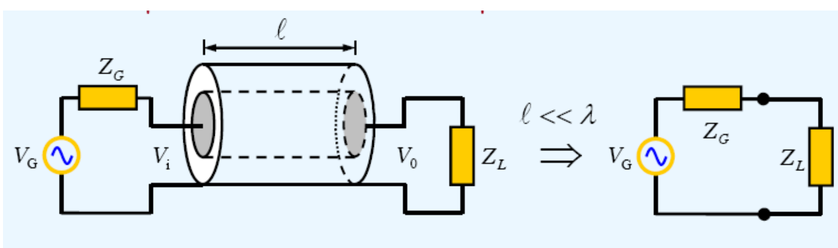
Experimentos Electromagnéticos

Curso 2019

LT (Material adicional)

Modelo circuital de LT: l << λ

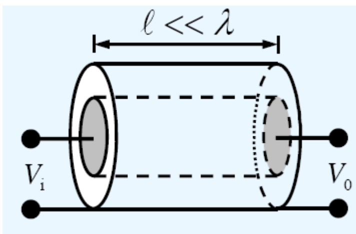
Podemos reemplazar a la línea por conductores ideales. Conductores sin resistencia.

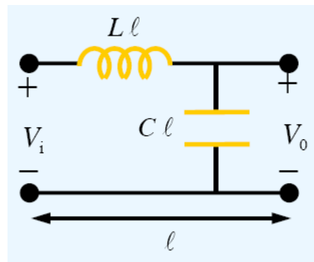


Esto en general podemos hacerlo cuando la frecuencia del generador es “baja”. (?)

Modelo mejorado

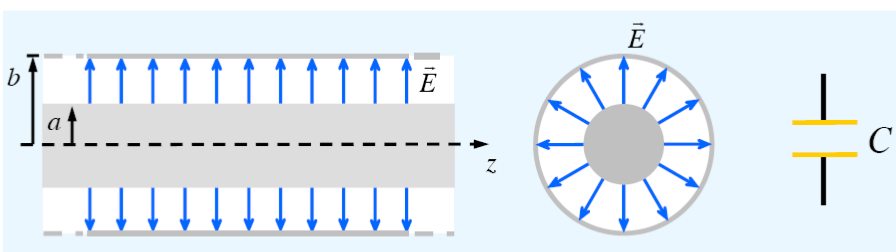
Agregamos un capacitor en paralelo y una bobina en serie. Consideramos línea sin pérdidas.





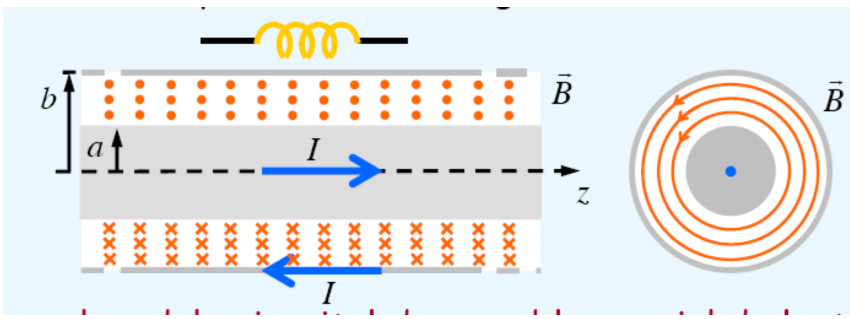
Origen de la capacidad

El origen del capacitor es debido a la diferencia de potencial entre los conductores. Aparece un campo eléctrico.



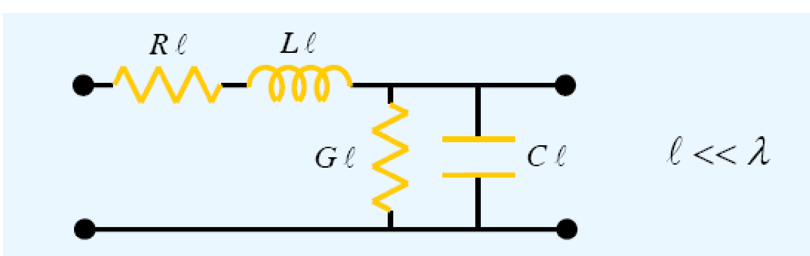
Origen de la inductancia

Al considerar la circulación de corriente aparece (campo magnético) la inductancia

