Mecánica Cuántica I

Prof. Carlos García Canal
JTP Aníbal Iucci

Práctica 1

Año 2012

1. Encuentre las autofunciones y autoenergías de una partícula en el pozo de potencial infinito

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < \frac{a}{2} \\ +\infty & \text{si } |x| > \frac{a}{2} \end{cases} \tag{1}$$

   Muestre que el conjunto de soluciones es ortogonal respecto del producto escalar

$$\langle f|g\rangle = \int_{-a/2}^{+a/2} dx\, f^*(x) g(x) \tag{2}$$

2. Encuentre las autofunciones y la ecuación trascendente que determina las autoenergías de los estados ligados de una partícula en el pozo de potencial asimétrico dado por

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < a \\ V_2 & \text{si } x > a \end{cases} \tag{3}$$

   donde $V_2 > V_1 > 0$. Estudie el caso $V = V_1 = V_2$. Obtenga la condición para la existencia de n estados ligados.

3. Encuentre los coeficientes de transmisión y reflexión para una barrera de potencial dada por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \tag{4}$$

   (con $V_0 > 0$) para las distintas posibilidades de la energía de partículas incidentes desde la izquierda.

4. Encuentre las autofunciones y autoenergías del potencial

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \frac{x}{a}}. \tag{5}$$

   Muestre que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo se puede escribir como

$$A^\dagger A \chi = (-k^2 + \alpha^2)\chi \tag{6}$$

   donde $A = \frac{d}{dx} + \alpha \tanh \frac{x}{a}$, $k^2 = -2mE/\hbar^2$ y α es un parámetro a determinar. Muestre, integrando por partes, que para toda función de onda normalizable χ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^* A^\dagger A \chi\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (A\chi)^* (A\chi)\, dx \geq 0 \tag{7}$$

   por lo tanto los autovalores de $A^\dagger A$ son no negativos. Luego la energía del estado fundamental debe satisfacer $k^2 \leq \alpha^2$. Muestre que existe una función de onda χ_0 (una vez elegido α apropiadamente) con energía $k^2 = \alpha^2$. Encuéntrela y grafíquela.

5. Deduzca la ecuación de continuidad asociada a la ecuación de Schrödinger unidimensional. Discuta las condiciones que conducen a la conservación de probabilidad.

6. *a*) Muestre que los estados ligados para hamiltonianos definidos sobre $\mathbb{R}$ son no degenerados.

   b) Muestre que el resultado anterior es valido también si el movimiento está clásicamente prohibido solo en uno de los extremos de $\mathbb{R}$.

c) Muestre que la$n$-ésima autofunción, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (es decir, la correspondiente al n-ésimo autovalor ordenados éstos en forma creciente) posee exactamente n nodos. Las autofunciones siguientes a la n-ésima poseen al menos un nodo entre dos nodos consecutivos de aquella.

d) Usando el resultado del inciso $6a$ muestre que las autofunciones correspondientes a estados ligados unidimensionales son reales módulo una fase independiente de x.

7. Dado el siguiente paquete de ondas

$$\psi(x,0) = C \exp[-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2} + i\bar{k}x] \tag{8}$$

a) Calcule la correspondiente distribución en impulsos.

b) Considerando una evolución libre ($H = p^2/2m$) encuentre $|\psi(x,t)|^2$, verificando que el paquete avanza según las leyes clásicas. Muestre sin embargo que la evolución dispersa al paquete, esto es, su ancho en espacio de coordenadas aumenta. Relacione los anchos en espacio de coordenadas y espacio de impulsos.

8. (Opcional): Considere la evolución temporal del paquete

$$\psi(x,0) = [\frac{1}{2\pi\sigma^2}]^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + i\bar{k}x\right), \qquad \sigma = \frac{a}{4}, \quad \bar{k} = \frac{15}{a} \tag{9}$$

y grafíquela para $t = \frac{n}{4}\frac{ma^2}{\hbar^2}$ con $n = 0, \ldots, 9$.