Análisis de Señales-Curso 2011

Procesos Aleatorios

Correlación y Densidad Espectral

Ruido

Energía de la señal(1)

- Debido a los distintos tipos de señales físicas que actúan en los sistemas, se definió el término energía de la señal, para TC:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt$$

- Si x(t) es una tensión, las unidades son V^2.S, falta dividir por R para ser la energía. Es decir la *energía de la señal* es proporcional a la *energía física*.

Energía de la señal(2)

- De acuerdo a lo anterior la energía de la señal es proporcional a la energía real y la constante de proporcionalidad es R. Para un tipo diferente de señal, la cte. de proporcionalidad será diferente.
- Para el caso discreto

$$E = \sum_{-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

Potencia de la señal(1)

- En muchas señales ni la integral ni la sumatoria anterior convergen, la energía de la señal es infinita pues no está limitada en tiempo.
- En estas señales es conveniente tratar con la potencia promedio de la señal en vez de con la energía

Potencia de la señal(2)

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Tiempo continuo

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2$$

Tiempo discreto

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Señales periódicas

Señales de Energía	Energía finita
Señales de Potencia	Potencia promedio finita (no nula)
Señales de Energía	Potencia promedio nula
Señales de Potencia	Energía total infinita
No periódicas	Señales de Energía
Aleatorias y periódicas	Señales de Potencia

Correlación

- Señales de Energía
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y\, (t+\tau)dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y\, [n+m]$$

Correlación

- Señales de Potencia
- En TC

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{T} x(t)\, y\,(t+\tau)\, dt$$

- En TD

$$R_{xy}[m] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, y\,[n+m]$$

Autocorrelación

- Señal de Energía

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x\,(t+\tau)dt$$

$$R_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \qquad R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

Autocorrelación

- Señal de Potencia

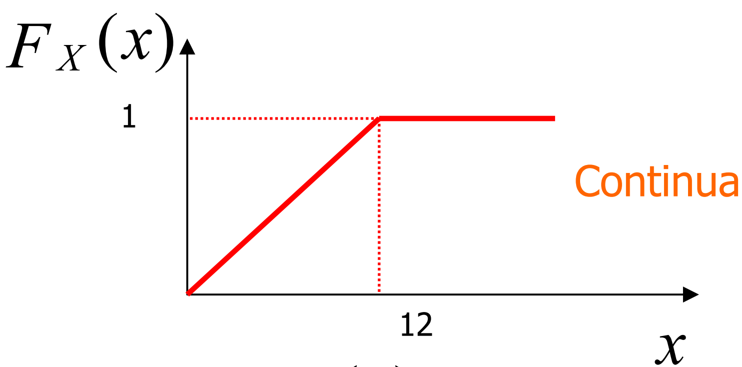
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_{xy}[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]x[n+m]$$

$$R_{xx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T} x^2(t)dt \qquad R_{xx}[0] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x^2[n]$$

Función Distribución

$$F_x(x_1) = P\{X \leq x_1\}$$



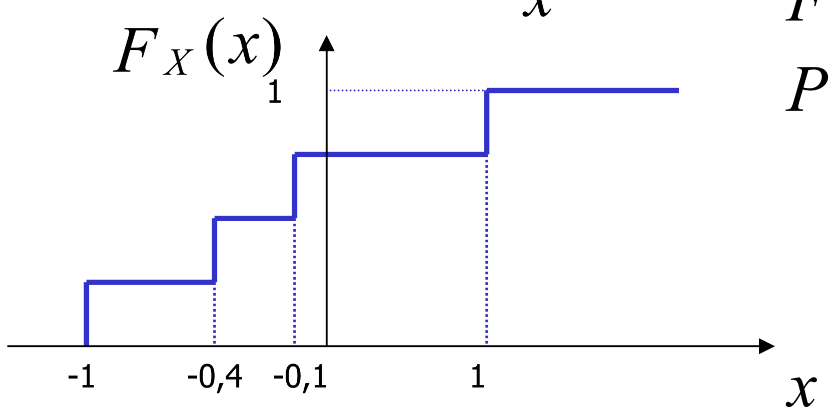
Algunas propiedades

$$F_X(\infty) = 1$$

$$0 \leq F_X \leq 1$$

$$F_X(x_1) < F_X(x_2) \quad con\ x_1 < x_2$$

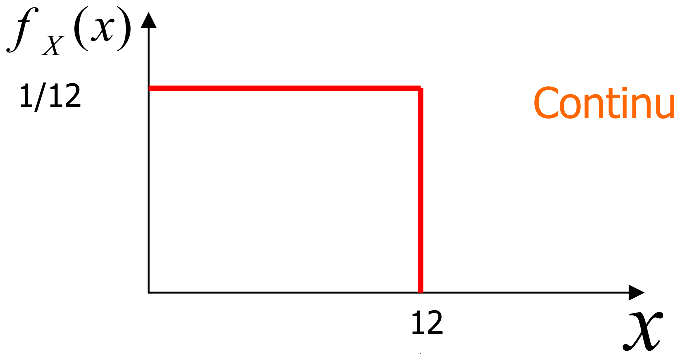
$$P\{x_1 < X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

