Mecánica Cuántica I

Prof. Carlos García Canal
JTP Aníbal Iucci

Práctica 5

Año 2012

1. Probar las siguientes igualdades:

   a) $[A, BC] = [A, B]\, C + B\, [A, C]$
   b) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (identidad de Jacobi)
   c) $[A, B]^\dagger = \left[B^\dagger, A^\dagger\right]$
   d) $[AB, CD] = -AC\, \{D, B\} + A\, \{C, B\}\, D - C\, \{A, D\}\, B + \{C, A\}\, DB$

2. Mostrar que

   a) Los autovalores de un operador hermítico son reales
   b) Autofunciones de un operador hermítico correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

3. Usando las reglas del álgebra de bra-kets,

   a) Dado $X = |\beta\rangle\, \langle\alpha|$, hallar $X^\dagger$
   b) Probar $\langle\alpha|\, X\, |\beta\rangle = \langle\beta|\, X^\dagger\, |\alpha\rangle^*$
   c) Probar $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$

4. *a*) Dados los operadores A y B, probar que

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}\, [A, [A, B]] + \frac{1}{3!}\, [A, [A, [A, B]]] + ...$$

   b) Mostrar que siendo t un parámetro real y A un operador,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$$

   c) Utilizando el resultado anterior probar que, si $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}.$$

5. Sean A y B dos observables. Suponga que los autoestados simultáneos de A y B, $\{|a; b\rangle\}$, forman una base completa ortonormal del espacio de representación. ¿Puede concluirse que $[A, B] = 0$?.

6. En un cierto instante, una partícula en el pozo infinito de la práctica 1 está descripta por la función de onda

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\ \cos(\frac{\pi x}{2a}) + \frac{i}{2\sqrt{a}}\ \sin(\frac{\pi x}{a}) - \frac{1}{2\sqrt{a}}\ \cos(\frac{3\pi x}{2a})$$

   a) Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula en los estados fundamental, segundo y tercer excitados ?
   b) Qué valores de impulso se pueden medir y con qué probabilidades?
   c) Qué valores de energía se pueden medir y con qué probabilidades?