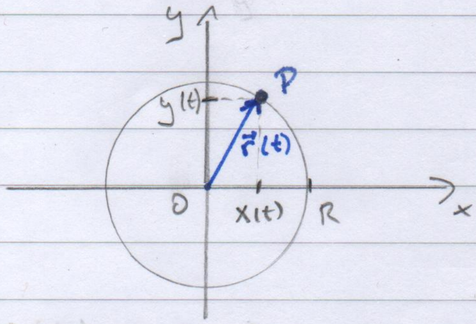
Movimiento circular (en el plano)

Consideremos el movimiento de una partícula que está obligada a mantenerse sobre una circunferencia, de centro O y radio R

Por ejemplo un vehículo en una pista, o un objeto atado a un hilo, o un objeto adherido a una rueda montada sobre un eje fijo. En cada caso habrá fuerzas que mantengan al objeto en una trayectoria circular.
Usemos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la circunferencia O.

En coordenadas cartesianas, el vector posición se escribe

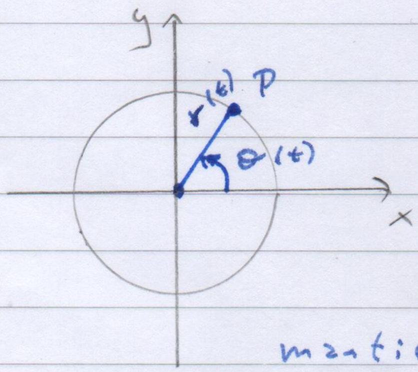


$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath}$$

con $(x(t))^2 + (y(t))^2 = R^2$, $\forall t$

Las coordenadas cartesianas están vinculadas en todo instante t; no son independientes.

En coordenadas polares, el punto posición P tiene

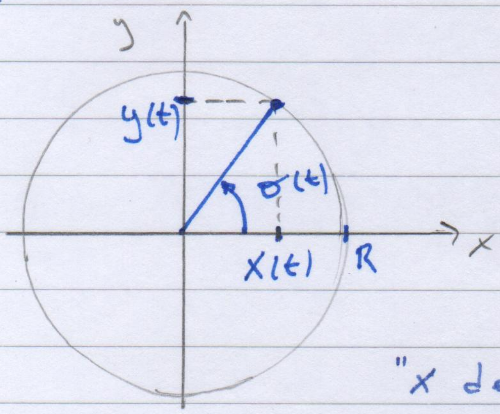


$$\begin{cases} r(t) = R & \forall t \\ \theta(t) & \text{variable.} \end{cases}$$

Las coordenadas polares se mantienen independientes, con $r = R$ fijo. Basta una variable angular $\theta(t)$ para describir la posición.

Para describir el movimiento circular es conveniente usar la variable angular (o polar) $\theta(t)$

Para recuperar la descripción cartesiana habrá que relacionar



$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\theta(t)) \\ y(t) = R\,\text{sen}(\theta(t)) \end{cases}$$

como funciones compuestas

"x depende de θ que a su vez depende de t", (ídem y)

Cinemática Angular.

Mediremos la coordenada angular θ en radianes.

Unidades: $[\theta] = 1$

Para facilidad de lenguaje podemos anotar $[\theta] = \text{rad}$ pero "rad" es solamente un cartelito avisando que nos referimos a ángulos en radianes. Pueden ponerlo si les sirve, y sacarlo cuando no les sirva.

Velocidad Angular: dado que θ es función del tiempo t, se define:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t) \qquad \text{velocidad angular}$$

Unidades: $[\omega] = \dfrac{[\theta]}{[t]} = \dfrac{\text{rad}}{[t]}$; por ejemplo, $\dfrac{\text{rad}}{s}$

Conceptualmente, la velocidad angular $\omega(t)$ describe el ritmo de variación del ángulo θ respecto del tiempo transcurrido.