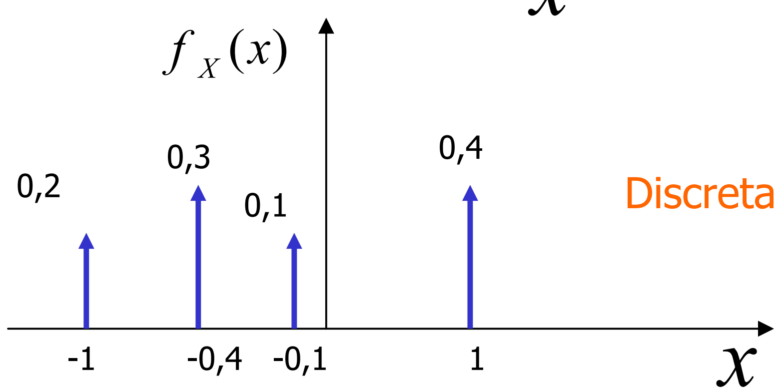


Discreta

Función densidad

$$f_x(x) = dF_x(x)/dx$$





Algunas propiedades

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$P\{x_1 < x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$$

Operaciones de una variable aleatoria

- Valor esperado

$$E[x] = \overline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)dx \quad \textit{variable aleatoria continua}$$

$$E[x] = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i) \quad \textit{variable aleatoria discreta}$$

- Momentos
  - Momentos alrededor del origen

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} X^n f_X(x)dx$$

m_0=1 Area bajo la curva

$m_1 = \overline{X}$

- Momentos centrales

$$\mu_n = E[\left(X - \overline{X}\right)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{X}\right)^n f_X(x)dx$$

μ_0=1 Area bajo la curva μ_1=0

- Varianza

$$\sigma_X^2 = E[\left(X - \overline{X}\right)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(X - \overline{X}\right)^2 f_X(x)dx =$$

$$= E[(X^2 - 2X\overline{X} + \overline{X}^2)]$$

$$= E[X^2] - \overline{X}^2 = m_2 - m_1^2$$

Función distribución y densidad conjunta

- Las probabilidades de 2 eventos (c/u)

$$A = \{X \leq x\} \quad y \quad B = \{Y \leq y\}$$

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad y \quad F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

- Definimos el evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$ Función distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$ Función densidad conjunta

Independencia estadística

- Dos eventos x e y son estadísticamente independientes si:

$$P\{X \le x; Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

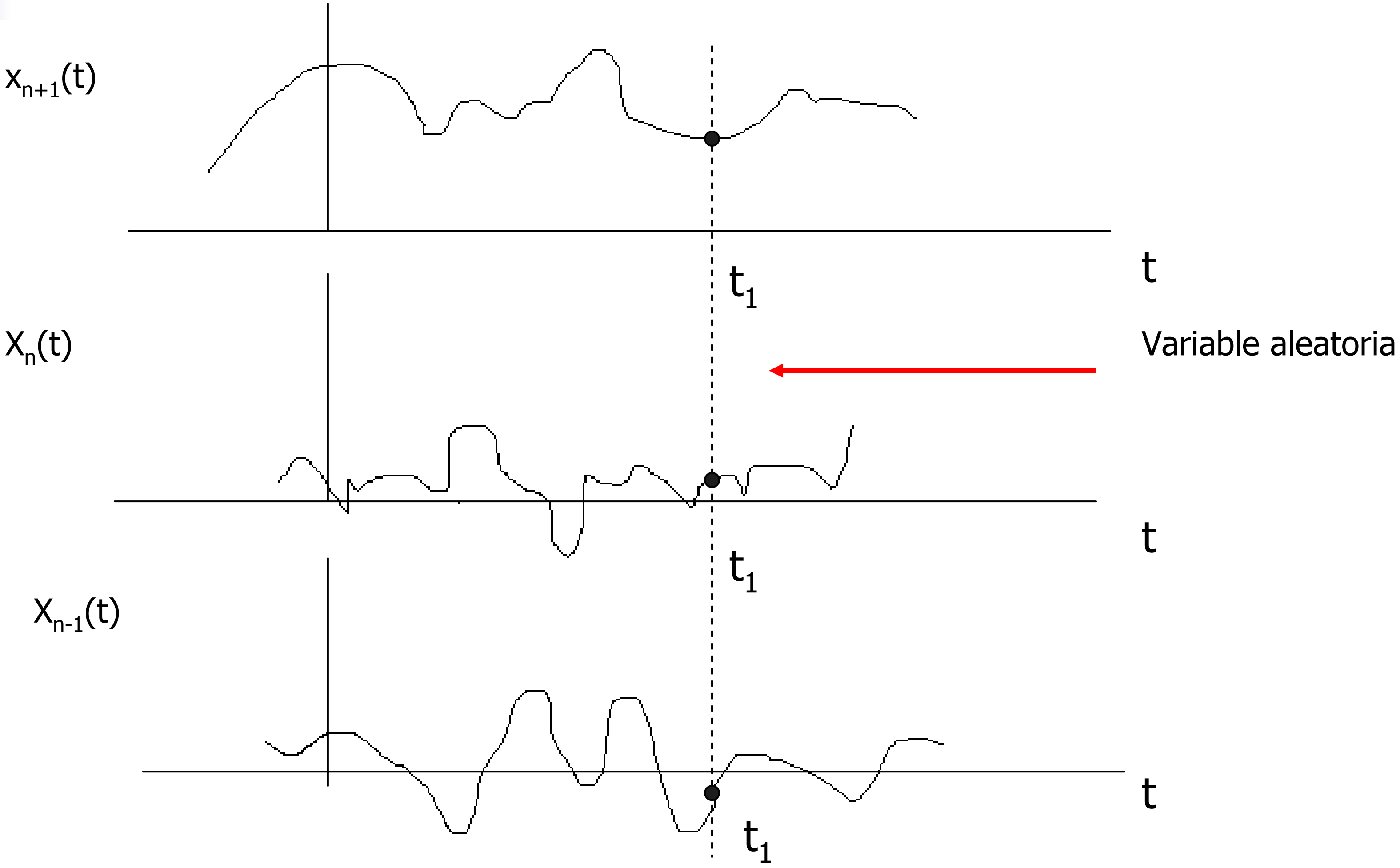
Motivación

- Encontramos señales aleatorias
- Deseadas (comunicación bits)
- No deseadas (ruido)
- Deseamos trabajar en el tiempo
- ¿ Cómo describimos estas señales en el tiempo ?

Procesos aleatorios.Concepto

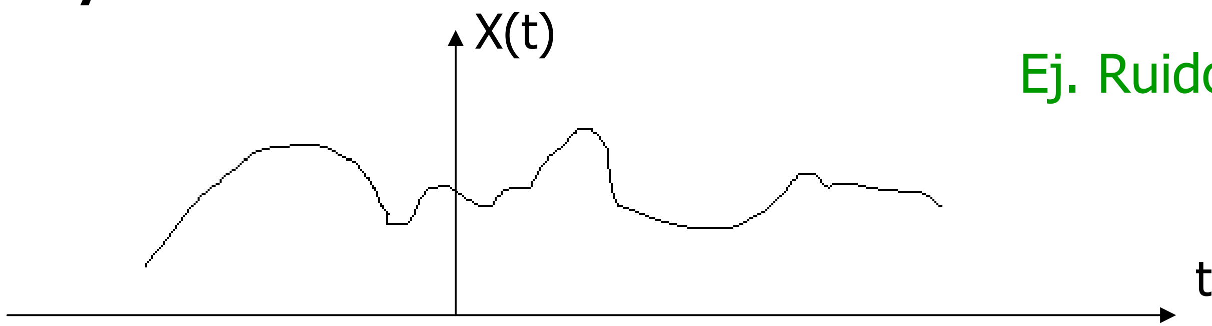
- Una variable aleatoria X función de las salidas s de un experimento.
- Ahora función de s y t   x(t,s)
- La familia de funciones X(t,s) es llamado un proceso aleatorio.
- Si t es fijo (t_1) y s variable, tenemos una variable aleatoria.

