PRÁCTICA 5

1. A partir de las ecuaciones de Maxwell homogéneas defina los potenciales electromagnéticos y mediante las ecuaciones inhomogéneas determine las ecuaciones que satisfacen. Muestre que pueden elegirse potenciales que satisfagan cada una de las siguientes condiciones de gauge: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ (Coulomb); $\frac{1}{c}\,\partial_t\phi+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ (Lorenz); $\phi=0$ (temporal); $A_3=0$ (axial). En cada caso determine la simetría de gauge remanente, las ecuaciones que satisfacen los potenciales y sus soluciones.
2. Calcule en el gauge de Coulomb los potenciales generados por un dipolo que actúa en un instante dado. Muestre que los campos electromagnéticos son causales y que se propagan con velocidad c.
3. Derive la generalización de Jefimenko para las leyes de Coulomb y de Biot-Savart. Calcule, en particular, los campos electromagnéticos generados por una carga puntual y muestre que el resultado es equivalente a las expresiones de Heaviside y Feynman.
4. *a*) Muestre que las ecuaciones de Maxwell implican la conservación local de la carga.
   b) Muestre que las ecuaciones de Maxwell en el vacío (y la densidad de energía) son invariantes ante la transformación que intercambia los campos eléctricos y magnéticos $\vec{E}\to c\,\vec{B}$ y $\vec{B}\to-\vec{E}/c$.
   c) Determine la forma en que deben transformar los campos electromagnéticos ante traslaciones, rotaciones, transformaciones de paridad, de inversión temporal y de conjugación de carga ($Q\to-Q$) si imponemos que éstas sean simetrías de las ecuaciones de Maxwell.
5. Muestre que la fuerza ejercida por el campo electromagnético sobre un átomo neutro de momento dipolar $\vec{p}$ está dada por $(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}+\dot{\vec{p}}\wedge\vec{B}$. Utilizando este resultado muestre que la variación por unidad de tiempo del impulso mecánico por unidad de volúmen $\vec{P}_{\rm mec}$ que acompaña a una onda plana en un medio no magnético con índice de refracción n está dada por $\dot{\vec{P}}_{\rm mec}=\frac{1}{2}(n^2-1)\dot{\vec{P}}_{EM}$.
6. *a*) Un campo eléctrostático induce una corriente uniforme sobre un material descargado. Calcule el trabajo realizado sobre las cargas por unidad de tiempo. Verifique el resultado a partir del flujo del vector de Poynting.
   b) Calcule la fuerza por unidad de área ejercida entre dos placas paralelas que transportan una densidad de corriente uniforme (ej. 1 de la práctica 4.) Verifique el resultado a partir del flujo del tensor energía-impulso.
7. Determine la solución general de la ecuación de ondas homogénea en una dimensión con condiciones iniciales dadas. Escriba, en particular, la soluciones $\phi(x,t)$ de la ecuación de ondas que satisfacen:
   a) $\phi(x,0)=e^{-x^2}\,;\,\partial_t\phi(x,0)=0$
   b) $\phi(x,0)=0\,;\,\partial_t\phi(x,0)=H(a-|x|)$
8. La propagación de una onda plana en un medio dispersivo está dada por

$$\phi(x,t)=\int\partial_tK(x-x',t)\phi(x',0)\,dx'+\int K(x-x',t)\partial_t\phi(x',0)\,dx'$$

   a) Escriba una expresión que permita calcular $K(x,t)$ a partir de la relación de dispersión $\omega=\omega(k)$.

b) Calcule $\partial_t K(x,t)$ para un plasma de electrones de muy baja densidad. Determine la evolución temporal de un pulso electromagnético en este medio. Calcule las velocidades de grupo y de fase. ¿Pueden ser infinitas estas velocidades? ¿Cómo explica este fenómeno?

c) Considere un modelo de dispersión dado por $\omega(k) = a + b\, k^2$ y calcule $\partial_t K(x,t)$. Determine la evolución temporal en este material de un campo cuyos valores iniciales son

$$\phi(x,0) = e^{-\frac{x^2}{L^2}} \cos(k_0\, x) \qquad \partial_t \phi(x,0) = 0\,.$$

Verifique que la envolvente se propaga con la velocidad de grupo y que los extremos locales lo hacen con la velocidad de fase. ¿Pueden ser estas velocidades mayores que c? ¿Por qué? Grafique la dispersión del paquete como función del tiempo.

9. Una onda plana monocromática incide normalmente sobre una lámina dieléctrica. Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión. Calcule la longitud de onda para la cual toda la energía incidente es transmitida. Interprete este resultado.

10. Considere un material que contiene N cargas e de masa m por unidad de volumen sometidas a una fuerza de restauración caracterizada por una frecuencia ω_0 y a una fuerza disipativa caracterizada por un coeficiente γ. Muestre que la permitividad debida a estas cargas está dada por $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + Ne^2/m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 - i\,\gamma\,\omega)^{-1}$. Describa la dispersión anómala y la absorción resonante.

    A partir del coeficiente de absorción de aguas oceánicas explique por qué nuestros ojos perciben longitudes de onda comprendidas entre los $\sim$ 380 y 780 nm.

    Considere un plasma de electrones ($\omega_0 = \gamma = 0$) y explique el comportamiento de los campos electromagnéticos a frecuencias menores que la frecuencia de plasma.

    Considere un medio conductor y deduzca la ley de Ohm: $\vec{J} = \sigma(\omega)\,\vec{E}$, siendo $\sigma(\omega) = Ne^2/m \cdot (\gamma - i\,\omega)^{-1}$. Estudie la fase relativa entre $\vec{E}$ y $\vec{J}$ como función de ω/γ. Explique por qué los metales reflejan la luz visible y transmiten el ultravioleta (desprecie γ). Determine el número de onda en función de la frecuencia y de la conductividad. Considere pequeños y grandes valores de $\sigma/\omega\epsilon$. Describa la fase relativa y los módulos de los campos $\vec{E}, \vec{B}$.

11. Una onda monocromática incide normalmente sobre una lámina metálica. Calcule los coeficientes de transmisión y de reflexión en términos de la longitud de penetración.

"–Porque veas, Sancho, el bien que en sí encierra la andante caballería y cuán a pique están los que en cualquiera ministerio della se ejercitan de venir brevemente a ser honrados y estimados del mundo, quiero que aquí a mi lado y en compañía desta buena gente te sientes, y que seas una mesma cosa conmigo, que soy tu amo y natural señor; que comas en mi plato y bebas por donde yo bebiere, porque de la caballería andante se puede decir lo mesmo que del amor se dice: que todas las cosas iguala."