Aceleración angular: dado que $\omega(t)$ es en general una función del tiempo t, se define:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \qquad \text{aceleración angular}$$

Unidades:

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{rad}{[t]^2} \;; \quad \text{por ejemplo } \frac{rad}{s^2}$$

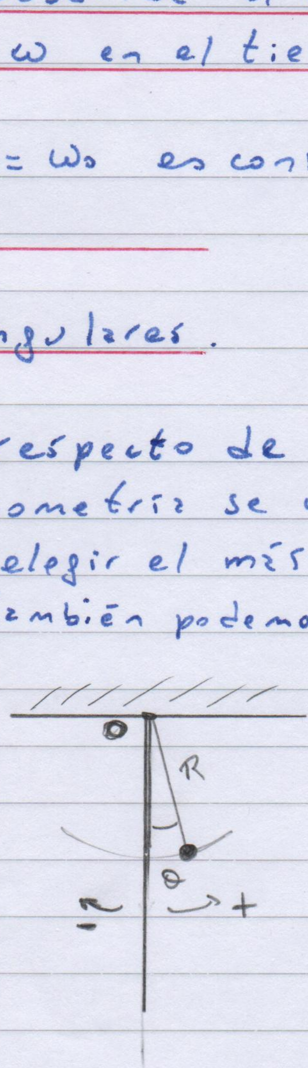
La aceleración angular describe el ritmo de variación de la velocidad angular ω en el tiempo.

Naturalmente, si $\omega(t) = \omega_0$ es constante, $\alpha(t) = 0$

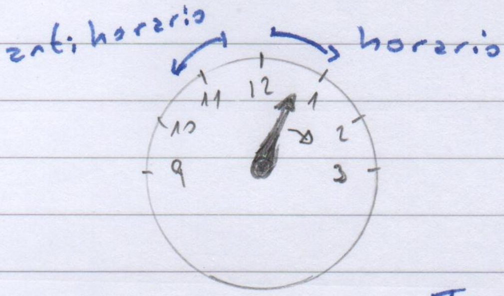
Signos y convenciones angulares.

El ángulo θ se mide respecto de una semirecta de referencia. En trigonometría se usa el semieje x positivo, pero podemos elegir el más conveniente para cada situación. También podemos elegir el signo

Por ejemplo, la oscilación de un péndulo es un ejemplo de movimiento circular (no tiene que recorrer toda la circunferencia



Es usual referirse al sentido de la rotación como horario o antihorario, asumiendo un reloj visto de frente.



(pero estamos en problemas si alguien mira desde atrás)

También dibujamos "flechas curvas".

Al describir una situación deben elegir: el origen de θ y el sentido que medirán como positivo. (como hacen con los ejes cartesianos).

Casos típicos de movimiento circular

MCU: movimiento circular con velocidad angular ω constante.

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} d\theta = \int_{t_0}^{t_1} \omega\, dt$$

ω sale afuera de la integral sólo cuando es constante.

$$\theta(t_1) - \theta(t_0) = \omega\,(t_1 - t_0)$$

$\therefore$ si $\omega(t) = \omega$ es constante, la función angular tiene la forma

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

donde $\theta_0 \equiv \theta(t_0)$ es la posición angular inicial, al tiempo $t = t_0$

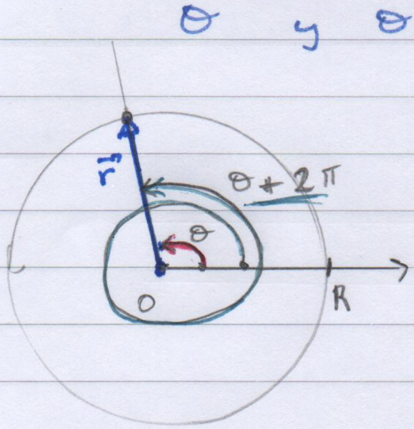
Y la aceleración angular es $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = 0$.