Proceso aleatorio



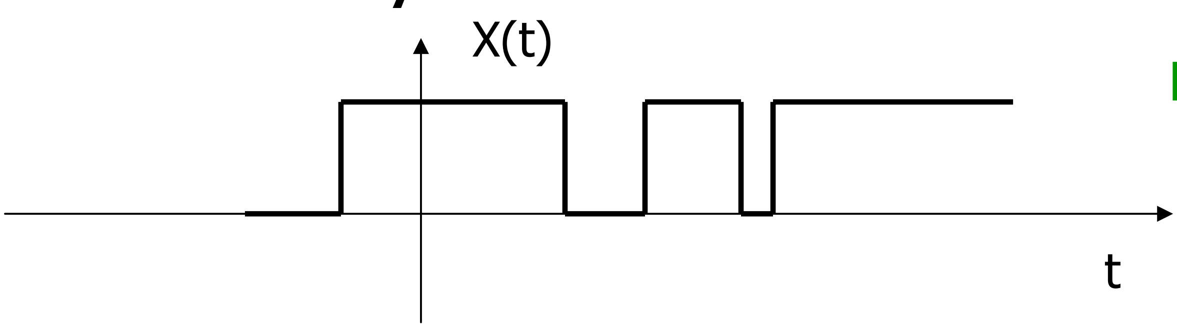
Clasificación de PA (1)

- X y t contínuos → PA contínuo



Ej. Ruido térmico

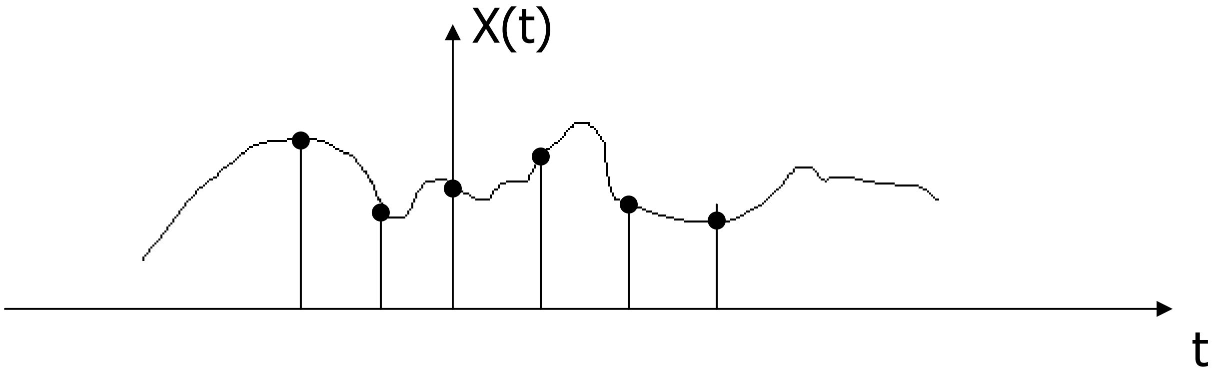
- X discreta y t contínuo → PA discreto



Ej. Bits

Clasificación de PA (2)

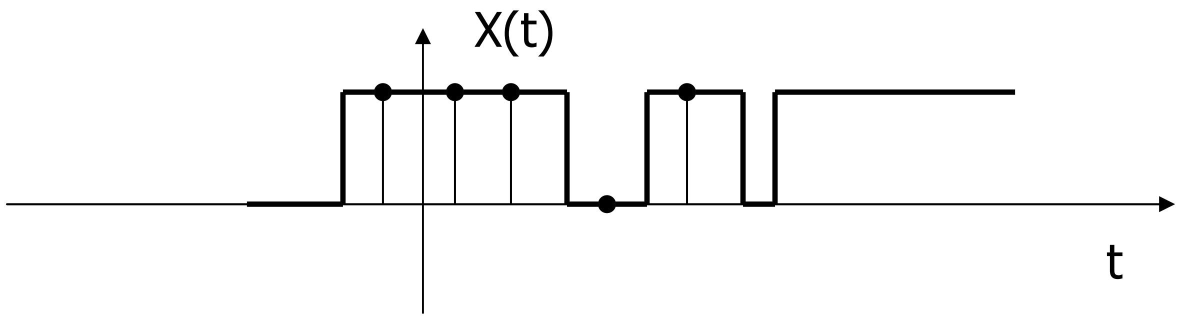
- X continuo y t discreto ➡ secuencia aleatoria contínua



Ej. Ruido térmico muestreado

Clasificación de PA (3)

- X discreto y t discreto → secuencia aleatoria discreta



Ej. Bits muestreados

Procesos determinísticos y no determinísticos

- Si los valores futuros de cualquier muestra del PA no se pueden "predecir" de sus valores pasados, entonces el PA es llamado no-determinístico
- En cambio cuando los valores futuros se pueden predecir de sus valores pasados entonces el PA es llamado determinístico.

