PRÁCTICA 0

1. Utilizando la ley de Gauss, calcule el potencial electrostático de las siguientes distribuciones de carga:
   a) Una carga puntual.
   b) Un alambre infinito con densidad lineal de carga homogénea.
   c) Un plano con densidad superficial de carga homogénea.

2. La propiedad del campo electrostático $\vec{E}$ de ser conservativo y la ley de Gauss indican
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0\,, \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$
para cualquier curva cerrada C y cualquier superficie cerrada S (siendo Q la carga encerrada por S). Utilice los teoremas de Stokes y de Gauss para deducir las ecuaciones diferenciales para el campo electrostático.

3. Una carga puntual es colocada en cada uno de los vértices de un cuadrado.
   a) Muestre que una carga de prueba del mismo signo colocada en el centro del cuadrado está en equilibrio estable frente a pequeños desplazamientos en el plano del cuadrado pero es inestable para desplazamientos normales al plano.
   b) ¿Qué sucede si colocamos otras dos cargas en el eje normal al cuadrado, a ambos lados del mismo? ¿Pueden generarse puntos de equilibrio estable con una distribución estática de cargas?

4. Utilizando la convención de suma para índices repetidos, demuestre las siguientes propiedades:
   a) $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\phi = 0$
   b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0$
   c) $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

5. Escriba el operador Laplaciano en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.

La función δ de Dirac

La delta de Dirac δ es una funcional que asigna a cada función $\phi(x)$ sobre el eje real –$x \in \mathbb{R}$– (si cumple determinadas propiedades) su valor en el origen:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\phi(x) := \phi(0) \tag{1}$$
Aunque escribimos $\delta(x)$, la delta de Dirac no es una función de x; asimismo, la expresión anterior no representa una integral en el sentido usual, sólamente indica que δ asigna a la función ϕ su valor en el origen. Sin embargo, utilizaremos esta notación porque permite recordar ciertas propiedades de la funcional $\delta(x)$ y “demostrar” ciertas otras que usaremos en este curso.

6. A partir de la expresión (1) justifique las siguientes propiedades:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1\,, \qquad \delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0 \tag{2}$$

En este curso tomaremos las propiedades (2) como definición de $\delta(x)$, esto es: una "función" que se anula en todos los puntos del eje real, excepto en el origen, y cuya "integral" vale 1. Aunque, por supuesto, no existe ninguna función con esas características, la definición (2) será suficiente para nuestras operaciones con la delta de Dirac. Operaremos con $\delta(x)$ "como si fuese una función" y con la expresión (1) "como si representase una integral" y de esta manera deduciremos expresiones matemáticamente válidas cuyas demostraciones formales pertenecen a la Teoría de Distribuciones.

7. A partir de la definición (2), verifique que las siguientes sucesiones de funciones:

$$a) \quad f_n(x) := \left\{ \begin{array}{ll} n & \text{si } |x| < 1/2n \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2n \end{array} \right.$$

$$b) \quad f_n(x) := \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

$$c) \quad f_n(x) := \tfrac{1}{\pi} \tfrac{2n}{4n^2x^2+1}$$

satisfacen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$. Grafíquelas.

8. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x)\delta(x-a) = \phi(a)$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi(x)\delta'(x-a) = -\phi'(a)$

   c) Si los ceros x_i de $\phi(x)$ son simples $\to \delta(\phi(x)) = \sum_i \frac{1}{|\phi'(x_i)|}\, \delta(x-x_i)$

9. En el espacio tridimensional la delta de Dirac está dada por

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) := \delta^{(3)}(x,y,z) := \delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z)$$

Muestre que $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = 0$ excepto para $\vec{r} = \vec{r}\,'$ y que

$$\int_V d^3r\, \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,') = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \vec{r}\,' \in V \\ 0 & \text{si } \vec{r}\,' \notin V \end{array} \right. \qquad (3)$$

Utilice la expresión (3) para determinar cómo cambia la delta de Dirac ante un cambio de coordenadas. Escriba $\delta^{(3)}(x,y,z)$ en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.

10. A partir del campo eléctrico de una carga puntual

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\check{r}}{r^2}$$

calcule $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ y $\int_{S^2} \vec{E}\cdot d\vec{S}$, donde S^2 es una esfera centrada en el origen. ¿Se verifica el teorema de Gauss? ¿Por qué? Muestre que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = Q/\epsilon_0 \cdot \delta^{(3)}(\vec{r})$. Interprete este resultado.

11. Utilizando la δ de Dirac, exprese la densidad de carga $\rho(\vec{r})$ de las siguientes distribuciones:

    a) Cuatro cargas puntuales localizadas en los vértices de un cuadrado.
    b) Un anillo de carga Q (distribuida homogéneamente) y sección transversal despreciable.
    c) Un alambre infinito con densidad lineal de carga homogénea.

12. Dada una función $\phi(x)$ integrable, se define su transformada de Fourier $\tilde{\phi}(k)$

$$\tilde{\phi}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \phi(x)$$

Si $\phi(x)$ es diferenciable se demuestra la relación inversa

$$\phi(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \tilde{\phi}(k)$$

Utilice estas expresiones para hallar una representación integral de $\delta(x-a)$.

Desarrollo de funciones en una base completa

En todo espacio vectorial V de dimensión n puede elegirse una base de vectores $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$; la condición suficiente para que este conjunto sea una base es que sus vectores sean linealmente independientes. En ese caso, todo vector $\vec{v}$ de V puede desarrollarse en términos de los elementos de la base:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \vec{e}_i$$

Si los elementos de la base son ortogonales, ¿cómo se calculan los coeficientes c_i?

El espacio de funciones $\phi(x)$ definidas sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita (¿por qué?). Bajo ciertas condiciones bastante generales, estas funciones también pueden desarrollarse en términos de una base ortogonal, esto es, un conjunto discreto de infinitas funciones ortogonales[1] $\{e_1(x), e_2(x), \ldots\}$:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\, e_i(x) \tag{4}$$

¿Cómo calcularía los coeficientes c_i?

Naturalmente, no es suficiente que las funciones de este conjunto sean linealmente independientes para garantizar que formen una base. En este curso utilizaremos ciertos conjuntos de funciones que son base del espacio de funciones, pero no demostraremos por qué lo son.

13. El conjunto $\{e_n(x) := e^{2\pi i\, nx}\,, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base del espacio de funciones sobre el intervalo $[0, 1]$. Esto implica que toda función $\phi(x)$ (si satisface ciertas condiciones bastante generales) puede escribirse

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{2\pi i\, nx}$$

Muestre que las funciones $e_n(x)$ de la base son ortogonales. Considere la función $\phi(x) = x$ y calcule los coeficientes c_n. Utilizando estos coeficientes, calcule las sumas finitas

$$\phi_N(x) := \sum_{-N}^{N} c_n\, e^{2\pi i\, nx}$$

Compare la función $\phi(x) = x$ con las funciones $\phi_N(x)$, para $N = 0, 1, 2, 10, 100$. Grafíquelas.

---

[1] Recuérdese que la ortogonalidad de estas funciones se define en términos de la integral: $\int_a^b dx\, e_i^*(x)\, e_j(x) = \delta_{ij}$.

"Procurad también que, leyendo vuestra historia, el melancólico se mueva a risa, el risueño la acreciente, el simple no se enfade, el discreto se admire de la invención, el grave no la desprecie, ni el prudente deje de alabarla."