MCU: $\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) \\ \omega(t) = \omega \\ \alpha(t) = 0 \end{cases}$

Es importante destacar que el MCU es un movimiento periódico:
la partícula repite su posición y su velocidad en intervalos regulares de tiempo

Esto se debe a que: 1) la medida angular es periódica,

θ y $\theta + 2k\pi$ son congruentes para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.



. describen la misma posición:

$$\vec{r} = R\cos(\theta)\breve{i} + R\,\mathrm{sen}(\theta)\breve{j} =$$

$$= R\cos(\theta + 2k\pi)\breve{i} + R\,\mathrm{sen}(\theta + 2k\pi)\breve{j}$$

2) $$\theta\left(t + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) = \theta_0 + \omega\left(t + \frac{2\pi}{|\omega|} - t_0\right)$$

$$= \theta_0 + \omega(t - t_0) \pm \cancel{\omega}\frac{2\pi}{|\cancel{\omega}|}$$

$$= \theta(t) \pm 2\pi \simeq \theta(t)$$

"congruente"

$$\omega\left(t + \frac{2\pi}{|\omega|}\right) = \omega(t) = \omega$$

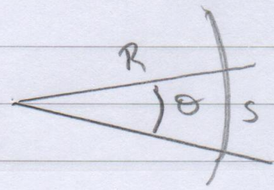
$\therefore$ "Al transcurrir un tiempo $\boxed{T = \frac{2\pi}{|\omega|}}$, llamado periodo, el movimiento se repite"

Observación sobre unidades:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow [T] = \frac{[2\pi]}{[\omega]} = \frac{1}{\frac{rad}{[t]}} = [t] \quad \text{(tiempo)}$$

donde "rad" funciona como cartel, pero no es una unidad.

Recordemos:



$$\theta = \frac{s}{R}$$

$$[\theta] = \frac{\cancel{[\ell]}}{\cancel{[\ell]}} = 1 \quad \text{"rad"}$$

En la práctica, podemos escribir "rad" cuando hablamos de cantidades angulares, y no escribirlo (borrarlo) cuando calculamos cantidades no-angulares.

Revoluciones y frecuencia.

Se llama <u>revolución</u> a una vuelta completa, es decir un recorrido angular $\Delta\theta = 2\pi$ rad.

Se llama <u>frecuencia f</u> a la cantidad de revoluciones por unidad de tiempo. Se relaciona con el periodo T según:

T unidades de tiempo — 1 revolución

1 unidad de tiempo — f revoluciones

es decir,

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Unidades de frecuencia: $[f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{[t]}$

La unidad de frecuencia del Sistema Internacional es "ciclos por segundo", se llama **Hertz**:

$$1\ Hz = 1\ \frac{ciclo}{s}$$

y se usa para cualquier movimiento periódico o "cíclico". En el caso de MCU, un ciclo corresponde a una vuelta o una revolución.

Dado que $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, $\boxed{f = \frac{|\omega|}{2\pi}}$

MCUV: Movimiento circular con aceleración angular α constante

Cuando α es constante podemos construir la forma de la función $\theta(t)$:

$$\frac{d\omega}{dt}(t) = \alpha \Rightarrow d\omega = \alpha\, dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} d\omega = \alpha \int_{t_0}^{t_1} dt$$

$$\therefore\quad \omega(t_1) - \omega(t_0) = \alpha\,(t - t_0)$$

y $\forall t$, $\quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha\,(t - t_0)$

con $\omega_0 \equiv \omega(t_0)$ velocidad angular inicial, al tiempo t_0.

$$\frac{d\theta}{dt}(t) = \omega(t) \Rightarrow \quad d\theta = \omega(t)\, dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} d\theta = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t)\, dt$$

$$\therefore \ \theta(t_1) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} [\omega_0 + \alpha(t-t_0)]\, dt$$

$$= \left[\omega_0 t + \frac{\alpha}{2}(t-t_0)^2\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$= \omega_0(t_1 - t_0) + \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_0)^2$$

y $\forall t$, $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$

con $\theta_0 = \theta(t_0)$ ángulo inicial, al tiempo t_0.