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

$$A, \omega_0, \acute{o}\ \theta \ \ pueden\, ser\, VA$$

Funciones densidad y distribución

$$F_x(x_1;t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}$$

$$F_x(x_1,x_2;t_1,t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

$$f_x(x_1;t_1) = d\,F_x(x_1;t_1)/d\,x_1$$

$$f_x(x_1,x_2;t_1,t_2) = \partial\,F_x(x_1,x_2;t_1,t_2)/(\partial\,x_1\,\partial\,x_2)$$

PA independiente
PA estacionario

- En un PA si fijamos el tiempo, tenemos una VA. Esta tiene propiedades estadísticas: valor medio, varianza,etc.
- Si hacemos esto para N t distintos obtenemos N VA con sus propiedades estadísticas.
- Decimos que el PA es estacionario si sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

PA independiente

- Dos PA X(t) e Y(t) son estadísticamente independientes si:

$$f_{X,Y}(x_1,t_1;y_1,t_1^{'})=f_X(x_1,t_1)\,f_Y(y_1,t_1^{'})$$

Proceso Estacionario de primer orden

$$f_X(x_1;t_1) = f_X(x_1;t_1+\Delta)$$

Para cualquier t_1 y Δ.

En consecuencia $f_X(x_1;t_1)$ es independiente de t_1

$$\Rightarrow \quad E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante}$$

PE de segundo orden

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$$

Para todo t_1, t_2 y Δ. Consecuencia de lo anterior

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \qquad \tau = t_1 - t_2$$

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

PE en sentido amplio

$$E[X(t)] = \overline{X} = \mathrm{constante}$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Un PE de orden 2 es estacionario en sentido amplio.

Autocorrelación

- Si el proceso aleatorio es estacionario en sentido amplio

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$$

- Y tiene las siguientes propiedades

Propiedades

$$(1)\ \left|R_{XX}(\tau)\right| \leq \left|R_{XX}(0)\right|$$

$$(2)\ \left|R_{XX}(-\tau)\right| = \left|R_{XX}(\tau)\right|$$

$$(3)\ R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$$

Otras propiedades

$$(4) E[X(t)] = \overline{X} \neq 0$$

tiene un término cte = $\overline{X}^2$

$$(5) X(t)$$

Si tiene una componente periódica

$R_{XX}(\tau)$ también tiene una componente periódica con el mismo período

$$(6) X(t)$$

Si es ergódico, valor medio 0 y sin componente periódica

$$\lim_{|\tau| \to \infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

Ejemplo

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

$$E[X(t)] = \overline{X} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 = 29 - 25 = 4$$

Promedios en el tiempo y Ergodicidad

- Definimos

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

- Consideremos los siguientes promedios

$$\overline{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Promedios en el tiempo y Ergodicidad

- Para una muestra del proceso, las dos integrales dan 2 números como resultado. Si todas las funciones del proceso son consideradas, entonces
- $\mathrm{R}_{xx}(\tau)$ $\overline{x}$ son va y