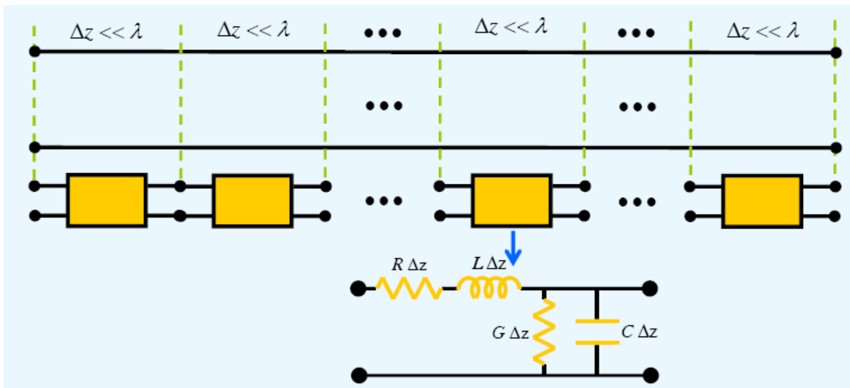


Finalmente

El modelo, considerando las pérdidas, seria:



Donde R es la resistencia de los conductores y G las pérdidas en el dieléctrico.



Para la tensión

$$-v(z,t)+R\Delta z\, i(z,t)+L\Delta z\,\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}+v(z+\Delta z,t)=0$$

$$-\frac{v(z+\Delta z,t)-v(z,t)}{\Delta z}=R\, i(z,t)+L\,\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$haciendo \quad \Delta z \to 0$$

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}=R\; i(z,t)+L\,\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \qquad \Leftarrow$$

Para la corriente

$$i(z,t)-G\Delta z\ v(z+\Delta z,t)-C\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}-i(z+\Delta z,t)=0$$

$$i(z+\Delta z,t)-i(z,t)=G\Delta z\ v(z+\Delta z,t)+C\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

Dividiendo por Δz *y haciendo* $\Delta z\rightarrow 0$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=G\ v(z,t)+C\ \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\quad\Leftarrow$$

Ecuaciones generales de la LT

$$\boxed{\begin{aligned}-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}&=R\ i(z,t)+L\ \frac{\partial i(z,t)}{\partial t}\\[2ex]-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}&=G\ v(z,t)+C\ \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}\end{aligned}}$$

Ecuaciones del telegrafista

Finalmente

- Ecuación de ondas para la tensión

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RG\, v + (LG + RC)\, \frac{\partial v}{\partial t} + LC\, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

- Ecuación de ondas para la corriente

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RG\, i + (LG + RC)\, \frac{\partial i}{\partial t} + LC\, \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Para una excitación de la forma :

$$V(t) = e^{j\omega t}$$

La solución general es :

$$V(z,t) = V_1 e^{-\alpha z}\, e^{j(\omega t - \beta z)} + V_2 e^{\alpha z}\, e^{j(\omega t + \beta z)}$$

V_1 es una onda que se propaga y se atenúa en la dirección positiva de z y representa la onda incidente .

V_2 es una onda que se propaga y se atenúa en la dirección negativa de z y representa la onda reflejada en el extremo opuesto de la fuente de señal.

Ecuaciones en el dominio de f

$$-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = R\ i(z,t) + L\,\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{dV}{dz} = RI + jwLI = (R + jwL)I$$

$$-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G\ v(z,t) + C\,\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{dI}{dz} = GV + jwCV = (G + jwC)V$$

Finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial z} &= (R + jwL)\ I \\ -\frac{\partial I}{\partial z} &= (G + jwC\ )\ V \end{aligned}}$$

Para la ecuación de v

$$\frac{d^2V}{dz^2} = (R + jwL)(G + jwC)\,V$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \gamma^2 V \quad \Leftarrow$$

$$\gamma^2 = (R + jwL)(G + jwC) \quad Constante\ \ de$$

$$propagacio\,n$$

Para una excitación de la forma :

$$V(t) = e^{j\omega t}$$

La solución general es :

$$V(z,t) = V_1 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} + V_2 e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}$$

V_1 es una onda que se propaga y se atenúa en la dirección positiva de z y representa la onda incidente .

V_2 es una onda que se propaga y se atenúa en la dirección negativa de z y representa la onda reflejada en el extremo opuesto de la fuente de señal.