Resumiendo

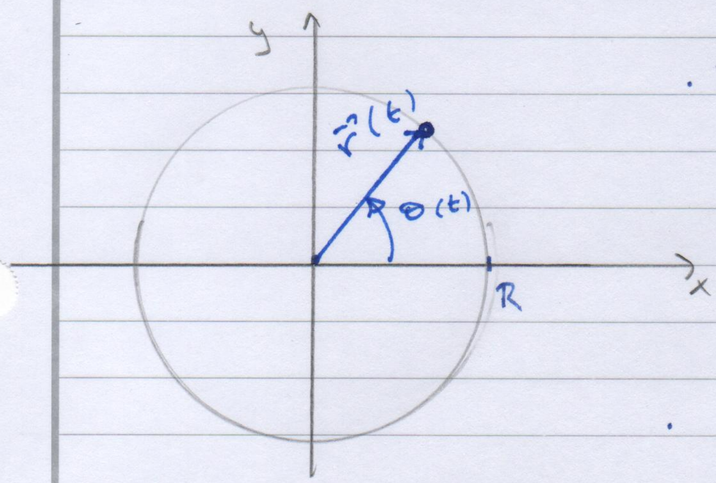
$$\text{MCUV:} \begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2 \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha(t-t_0) \\ \alpha(t) = \alpha \end{cases}$$

Observaciones:

- Si el giro sigue el sentido elegido como positivo, $\theta(t)$ es creciente y $\omega(t) > 0$
- Si el giro va en contra del sentido positivo, $\theta(t)$ es decreciente y $\omega(t) < 0$
- Si $\alpha(t)$ y $\omega(t)$ tienen el mismo signo, $|\omega(t)|$ es creciente (aumenta)
- Si $\alpha(t)$ y $\omega(t)$ tienen distinto signo, $|\omega(t)|$ es decreciente ("freno").

Descripción vectorial del movimiento circular

Consideremos un punto que se mueve sobre una circunferencia de centro O y radio R, con ángulo $\theta(t)$ respecto de un semieje x positivo, con origen en O:



. Recuperamos el vector posición en ese sistema cartesiano como

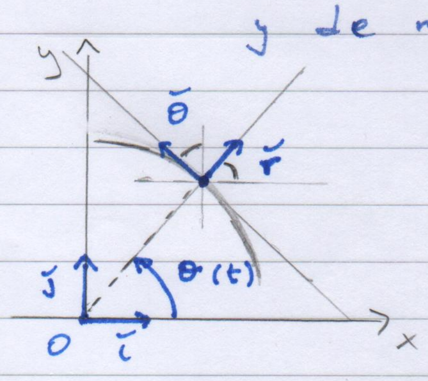
$$\vec{r}(t) = R\cos(\theta(t))\,\breve{\imath} + R\,\mathrm{sen}(\theta(t))\,\breve{\jmath}$$

usando funciones compuestas.

. Podemos introducir versores polares $\breve{r}$ y $\breve{\theta}$ que dependen de la posición (y en consecuencia dependerán del tiempo:

$$\breve{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{R}$$ se llama versor radial

$\breve{\theta}$, perpendicular a $\breve{r}$, en el sentido de θ creciente, y de módulo $|\breve{\theta}| = 1$ se llama versor angular



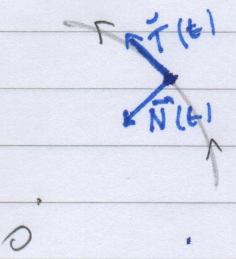
Su descomposición en $\breve{\imath}, \breve{\jmath}$, es

$$\begin{cases} \breve{r}(t) = 1.\cos(\theta(t))\,\breve{\imath} + 1.\,\mathrm{sen}(\theta(t))\,\breve{\jmath} \\ \breve{\theta}(t) = -1.\,\mathrm{sen}(\theta(t))\,\breve{\imath} + 1.\cos(\theta(t))\,\breve{\jmath} \end{cases}$$

y recíprocamente

$$\begin{cases} \breve{\imath} = \cos(\theta(t))\,\breve{r} - \mathrm{sen}(\theta(t))\,\breve{\theta} \\ \breve{\jmath} = +\,\mathrm{sen}(\theta(t))\,\breve{r} + \cos(\theta(t))\,\breve{\theta} \end{cases}$$

