Mecánica Cuántica I

Prof. Carlos García Canal
JTP Aníbal Iucci

Práctica 3

Año 2012

1. *Paridad*: Sea $\chi_E(x)$ una autofunción del Hamiltoniano de Schrödinger unidimensional, con autoenergía E; mostrar que si el potencial es una función par $V(x) = V(-x)$, entonces $\chi_E(-x)$ también es una autofunción del Hamiltoniano con el mismo autovalor de energía.

   Corolarios:

   O bien *i)* $\chi_E(x)$ y $\chi_E(-x)$ son linealmente independientes (estado de energía E doblemente degenerado). Pudiéndose elegir entonces combinaciones lineales pares e impares.

   O bien *ii)* $\chi_E(x)$ y $\chi_E(-x)$ son proporcionales, en cuyo caso mostrar que la constante de proporcionalidad es ± 1. Luego χ_E es o par o impar

2. Una partícula de masa m moviéndose en 1D está sujeta a un potencial armónico $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Expresar el valor de expectación de la energía $\hat{H}$ en términos de $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, Δx, Δp. Usando la relación de incerteza entre $\hat{x}$ y $\hat{p}$ mostrar que para cualquier estado se tiene

$$\langle H \rangle \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$$

3. Considerar un oscilador armónico unidimensional en el estado de número cuántico n

   a) Mostrar que su energía puede escribirse como

$$E_n = m\omega^2 \langle \hat{x}^2 \rangle_n$$

   donde $\langle \ldots \rangle_n$ significa el valor de expectación calculado en el estado $|\phi_n\rangle$. Comparar con el resultado clásico

   b) Calcular las dispersiones de $\hat{x}$ y $\hat{p}$.

4. Considerar un oscilador armónico unidimensional en el estado

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_0 + \frac{1}{2}\,\psi_1 + \frac{i}{2}\,\psi_2$$

   a) Calcular los valores de expectación de $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{H}$.

   b) Calcular la dispersión de $\hat{H}$;

   c) ¿Qué valores de energía se pueden observar y con qué probabilidades?

5. Considere una partícula de masa m sujeta a un potencial unidimensional de la siguiente forma:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}k\,x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

   a) ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

   b) ¿Cuál es el valor de expectación $\langle \hat{x}^2 \rangle$ en dicho estado?

6. Encontrar las autofunciones de energía χ_E de una partícula libre de masa m sujeta a condiciones de contorno periódicas

$$\chi_E(x) = \chi_E(x + L)$$

   ¿Cuáles son los valores posibles de la energía? ¿Cuál es la degeneración de los niveles? Comentar acerca del límite $L \to \infty$.

7. Mostrar que el espectro de energía del potencial periódico de Kronig-Penney,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n(a+b) < x < n(a+b)+a \\ V_0 & \text{si } n(a+b)+a < x < (n+1)(a+b) \end{cases}$$

con $n \in Z$, posee estructura de bandas (sugerencia: consultar bibliografía).

8. Sea una partícula de masa m en una dimensión ligada a un centro fijo por un potencial de la forma

$$V(x) = -v_0\, \delta(x) \quad , \quad v_0 > 0 \tag{1}$$

a) Determinar las dimensiones de v_o. Integrando la ecuación de Schrödinger en un entorno del origen mostrar que la derivada de la función de onda es discontinua.

b) Resolver la ecuación de autovalores de H en espacio de Fourier. Mostrar que sólo un autovalor negativo es posible. Sólo el estado ligado se encuentra por este método, no es así para los del continuo (no ligados), ¿Por qué?

c) El sistema se encuentra en el autoestado ligado. A $t = 0$ el potencial es súbitamente apagado (o sea, $V = 0$ para $t > 0$). Encontrar la función de onda para $t > 0$.

9. Mostrar que para $V(r) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo admite soluciones de la forma $\Psi(r) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$.

   ¿Cuál es la energía del estado Ψ? ¿Cuál es la solución general para estados estacionarios? ¿Y para no estacionarios?

10. Resolver la ecuación de Schrödinger tridimensional para un potencial de la forma

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L,\ 0 < y < L,\ 0 < z < L, \\ \infty & \text{en el resto} \end{cases}$$

   Estudiar la degeneración de los primeros niveles.