $\vec{r}(t)$.

Para calcular el **vector aceleración de la partícula** cada observador debe derivar respecto del tiempo la velocidad que ha calculado. El observador inercial calcula

$$\vec{a}_I(t) = x''(t)\check{i} + y''(t)\check{j} + z''(t)\check{k}$$

El observador rotante calcula

$$\vec{a}_R(t) = x''_R(t)\check{i}_R + y''_R(t)\check{j}_R + z''_R(t)\check{k}_R$$

nuevamente *sin derivar los versores*, ya que desde su punto de vista no se mueven. Para relacionar estas aceleraciones podemos derivar ambos miembros de la ecuación (3) que contiene explícitamente las componentes según cada observador, o la ecuación (5) que es equivalente pero más compacta. En esta sección usaremos la forma explícita:

$$\begin{aligned} (x'(t)\check{i} + y'(t)\check{j} + z'(t)\check{k})' &= (x'_R(t)\check{i}_R(t) + y'_R(t)\check{j}_R(t) + z'_R(t)\check{k}_R(t))' \\ &+ (x_R(t)\check{i}'_R(t) + y_R(t)\check{j}'_R(t) + z_R(t)\check{k}'_R(t))' \end{aligned}$$

que, derivando los productos de funciones, nos lleva a

$$\begin{aligned} x''(t)\check{i} + y''(t)\check{j} + z''(t)\check{k} &= x''_R(t)\check{i}_R(t) + y''_R(t)\check{j}_R(t) + z''_R(t)\check{k}_R(t) \\ &+ x'_R(t)\check{i}'_R(t) + y'_R(t)\check{j}'_R(t) + z'_R(t)\check{k}'_R(t) \\ &+ x'_R(t)\check{i}'_R(t) + y'_R(t)\check{j}'_R(t) + z'_R(t)\check{k}'_R(t) \\ &+ x_R(t)\check{i}''_R(t) + y_R(t)\check{j}''_R(t) + z_R(t)\check{k}''_R(t) \end{aligned} \quad (6)$$

En el primer renglón vemos a la izquierda $\vec{a}_I(t)$, y a la derecha $\vec{a}_R(t)$. El segundo y el tercer renglón repiten la misma expresión; usando las derivadas de los versores rotantes halladas en (4) y la definición de producto vectorial encontramos:

$$2(x'_R(t)\check{i}'_R(t) + y'_R(t)\check{j}'_R(t) + z'_R(t)\check{k}'_R(t)) = 2\omega(x'_R(t)\check{j}_R(t) - y'_R(t)\check{i}_R(t)) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t)$$

El cuarto renglón requiere calcular

$$\begin{aligned} \check{i}''_R(t) &= (\check{i}'_R(t))' = (\omega\check{j}_R(t))' = -\omega^2\check{i}_R(t) \\ \check{j}''_R(t) &= (\check{j}'_R(t))' = (-\omega\check{i}_R(t))' = -\omega^2\check{j}_R(t) \\ \check{k}''_R(t) &= \vec{0} \end{aligned}$$

donde usamos las sucesivamente las derivadas primeras de los versores rotantes en (4); obtenemos

$$x_R(t)\check{i}_R''(t) + y_R(t)\check{j}_R''(t) + z_R(t)\check{k}_R''(t) = -\omega^2 (x_R(t)\check{i}_R(t) + y_R(t)\check{j}_R(t) + z_R(t)\check{k}_R(t)) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t))$$

La última igualdad se verifica usando propiedades del producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) &= (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_R(t)) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_R(t) \\ &= \omega (\check{k}_R(t) \cdot \vec{r}_R(t)) \omega \check{k}_R(t) - \omega^2 \vec{r}_R(t) \\ &= \omega^2 (z_R(t)\check{k}_R(t) - x_R(t)\check{i}_R(t) - y_R(t)\check{j}_R(t) - z_R(t)\check{k}_R(t)) \\ &= -\omega^2 (x_R(t)\check{i}_R(t) + y_R(t)\check{j}_R(t)) \end{aligned}$$