Comparando con los versores tangente $\breve{T}(t)$ y normal $\breve{N}(t)$ que trabajamos en la clase 7,



$\breve{r}(t) = -\breve{N}(t)$; $\breve{r}$ apunta hacia afuera, $\breve{N}$ apunta hacia O

$\breve{\theta}(t) = \pm \breve{T}(t)$; $\breve{\theta}$ apunta "anti-horario", $\breve{T}$ depende del sentido del movimiento

A pesar de los signos, $\boxed{\begin{array}{l} \breve{r} \text{ indica una dirección normal a la trayectoria} \\ \breve{\theta} \text{ indica una dirección tangencial a la trayectoria.} \end{array}}$

Velocidad y aceleración, vectoriales

Para calcular $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)$ y $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t)$

tenemos que repasar algunas reglas de derivación:

- si $f(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$, $\dfrac{df}{dt}(t) = \omega \cos(\omega t)$
- si $g(t) = \cos(\omega t)$, $\dfrac{dg}{dt}(t) = -\omega \operatorname{sen}(\omega t)$

(ver tabla en Clase 5, página 8)

- si $h(t) = g(f(t))$ (función compuesta)

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{dg}{dt}(f(t)) \cdot \frac{df}{dt}(t)$$ Regla de la cadena

- si $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ función producto

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{dg}{dt}(t)$$ Regla de Leibnitz

Cabe destacar que estas reglas tienen hipótesis de validez; en este curso trabajamos con funciones tales que estas reglas se pueden aplicar, tanto en la teoría como en los ejercicios de práctica.

En el libro Análisis Matemático para Ciencias Exactas y Naturales pueden ver los enunciados con sus hipótesis de validez (páginas 107-112)
En el curso de Análisis Matemático I discutirán la demostración de las reglas de derivación

- $\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left[R\cos(\theta(t))\breve{i} + R\,\mathrm{sen}(\theta(t))\breve{j}\right]$. derivada de suma

$= R\frac{d}{dt}\left[\cos(\theta(t))\right]\breve{i} + R\frac{d}{dt}\left[\mathrm{sen}(\theta(t))\right]\breve{j}$. constantes afuera

$= -R\,\mathrm{sen}(\theta(t)) \cdot \frac{d\theta}{dt}(t)\,\breve{i} + R\cos(\theta(t)) \cdot \frac{d\theta}{dt}(t)\,\breve{j}$. regla de la cadena

$= -R\,\omega(t)\,\mathrm{sen}(\theta(t))\breve{i} + R\,\omega(t)\cos(\theta(t))\,\breve{j}$. definición de $\omega(t)$

$= R\,\omega(t)\left[-\mathrm{sen}(\theta(t))\,\breve{i} + \cos(\theta(t))\,\breve{j}\right]$. factor común

$\boxed{\vec{v}(t) = R\,\omega(t)\,\breve{\theta}(t)}$. expresión de $\breve{\theta}(t)$

Observamos que $\vec{v}(t)$ es tangencial, (como corresponde)

en el sentido de θ creciente $(\breve{\theta}(t))$ si $\omega(t) > 0$

o en el sentido de θ decreciente $(-\breve{\theta}(t))$ si $\omega(t) < 0$.

