Mecánica Cuántica I

Prof. Carlos García Canal
JTP Aníbal Iucci

Práctica 9

Año 2012

1. Dada una matriz compleja arbitraria X de 2×2, mostrar que la misma se puede escribir como

$$X = x_\mu \sigma^\mu, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, \qquad \sigma^\mu = (1_{2\times 2}, \boldsymbol{\sigma})$$

donde σ^i $(i = 1, 2, 3)$ son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Encontrar la relación que existe entre x_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ y $\mathrm{tr}\, X$, $\mathrm{tr}(\sigma^i X)$.
   b) Qué condiciones satisfacen los x_μ si: X es hermítica, real, unitaria?

2. Mostrar que el determinante de la matriz de 2×2: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a}$, es invariante frente a la transformación

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a}' \equiv \exp\left(\frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \phi}{2}\right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{a}\, \exp\left(-\frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \phi}{2}\right)$$

Hallar $a^{i\prime}$ en términos de a^i cuando $\hat{\boldsymbol{n}}$ se elige en la dirección z^+.

3. Sea un sistema de spin $\frac{1}{2}$ con $|\pm\rangle \equiv |s_z = \pm\frac{\hbar}{2}\rangle$ ortonormales.

   a) Mostrar que

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2} \left(|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|\right) \\ S_y &= -i\frac{\hbar}{2} \left(|+\rangle \langle -| - |-\rangle \langle +|\right) \\ S_z &= \frac{\hbar}{2} \left(|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|\right) \end{aligned}$$

   satisfacen

$$[S_i, S_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk} S_k \qquad \{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

4. Dado un vector arbitrario $\boldsymbol{x}$ en R^3,

   a) Obtenga los generadores infinitesimales de rotación G_k en los distintos ejes $k = 1, 2, 3$. Muestre que los puede elegir de modo que $(G_k)_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}$.
   b) Calcular los conmutadores de dichos generadores y comparar el resultado con las reglas de conmutación de las componentes del operador momento angular.
   c) Muestre que cualquier operador con tres componentes V_k, con $k = 1, 2, 3$ que satisface

$$[V_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} V_k \tag{1}$$

   donde J_i son las componentes del momento angular se transforma ante rotaciones como un vector, es decir, satisface que

$$\mathscr{D}(R)^\dagger V_i \mathscr{D}(R) = \sum_j R_{ij} V_j$$

   donde $\mathscr{D}(R)$ es el operador de rotación (suponga alrededor de un eje en la dirección de $\hat{\boldsymbol{n}}$ y en un ángulo ϕ) y R es la correspondiente matriz de rotación. Recuerde que si tomamos un momento angular orbital, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}$ entonces la relación dada en la Ec. (1) la satisfacen en particular los operadores $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p}$ (vea el Ej. 1 de la práctica 7).

d) Mostrar que el estado
$$e^{i\alpha L_z}|\boldsymbol{x}\rangle$$
es autoestado del operador de posición y calcular su autovalor.

5. Construya los autoestados del operador $\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$, donde $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un versor arbitrario definido por ángulos azimutal α y polar β, $|\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}};\pm\rangle$ en términos de la base $\{|\pm\rangle\}$.

6. Un chorro no polarizado de átomos de spin 1/2 pasa a través de una serie de experimentos de Stern-Gerlach que lo filtran de la siguiente manera:
   - El primero descarta $S_n = -1/2$;
   - El segundo descarta $S_z = -1/2$;
   - El tercero acepta $S_n = -1/2$;

   donde $S_n \equiv \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{S}$, and $\hat{\boldsymbol{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un angulo β con el eje z.

   a) Qué porcentaje del chorro inicial se mide después del tercer filtro?

   b) Para qué valor de β dicha intensidad es máxima?

   c) Por qué un experimento de este tipo no se realiza con haces de electrones?

7. Considerar un sistema de spin 1/2 con hamiltoniano
$$\hat{H} = \omega\hat{S}_x$$
   a) Encontrar los autoestados del mismo y sus correspondientes energías.

   b) Hallar la probabilidad de que el sistema se encuentre en los autoestados de $\hat{S}_y$ a tiempo $t(>0)$ sabiendo que se encontraba en un autoestado de $\hat{S}_z$ a $t = 0$.

   c) Calcular en tal caso ΔS_x y ΔS_y como funciones del tiempo y verificar la relación de incerteza correspondiente.

8. Considere una secuencia de rotaciones de Euler representada por
$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{1/2}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_3\right)\exp\left(-i\frac{\beta}{2}\sigma_2\right)\exp\left(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_3\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$
   Debido a las propiedades de grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una *única* rotación de ángulo θ alrededor de algún eje $\hat{\boldsymbol{n}}$. Hallar θ y $\hat{\boldsymbol{n}}$.

9. Considerar una partícula de spin 1/2 en un campo central.

   a) Hallar la forma de las autofunciones que sean simultáneamente autoestados de L^2, J^2, J_z, donde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$.

   b) Hallar los posibles valores de L_z y S_z , sus respectivas probabilidades y sus valores medios.

10. Considere dos partículas de spin 1/2. Encuentre los estados que son simultáneamente autoestados de S_1^2, S_2^2, S^2 y S_z, donde $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$.

11. Considere el Hamiltoniano para dos spines acoplados con una acoplamiento antiferromagnético ($J > 0$) en un campo magnético uniforme en la dirección z
$$H = J\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 + h(S_1^z + S_2^z)$$
    Encuentre los autoestados y autovalores de H.Haga un gráfico de las cuatro energías como función de h. Muestre que existe un valor crítico del campo h_c para el cual se produce una "transición de fase cuántica"(un cambio en el estado fundamental de H al variar un parámetro del Hamiltoniano). Cuál es el estado fundamental para los distintos valores de h. Calcule la magnetización en cada fase ($m = \langle S_z\rangle$) donde $S_z = S_1^z + S_2^z$ es el spin total.

12. El Hamiltoniano un sistema electrón-positrón en presencia de un campo magnético uniforme en la dirección z puede escribirse como

$$H = J\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \frac{e}{\mu c}\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2)$$

donde $\boldsymbol{S}_1$ y $\boldsymbol{S}_2$ son los operadores de spin de el positrón y el electrón respectivamente. Encuentre las autoenergías y los autoestados de H.

13. Tenemos que sumar dos momentos angulares $j_1 = 1$ y $j_2 = 1$ para formar estados de $j = 2, 1, 0$. Usando el método de operadores de "bajada" y "subida" ó la relación de recurrencia, expresar los nueve autoestados $\{j, m\}$ en términos de $|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$.

14. Encuentre los niveles de energía (llamados niveles de Laundau en este caso) y las autofunciones de un electrón en un campo magnético constante en la dirección del eje z.