Juntando los distintos términos, la igualdad (6) nos permite escribir

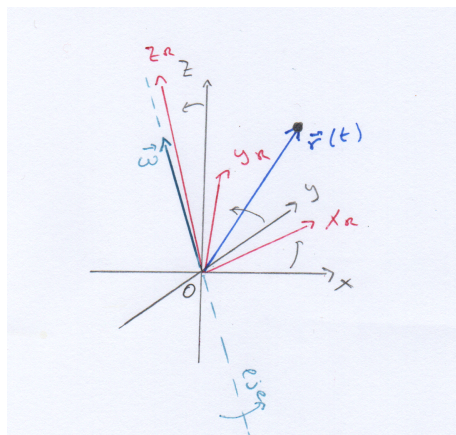
$$\vec{a}_I(t) = \vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) \quad (7)$$

Notemos que del lado derecho aparecen la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula vistas por el observador rotante O_R . En consecuencia, el observador rotante puede calcular con sus propias observaciones la aceleración $\vec{a}_I(t)$ que registra el observador inercial. Por otro lado, el hecho de que O_R mida una aceleración distinta que O_I prueba que O_R es un sistema de referencia no inercial.

2. Transformación de observaciones, en forma vectorial compacta

En la sección anterior trabajamos con componentes, pero llegamos a relacionar las velocidades y las aceleraciones registradas por ambos observadores en forma vectorial (covariante). Esto es señal de que las relaciones no dependen de la elección de ejes cartesianos. Para asegurarlo veremos ahora una forma alternativa y más general de escribir las mismas relaciones; haremos una presentación breve usando la notación vectorial de rotaciones en el espacio, si les resulta confusa basta con que hayan comprendido la forma explícita de la sección anterior.

Planteo: consideremos un sistema de referencia inercial y un observador O_I quieto en él. Consideremos un sistema de referencia rotando alrededor de un eje fijo respecto del primero, con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante en el tiempo, y un observador O_R quieto en el sistema rotante. Ambos observadores elijen sus ejes cartesianos con el mismo origen en algún punto del eje.



Cada punto que el observador O_R considera fijo en una posición \vec{r} (fuera del eje) se encuentra describiendo un movimiento circular respecto del observador O_I , en un plano perpendicular al eje con velocidad $\vec{\omega} \times \vec{r}$ y radio $\left| \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times \vec{r} \right| = |\vec{r}| \sin(\phi)$ donde ϕ es el ángulo entre $\vec{\omega}$ y \vec{r} . En particular los puntos finales versores cartesianos fijos al sistema rotante \check{i}_R , \check{j}_R y \check{k}_R tienen velocidades $\frac{d}{dt}\check{i}_R = \vec{\omega} \times \check{i}_R$, $\frac{d}{dt}\check{j}_R = \vec{\omega} \times \check{j}_R$ y $\frac{d}{dt}\check{k}_R = \vec{\omega} \times \check{k}_R$ respecto del observador O_I .

Si la posición de una partícula en movimiento, respecto del origen común, está dada por un vector $\vec{r}(t)$, cada observador describe ese mismo vector como

$$\vec{r}_I(t) = x(t)\check{i} + y(t)\check{j} + z(t)\check{k}$$

y

$$\vec{r}_R(t) = x_R(t)\check{i}_R(t) + y_R(t)\check{j}_R(t) + z_R(t)\check{k}_R(t)$$

Derivando respecto del tiempo esos vectores iguales,

$$\vec{v}_I(t) = \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_R(t) \quad (8)$$

donde

$$\vec{v}_I(t) = x'(t)\check{i} + y'(t)\check{j} + z'(t)\check{k}$$

y

$$\vec{v}_R(t) = x'_R(t)\check{i}_R + y'_R(t)\check{j}_R + z'_R(t)\check{k}_R$$

La relación (8) reproduce el resultado de la ecuación (5), pero ahora la velocidad angular no está necesariamente alineada con el eje z .