- $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\left[-R\,\omega(t).\operatorname{sen}(\theta(t))\,\check{\imath} + R\,\omega(t)\cos(\theta(t))\,\check{\jmath}\right]$

$$= -R\,\frac{d}{dt}\left[\omega(t).\operatorname{sen}(\theta(t))\right]\check{\imath} + R\,\frac{d}{dt}\left[\omega(t).\cos(\theta(t))\right]\check{\jmath}$$

$$= -R\left[\frac{d\omega}{dt}(t).\operatorname{sen}(\theta(t)) + \omega(t).\frac{d}{dt}\left(\operatorname{sen}(\theta(t))\right)\right]\check{\imath} +$$

$$+ R\left[\frac{d\omega}{dt}(t).\cos(\theta(t)) + \omega(t).\frac{d}{dt}\left(\cos(\theta(t))\right)\right]\check{\jmath}$$

$$= -R\left[\alpha(t).\operatorname{sen}(\theta(t)) + \omega(t).\cos(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}(t)\right]\check{\imath} +$$

$$+ R\left[\alpha(t)\cos(\theta(t)) - \omega(t)\operatorname{sen}(\theta(t)).\frac{d\theta}{dt}(t)\right]\check{\jmath}$$

$$= -R\,\alpha(t)\operatorname{sen}(\theta(t))\,\check{\imath} - R\,\omega^2(t).\cos(\theta(t))\,\check{\imath} +$$

$$+ R\,\alpha(t)\cos(\theta(t))\,\check{\jmath} - R\,\omega^2(t)\operatorname{sen}(\theta(t))\,\check{\jmath}$$

$$= -R\,\omega^2(t)\left[\cos(\theta(t))\,\check{\imath} + \operatorname{sen}(\theta(t))\,\check{\jmath}\right] +$$

$$+ R\,\alpha(t)\left[-\operatorname{sen}(\theta(t))\,\check{\imath} + \cos(\theta(t))\,\check{\jmath}\right]$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = -R\,\omega^2(t)\,\check{r}(t) + R\,\alpha(t)\,\check{\theta}(t)}$$

Observamos

- $\vec{a}(t)$ tiene una componente radial, $-R\,\omega^2(t)$
  - no nula siempre que $\omega(t) \neq 0$
  - negativa siempre que $\omega(t) \neq 0$,
  - apunta hacia el centro O de la circunferencia
  - usando el versor normal, $-R\,\omega^2(t)\,\check{r}(t) = +R\,\omega^2(t)\,\check{N}(t)$

- $\vec{a}(t)$ tiene una componente tangencial $R\alpha(t)$
  no nula cuando $\alpha(t) \neq 0$
  orientada según el signo de $\alpha(t)$

Resumiendo,

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = R\,\omega(t)\,\breve{\theta}(t) \\ \vec{a}(t) = R\,\omega^2(t)\,\breve{N}(t) + R\,\alpha(t)\,\breve{\theta}(t) \end{cases}$$

En cualquier movimiento circular,

- la velocidad es tangente a la circunferencia, con
  $|\vec{v}| = |\omega| R$

- la aceleración tiene siempre una componente normal, también llamada centrípeta, dada por
  $a_N = \omega^2 R$ (asociada a la curvatura)

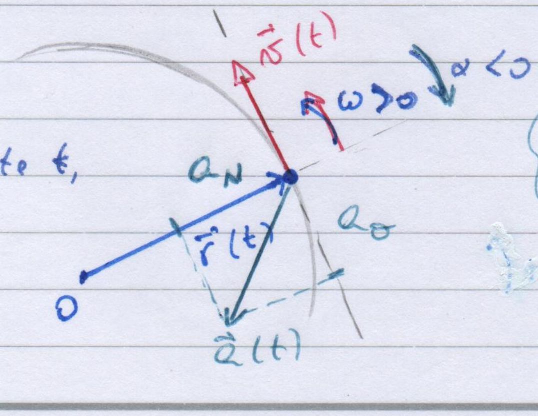
- la aceleración **puede tener** una componente tangencial, cuando hay aceleración angular $\alpha \neq 0$, dada por
  $a_\theta = \alpha R$

  asociada al cambio del módulo de $\vec{v}$:

si $\omega(t) > 0$, $\quad \dfrac{d|\vec{v}|}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\omega R) = \left(\dfrac{d\omega}{dt}\right) \cdot R = \alpha R$

por ejemplo,
si en un instante t,

$\omega(t) > 0$
$\alpha(t) < 0$



$a_N = \omega^2 R$ está siempre presente,

$a_\theta = \alpha R$ está asociada a α.

