Mecánica Cuántica I

Prof. Carlos García Canal
JTP Aníbal Iucci

Práctica 2

Año 2012

1. Considere el pozo de potencial infinito del ejercicio 1.1,

   a) A tiempo $t = 0$,
   - Grafique el espectro, indicando características de cada nivel (degeneración, paridad, número de nodos, etc.).
   - Grafique las primeras autofunciones (no olvide normalizarlas).
   - Grafique la densidad de probabilidad $\rho(x)$ correspondiente.
   - Calcule $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ y $\langle \hat{H} \rangle$ en esos estados.

   b) Considere ahora la evolución temporal de los primeros autoestados:
   - Calcule la corriente de probabilidad.
   - Calcule la densidad de probabilidad.
   - Verifique la ecuación de continuidad.
   - Grafique la función de onda en función del tiempo (o al menos para distintos tiempos)
   - Calcule $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ y $\langle \hat{H} \rangle$ en función del tiempo.
   - ¿Qué ocurre si cambia una función de onda por una fase $e^{i\delta}$?

   c) Superposición.
   - Analice el estado $\psi(x, t)$ tal que
   $$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x)$$
   (donde ψ_0 es el estado fundamental, ψ_1 el primer excitado, etc.) según las consignas del ítem anterior.
   - ¿Es un estado ligado?
   - ¿Es un estado estacionario?

   d) Fluctuaciones cuánticas. Para un autoestado ψ_n genérico,
   - Compare la información contenida en $\langle \hat{x} \rangle$ y en la densidad de probabilidad $\rho(x)$.
   - Calcule $\Delta\hat{x}$, $\Delta\hat{p}$ y $\Delta\hat{H}$ en esos estados y analice la aplicación del principio de incerteza.

2. Considere el pozo de potencial finito asimétrico del ejercicio 1.2, llamando $V_1 = V$ y $V_2 = \eta V$.

   a) Escriba la ecuación que determina los autovalores de estados ligados en términos adimensionales.

   b) Identifique los parámetros independientes del problema, en forma adimensional.

   c) Busque soluciones gráficamente. Analice la existencia y cantidad de soluciones.

   d) Para $\eta = 2$ y ancho a a elección, grafique el estado fundamental y el primer excitado.

3. Estudie los casos particulares del problema anterior

   a) $V_1 = V_2 = V$ finito.

   b) $V_1 = V_2 \to \infty$

4. Partícula libre. Considere un autoestado de energía $E > 0$ para una partícula libre ($V(x) \equiv 0$).

   a) ¿Es degenerado? Si lo es, encuentre la degeneración y distinga autoestados ortogonales como autofunciones de otro operador. ¿Cuál será la situación en $d = 2$ y $d = 3$?

   b) Considere uno de los autoestados encontrados. ¿Es normalizable? ¿Es físicamente aceptable? ¿Es ligado? ¿Es estacionario?

c) Calcule, si es posible, $\langle\hat{x}\rangle$, $\Delta\hat{x}$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\Delta\hat{p}$ y $\langle\hat{H}\rangle$. Analice el principio de incerteza.

d) Grafique la función de onda a tiempo $t = 0$ y su evolución temporal.

e) Calcule la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad. Verifique la ecuación de continuidad.

f) Interprete la función de onda como descripción de un haz de partículas.

5. Escalón de potencial. Considere una partícula incidiendo desde la izquierda contra un escalón de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

con energía $0 < E < V$.

a) Decida las condiciones de contorno que expresan la situación descripta.

b) Encuentre la función de onda que resuelve la ecuación de Schrödinger con las condiciones de contorno elegidas.

c) Interprete la información contenida en la solución que obtuvo.

d) Calcule la profundidad de penetración de la partícula dentro del escalón.

e) Grafique todo lo anterior.

f) Investigue algún caso realista de aplicación.

6. Paquetes de ondas: Considerar la superposición de ondas en una dimensión dada por

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, g(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} \tag{1}$$

a. Dispersión Lineal: Cuando $\omega(k)$ es una función lineal la onda se denomina *no dispersiva*. Las ondas de luz en el vacío son un ejemplo, con $\omega(k) = ck$ donde c es la velocidad de la luz.

i. Mostrar que en este caso se obtiene

$$\Psi(x,t) = f(x - ct). \tag{2}$$

(Notar que si $f(x)$ es una función simple con un solo máximo en $x = x_0$, entonces $f(x - ct)$ tiene su máximo en $x - ct = x_0$, de manera que $x = x_0 + ct$ es la posición del máximo a tiempo t. En otras palabras el pulso viaja a lo largo del eje positivo x a la velocidad de la luz.)

b. Dispersión No-Lineal: Las cosas no son tan simples cuando $\omega(k)$ es no-lineal, tal es el caso de la Mecánica Cuántica.

Consideremos la superposición de dos ondas planas de momento $\hbar(k \pm \Delta k)$ con relación de dispersión $E(k) = \hbar\omega(k)$. Sea $\Delta\omega = \frac{d\omega}{dk}\Delta k$, la función de onda es

$$\psi \sim \left(e^{i(k+\Delta k)x - i(\omega+\Delta\omega)t} + e^{i(k-\Delta k)x - i(\omega-\Delta\omega)t}\right) \tag{3}$$

La cantidad **observable** $|\psi(x,t)|^2$ resulta estar dada por

$$|\psi(x,t)|^2 = (1 + \cos(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)) \tag{4}$$

La velocidad de este paquete esta dada por los puntos que mantienen $|\psi(x,t)|^2 =$ constante al cambiar t. Esta última condición se obtiene para $\Delta k\, x - \Delta\omega\, t =$ constante. La velocidad del paquete es entonces

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega(k)}{dk} \tag{5}$$

Esta es la llamada *velocidad de grupo*, que resulta ser la velocidad observada para el paquete.

ii. Suponiendo que la distribución en impulsos de un paquete de ondas está fuertemente centrada en k_0. Aproximando $\omega(k)$ por sus dos primeros términos en el desarrollo de Taylor mostrar que el paquete toma la forma

$$\Psi(x,t) \approx e^{-i(\omega(k_0) - k_0\, v_g)t} f(x - v_g t) \tag{6}$$

donde v_g, la llamada velocidad de grupo, está dada por

$$v_g = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right]_{k=k_0}. \tag{7}$$

Aparte de una fase (¿irrelevante?), el paquete se mueve con velocidad v_g. En otras palabras, la velocidad de grupo describe el movimiento de la interferencia constructiva de un paquete de ondas centrado en k_0.

Conclusión: Para la evolución libre $\omega = \hbar k^2/2m$ se obtiene que $v_g = \hbar k_0/m$. Este resultado es importante, pues permite recuperar el límite clásico en la descripción de la partícula libre, en los casos donde la aproximación es válida.