Derivando nuevamente respecto del tiempo obtenemos del lado izquierdo

$$\vec{a}_I(t) = x''(t)\check{i} + y''(t)\check{j} + z''(t)\check{k}$$

Del lado derecho, por un lado

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_R(t) = \vec{a}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{v}_R(t)$$

donde

$$\vec{a}_R(t) = x''_R(t)\check{i}_R + y''_R(t)\check{j}_R + z''_R(t)\check{k}_R$$

y el término $\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t)$ viene de derivar los versores de O_R ; por otro lado, con $\vec{\omega}$ constante,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) &= \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\vec{r}_R(t) = \vec{\omega} \times (\vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \vec{a}_I(t) &= \vec{a}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) \\ &= \vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) \end{aligned}$$

3. Fuerzas ficticias en el sistema de referencia rotante

Dado que el observador rotante O_R puede reconstruir, a partir de sus observaciones, la aceleración registrada por el observador inercial, puede aprovechar la validez de la Segunda Ley de Newton (planteada en el sistema inercial O_I) para relacionar sus propias observaciones con las fuerzas que actúan sobre la partícula:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}_I(t)$$

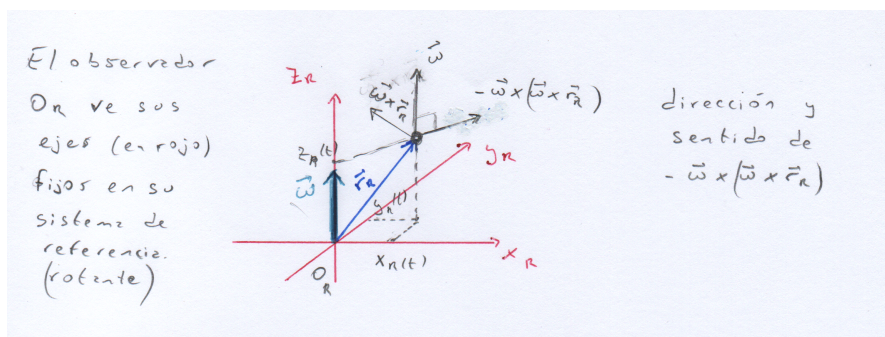
$$\sum_i \vec{F}_i = m [\vec{a}_R(t) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t))]$$

Si al observador O_R le interesa conocer la aceleración de la partícula puede despejar:

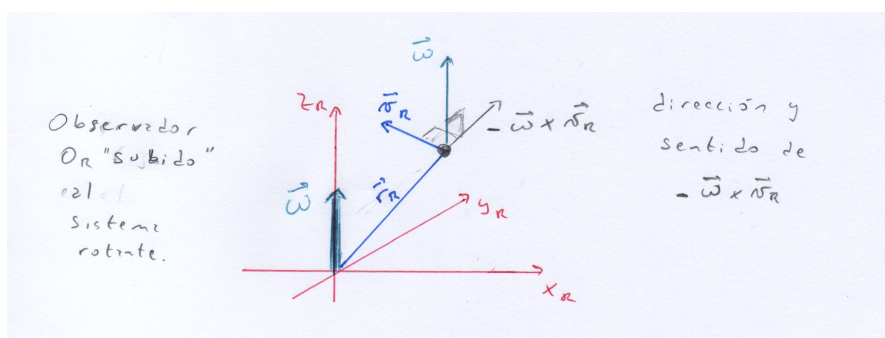
$$\sum_i \vec{F}_i - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t)) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t) = m\vec{a}_R(t)$$

El observador O_R encuentra que la aceleración que él mide cumple una *forma modificada* de la Segunda Ley: el producto $m\vec{a}_R(t)$ está relacionado con las fuerzas reales (debidas a interacciones de la partícula observada con otros cuerpos) y con dos términos no inerciales, o *fuerzas ficticias*. El término $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t))$ se conoce como *fuerza ficticia centrífuga* y el término $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t)$ se conoce como *fuerza ficticia de Coriolis*. Ambas dependen de la masa (inercia) de la partícula observada; eso es característico de las *fuerzas ficticias*.

La *fuerza ficticia centrífuga* $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R(t))$ está presente para cualquier partícula en un punto fuera del eje de rotación; usando la regla de la mano derecha para el producto vectorial deben reconocer que apunta en la dirección de una recta que pasa por la partícula y es perpendicular al eje de rotación, con sentido hacia afuera del eje.