Dinámica del Movimiento Circular

Asumiendo que el punto O, centro de la trayectoria circular, está fijo en un sistema inercial, corresponde aplicar la 2da Ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

La aceleración

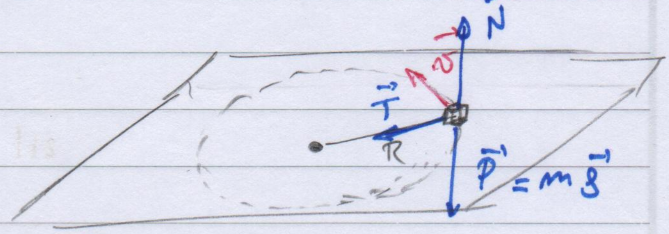
$$\vec{a} = \omega^2 R \breve{N} + \alpha R \breve{\theta}$$

observada en un movimiento circular se debe a las fuerzas que estén actuando sobre la partícula.

Como mencionamos en la página 1, para mantener una trayectoria circular tiene que haber fuerzas adecuadas. En general, algunas fuerzas (como el peso) tienen un valor predeterminado y otras se ajustan al movimiento observado.

Ejemplos:

una partícula de masa m sobre una superficie horizontal sin roce, girando sujeta a una cuerda de longitud R:



. como no hay fuerzas tangenciales, $a_\theta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \omega = cte$

$$\omega = \frac{|\vec{v}|}{R}$$

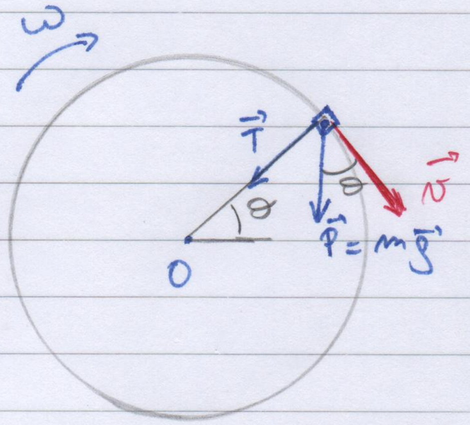
. como no se observa aceleración vertical, $N = mg$

. como hay aceleración radial, $a_N = \omega^2 R$, (en este caso, $\vec{T}$ es la "fuerza centrípeta")

$$T = m.\omega^2 R$$

$$\boxed{T = \frac{m v^2}{R}}$$

- Una partícula de masa m sujeta por una cuerda de longitud R, girando en una circunferencia vertical



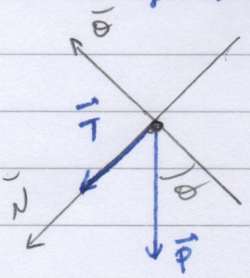
en cada instante (en cada posición)

$$\vec T + \vec P = m\left(\omega^2 R \breve N + \alpha R \breve\theta\right)$$

$\vec P = m\vec g$ es constante

$\vec T$ apunta hacia O y adapta su módulo (mientras $|\vec T| \le T_{ruptura}$)

La componente centrípeta de la fuerza resultante



$$T + mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\,\omega^2 R$$

y la componente tangencial

$$-mg\cos\theta = \alpha R$$

- Según la posición angular θ, α toma distintos valores
.
- el movimiento no es MCU ni MCUV;
- <u>sí</u> es un movimiento circular, se aplican las relaciones vectoriales (páginas 9 a 13)