Para la corriente se puede obtener una solución semejante :

$$i(z,t) = \frac{V_1}{(Z/Y)^{1/2}} e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)} + \frac{V_2}{(Z/Y)^{1/2}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$Z = R + j\omega L \qquad Y = G + j\omega C$$

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\alpha = \mathrm{Re}(\gamma) \qquad \beta = \mathrm{Im}(\gamma)$$

Cte. de atenuación

Cte. de fase

Frecuencia y longitud de onda de una onda armónica

Periodo espacial

$$A cos(wt \quad \beta z) = A \cos(wt \quad \beta(z + \lambda))$$

$$\beta\lambda = 2\pi \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

λ Es el periodo espacial o longitud de onda.

Periodo temporal

$$A\cos(wt \quad \beta z) = A\cos(w(t+T) \quad \beta z)$$

$$wT = 2\pi \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{w}$$

$$Ademas$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \;\Rightarrow\; v = \lambda f = \frac{2\pi}{\beta} f = \frac{w}{\beta} \Leftarrow$$

En general, la relación entre ω y β es no lineal. Esto lleva a que la velocidad de las ondas (la velocidad de fase), dependa de la frecuencia, fenómeno conocido como dispersión.

Por ejemplo en un pulso cuadrado algunas componentes de Fourier viajan más rápido que otras.

Dispersión

En una línea con pérdidas las ctes de atenuación y fase son, en general, funciones complicadas de la frecuencia.

En particular, β no es una función lineal de la frecuencia y por tanto la velocidad de fase es distinta para cada frecuencia.

- Entonces, cuando un pulso de ancho de banda grande se propaga por una línea de transmisión, cada componente de frecuencia del pulso viaja a diferente velocidad y llega en distinto momento al receptor.

- En consecuencia la forma del pulso cambia, el pulso se distorsiona.

- Este fenómeno, en general no deseado, se denomina dispersión. Se dice que la línea es dispersiva.

Líneas sin perdidas

En el caso sin pérdidas (R = G = 0) las expresiones generales se simplifican.

$$\alpha = 0 \qquad y \qquad \beta = w\sqrt{LC}$$

Constante de propagación: es imaginaria pura y lineal con la frecuencia
La velocidad de fase

$$v_p = \frac{w}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Velocidad de fase y de grupo

La velocidad k/v = ω para una onda armónica, se llama velocidad de fase. Sin embargo esta no es la velocidad de propagación real que se observa en todos los movimientos ondulatorios.
Una onda puede contar de una sola longitud de onda y de una sola frecuencia, pero este tipo de onda no es adecuada para transmitir información.
Algún parámetro varia acorde al mensaje a enviar.

A la velocidad con la que el pulso viaja se le llama velocidad de grupo que, en general, no tiene por que coincidir con la velocidad de fase.
Un tren de ondas o pulso no es una onda armónica o monocromática. Desarrollando en serie de Fourier se tienen varias frecuencias y varias longitudes de onda.

Para el caso de un pulso que contenga frecuencias entre ω − Δω y ω + Δω , siendo Δω pequeño (señal de banda angosta) la velocidad de grupo es:

$$V_g = \frac{dw}{dk} = \frac{d}{dk}(k.V) = V + k\,\frac{dV}{dk}$$

Si el medio no es dispersivo, la velocidad v es independiente de la frecuencia, por tanto:

$$V_g = v$$

Si el medio es dispersivo, la velocidad de grupo puede ser mayor o menor que la velocidad de fase. Esto lleva a una deformación de la onda del paquete que, desde el punto de vista de transmisión de información codificada en señales electromagnéticas, se traduce en distorsión y/o pérdida de datos.

Los medios dispersivos se clasifican:

a) Dispersión normal:

$$\frac{dV}{d\lambda} > 0 \quad \Rightarrow V_g < V$$

b) Dispersión anómala:

$$\frac{dV}{d\lambda} < 0 \quad \Rightarrow V_g > V$$

En los materiales con pérdidas, o sea, conductores, la dispersión es siempre anómala.

Difusión

Ecuación de difusión

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

A f donde podemos despreciar el efecto inductivo y las perdidas en el capacitor, la ecuación de la línea :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC\,\frac{\partial V}{\partial t}$$

Tiene la misma forma que la ecuación de difusión.