La *fuerza ficticia de Coriolis* $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R(t)$ se manifiesta sólo cuando la partícula observada está en movimiento respecto de O_R (es decir, cuando $\vec{v}_R(t) \neq \vec{0}$). Su dirección y sentido dependen de la velocidad, pero siempre será perpendicular a $\vec{v}_R(t)$; desde el punto de vista del observador rotante sólo aporta a la curvatura de la trayectoria.

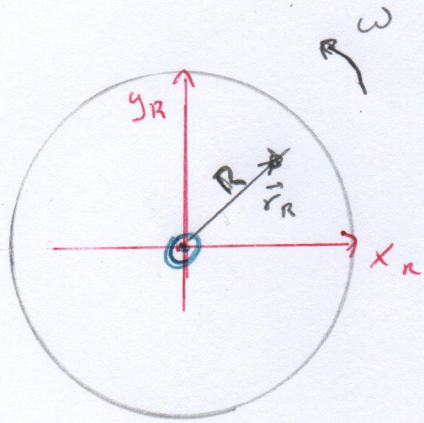


Ejemplo: consideremos la plataforma de una calesita que gira respecto del piso alrededor de un eje vertical, con velocidad angular constante $\vec{\omega}$ apuntando hacia arriba. Analice la situación como lo haría un observador quieto sobre la plataforma.

a) Una hormiga de masa m está apoyada en reposo respecto de la plataforma a una distancia R del eje. ¿Qué fuerzas reales actúan sobre la hormiga? ¿Quién las ejerce?

b) El observador quieto sobre la plataforma de la calesita ve a la hormiga a una distancia R y caminando con velocidad de módulo v en dirección radial, alejándose del eje. ¿Cuál es ahora el módulo de la fuerza de roce de la plataforma sobre la hormiga?

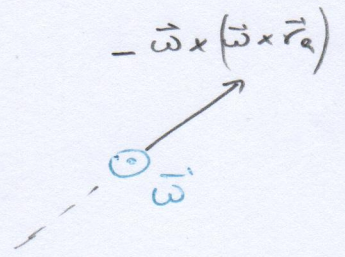
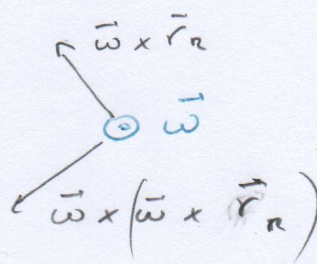
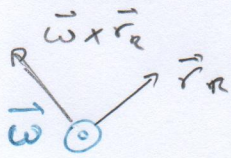
a)



- Vista superior de la plataforma
- ejes cartesianos fijos a la plataforma
- hormiga en reposo (en la plataforma)
- $\vec{\omega}$ apunta fuera de la pantalla (lo dibujo \odot)

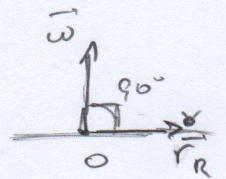
• fuerzas centrífugas $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$

dirección y sentido



módulo

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}_n| = |\omega| \cdot |\vec{r}_n| \cdot \sin(90^\circ) = \omega R$$



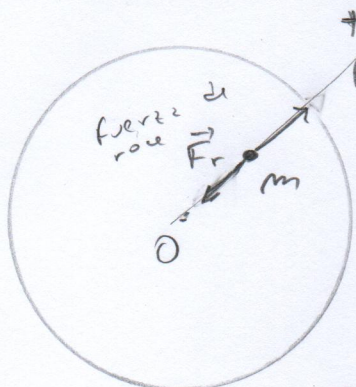
$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{\omega} \times \vec{r}_n| \cdot \sin(90^\circ) = \omega^2 R$$

perpendicular a $\vec{\omega}$

- \vec{Q}_R : aceleración observada por O_R

$\vec{Q}_R = \vec{0}$ porque O_R ve la hormiga en reposo.

