

Se definen los operadores de aniquilación a y creación $a^\dagger$ por

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right)$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right)$$

siendo ω una constante con dimensiones de seg^{-1} .

1. Calcular los elementos de matriz del operador número, $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, en la base de ocupación del oscilador armónico unidimensional. Relacionar la energía con el número de cuantos creados por $\hat{a}^\dagger$.
2. Evalúe $\langle m|x|m\rangle$, $\langle m|p|m\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|m\rangle$, $\langle m|x^2|m\rangle$ y $\langle m|p^2|m\rangle$. Verifique el teorema virial para los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de energía. Obtenga la relación de incerteza para x y p para un autoestado arbitrario $|n\rangle$ y muestre que únicamente en el estado fundamental se minimiza el producto de las incertezas.
3. Considere un oscilador armónico simple unidimensional. Algebraicamente, es decir, sin usar funciones de onda,
 - a) Construir una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que $\langle x \rangle$ sea máximo.
 - b) Suponiendo que el oscilador está en el estado construido en a) a $t = 0$. Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en el esquema de Schrödinger? Evaluar $\langle x \rangle$ como una función del tiempo para $t > 0$ usando (i) el esquema de Schrödinger y (ii) el esquema de Heisenberg.
 - c) Mostrar que

$$\langle 0 | e^{ik\hat{x}} | 0 \rangle = \exp \left[-\frac{k^2}{2} \langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle \right]$$

- d) Calcular la **función de correlación** definida por

$$C(t) = \langle x(t)x(0) \rangle,$$

donde $x(t)$ es el operador de posición en el esquema de Heisenberg, y evaluar $C(t)$ explícitamente para el estado fundamental del oscilador.

4. Calcular los primeros polinomios de Hermite a partir de la acción de $\hat{a}^\dagger$ sobre la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico unidimensional.
5. Un estado coherente de un oscilador armónico unidimensional es definido como un autoestado del operador (no hermítico) de aniquilación $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

donde λ es, en general, un número complejo.

- a) Probar que

$$|\lambda\rangle = e^{\frac{-|\lambda|^2}{2}} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

es un estado coherente normalizado.

- b) Probar que la relación de incerteza es mínima para estos estados.

c) Expandir $|\lambda\rangle$ como

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle$$

Mostrar que la distribución de $|f(n)|^2$ es del tipo Poisson. Encontrar el valor más probable de n en este estado, y luego el de H .

d) Interpretar el estado del ítem a) como el estado fundamental trasladado en el espacio x, p .