Mecánica Cuántica I

Prof. Carlos García Canal
JTP Aníbal Iucci

Práctica 6

Año 2012

1. **Cambio de representación**:

   a) Probar el siguiente teorema
   Teorema: dados dos conjuntos base de kets $\{|a^{(i)}\rangle\}, \{|b^{(i)}\rangle\}$, satisfaciendo ambos ortonormalidad y completitud, entonces existe un operador unitario U tal que

   $$|b^{(1)}\rangle = U|a^{(1)}\rangle, \quad |b^{(2)}\rangle = U|a^{(2)}\rangle, \quad |b^{(3)}\rangle = U|a^{(3)}\rangle, \dots \quad . \tag{1}$$

   Por operador unitario se entiende un operador que satisface

   $$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \tag{2}$$

   (Prueba: considerar el operador $U = \sum_k |b^{(k)}\rangle\langle a^{(k)}|$)

   b) Calcular los elementos de matriz del operador U en la base vieja $\left\{|a^{(i)}\rangle\right\}$.

   c) Dado un ket arbitrario $|\alpha\rangle$ cuyos coeficientes en la base vieja $\langle a^{(i)}|\alpha\rangle$ son conocidos, cuánto valen los coeficientes de $|\alpha\rangle$ en la base nueva?. Mostrar que

   $$\langle b^{(i)}|\alpha\rangle = \sum_l \langle a^{(i)}|U^\dagger|a^{(l)}\rangle\langle a^{(l)}|\alpha\rangle \tag{3}$$

   en otras palabras, en notación matricial (3) establece que la matriz columna de coeficientes de $|\alpha\rangle$ en la base nueva se obtiene aplicando la matriz cuadrada $U^\dagger$ a la matriz columna en la base vieja

   $$(\text{Nuevos}) = U^\dagger(\text{Viejos}) \tag{4}$$

2. Encontrar las autofunciones del operador x y del operador p en representación de coordenadas. Para la onda plana discutir la constante de normalización.

3. El operador de traslación $T(\vec{a})$ se define como $T(\vec{a})\,\Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}+\vec{a})$. Expresar $T(\vec{a})$ en términos de $\vec{p}$ y mostrar que es unitario.

4. Sean $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ autoestados de un operador hermítico A con autovalores a' y a'' respectivamente ($a' \neq a''$). El operador Hamiltoniano está dado por

   $$H = \delta\left(|a'\rangle\langle a''| + |a''\rangle\langle a'|\right) \tag{5}$$

   siendo δ un número real.

   a) Claramente $|a'\rangle$ y $|a''\rangle$ no son autoestados del Hamiltoniano. Obtener los autoestados del Hamiltoniano y sus correspondientes energías.

   b) Suponiendo que el sistema se encuentra a $t = 0$ en el estado $|a'\rangle$, escribir el vector de estado en el esquema de Schrödinger a tiempo $t > 0$.

   c) Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|a''\rangle$ para $t > 0$, dada la condición inicial del item anterior?

5. Considerar un sistema físico de tres estados, con base ortonormal $\{|u_i\rangle, i = 1,2,3\}$. En esta base el hamiltoniano H y los observables A, B están representados por las siguientes matrices

   $$H = E_0\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad A = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & i\\ 0 & -i & 1\end{pmatrix} \qquad B = b\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

   a) Hallar $[H,A], [H,B], [A,B]$.

b) Encontrar una base ortonormal $\{|w_i\rangle, i = 1, 2, 3\}$ en la cual A y H sean diagonales simultáneamente. Expresar los observables H, A, B en la nueva base.

c) Si el sistema se encuentra en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{1}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle$$

øqué valores de la energía pueden obtenerse y con qué probabilidades? Hallar el valor de expectación del hamiltoniano en dicho estado.

d) Si inicialmente se mide A, qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidades?. Hallar $\langle A\rangle$ en dicho estado. Idem para B.

e) Si al medir la energía en el punto c) se obtiene $E = 2E_0$, qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades en una medida posterior de B?

6. *a*) Siendo x y p los operadores coordenada y momento en una dimension. Calcular los conmutadores $[x, F(p)]$ y $[p, G(x)]$ donde F y G son funciones arbitrarias desarrollables en serie de potencias.

   b) Encontrar la relación de incerteza para los operadores x y $F(p)$.

   c) Probar que $e^{\frac{iap}{\hbar}} |x'\rangle$ y $e^{-\frac{ikx}{\hbar}} |p'\rangle$ son autoestados de x y p respectivamente, y halle sus autovalores. Interpretar físicamente los operadores exponenciales.

7. *a*) Determinar los desarrollos de un estado $|\psi\rangle$ arbitrario en las bases de autoestados de x y p. Hallar la relación entre las coordenadas del estado en base $\{|x\rangle\}$ y sus coordenadas en base $\{|p\rangle\}$.

   b) Probar que

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p') \qquad \langle x'|p\,|\alpha\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \psi_\alpha(x')$$

$$\langle\beta|x|\alpha\rangle = \int dp'\, \phi^*_\beta(p')\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \phi_\alpha(p')$$

$$\langle\beta|p\,|\alpha\rangle = \int dx'\, \psi^*_\beta(x')(-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x'} \psi_\alpha(x')$$

   donde $\psi_\alpha(x') \equiv \langle x'|\alpha\rangle$ y $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ son las coordenadas introducidas en el item anterior.

   c) Dado el Hamiltoniano clásico $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ escribir la ecuación de Schrödinger en espacio de impulsos.

   d) Dada la función de onda de una partícula en una dimensión $\psi(x)$, expresar la probabilidad de hallarla viajando hacia la derecha.