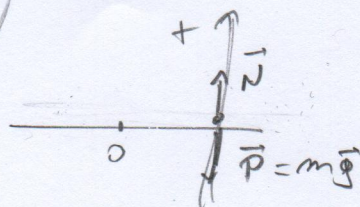
- Diagrama de fuerzas, en el sistema no inercial



fuerza centrífuga (ficticia)

en un eje radial: $m\omega^2 R - F_r = 0$

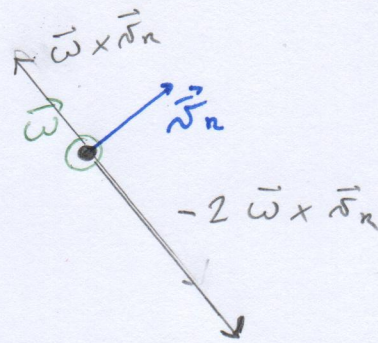
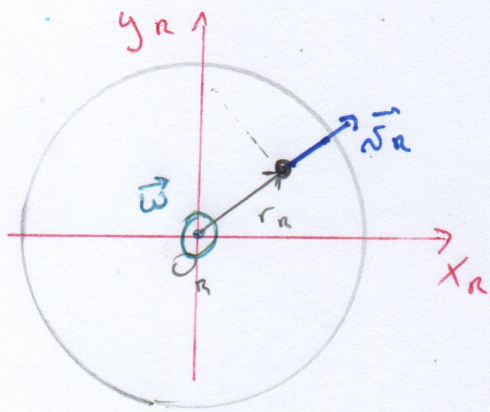
en un eje perpendicular: $N - mg = 0$



$\therefore |F_r| = m\omega^2 R$

\vec{F}_r hacia el Origen

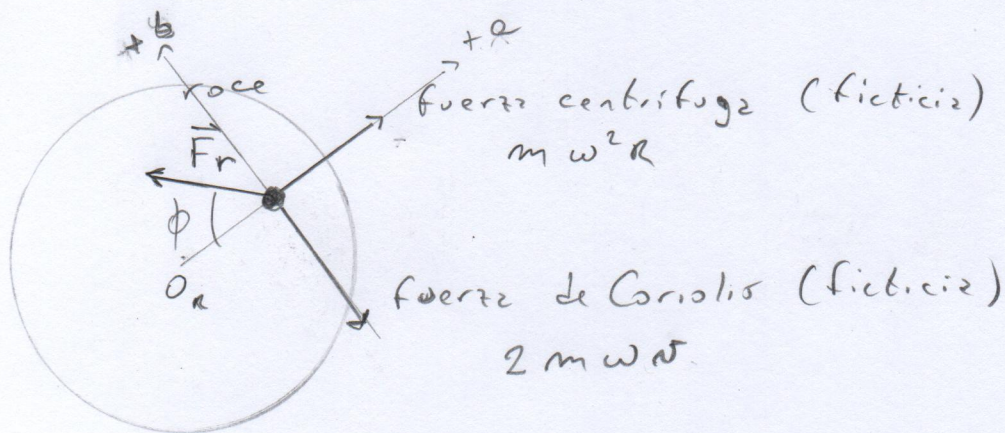
b).



$$|-2 \vec{\omega} \times \vec{n}_n| = 2 \omega \nu$$

$$(\vec{n}_n \perp \vec{\omega})$$

- Diagrama de fuerzas, en el sistema no inercial:



- aceleración vista por O_n : $\vec{a}_n = \vec{0}$ (\vec{n}_n constante)

$$\therefore \vec{F}_r - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) - 2 m \vec{\omega} \times \vec{n}_n = \vec{0}$$

en los ejes a y b del dibujo, con el ángulo dibujado,

$$a: +m \omega^2 R - F_r \cos \phi = 0$$

$$b: -2 m \omega \nu + F_r \sin \phi = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{F}_r| = \sqrt{(m \omega^2 R)^2 + (2 m \omega \nu)^2} \\ \tan \phi = \frac{2 m \omega \nu}{m \omega^2 R} = \frac{\nu}{\omega R} \end{array} \right.$$