$$E[\overline{x}] = \overline{X}$$

$$E[\mathrm{R}_{xx}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

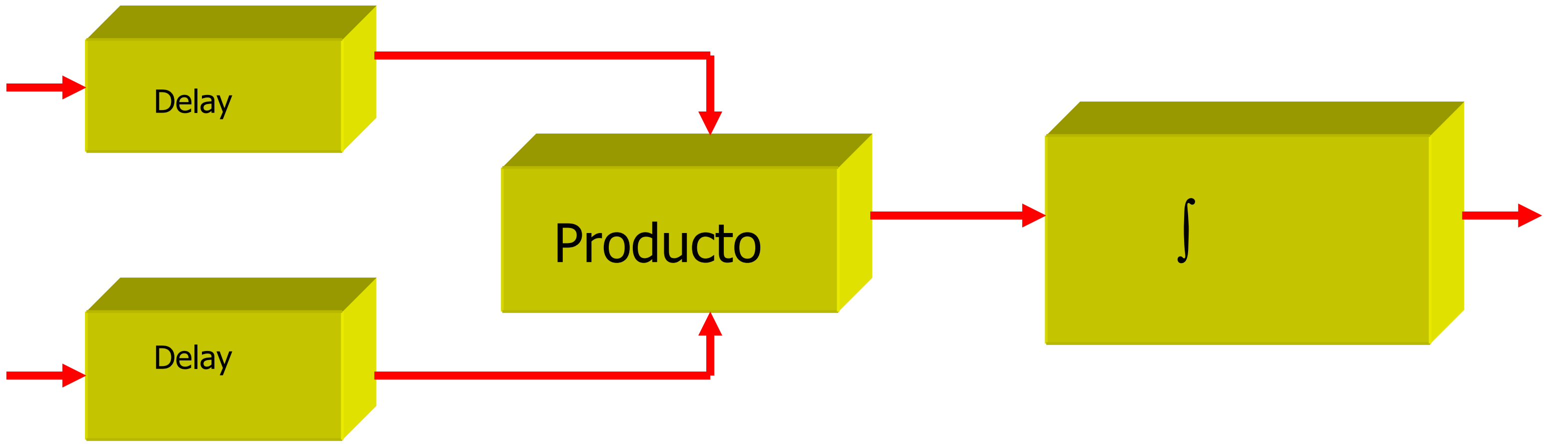
Ergodicidad

$$\overline{x} = \overline{X}$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{xx}}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Promedios temporales iguales a promedios estadísticos

Medida de funciones de correlación



Motivación

- Vimos Correlación
- Antes trabajamos en t y f para señales determinísticas y sis. lineales
- Ahora con señales aleatorias
- ¿ Dominio de f ?
- Propiedades espectrales ➡ TF para señales determinísticas

Densidad Espectral de Potencia

- Para un pa X(t), siendo

$$x_T(t)\begin{cases} x(t) & -T<t<T \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Satisface $\int_{-T}^{T} |x_T(t)|dt < \infty$ con T finito, tiene TF y aplicando el T. de Parseval

$$E(T) = \int_{-T}^{T} x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(w)|^2 dw$$

DEP(2)

- Dividiendo por 2T

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|X_T(w)\right|^2}{2T} dw$$

- Haciendo T $\longrightarrow \infty$ y tomando valor esperado

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E[X^2(t)]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\left|X_T(w)\right|^2}{2T} dw$$

DEP(3)

- Finalmente definimos la DEP

$$S_{XX}(w) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\left|X_T(w)\right|^2]}{2T}$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)\,dw$$

Propiedades

$$(1) \quad S_{XX}(w) \geq 0$$

$$(2) \quad S_{XX}(-w) = S_{XX}(w) \qquad X(t) \quad real$$

$$(3) \quad S_{XX}(w) \quad es\ real$$

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w)dw = A\{E[X^2(t)]\}$$

Relación entre Función de Autocorrelación y Densidad Espectral de Potencia

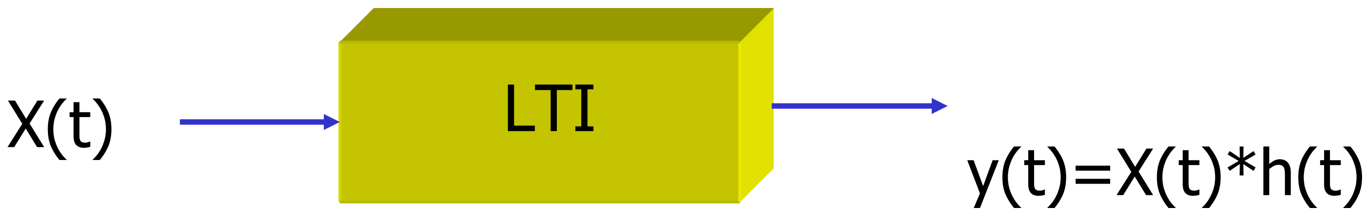
$$S_{XX}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-jw\tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(w) e^{jw\tau} dw$$

$$o \quad R_{XX}(\tau) \leftrightarrow S_{XX}(w)$$

Sistemas lineales con entradas aleatorias

x(t) estacionario en sentido amplio



h(t)   H(w)

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t) * h(t)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-t)$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(t)$$

$$R_{YY}(t,t+\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)]$$

$$= E[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t+\tau-v)dv]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-u)X(t+\tau-v)]h(u)h(v)dudv$$

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$S_{YY}(f) = \left|H(f)\right|^2 S_{XX}(f)$$

DEP de la respuesta

$$S_{YY}(w) = S_{XX}(w)\left|H(w)\right|^2$$

Ruido Blanco

- Tiene todas las f, como la luz blanca, es estacionario en sentido amplio :

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} = K = cte$$

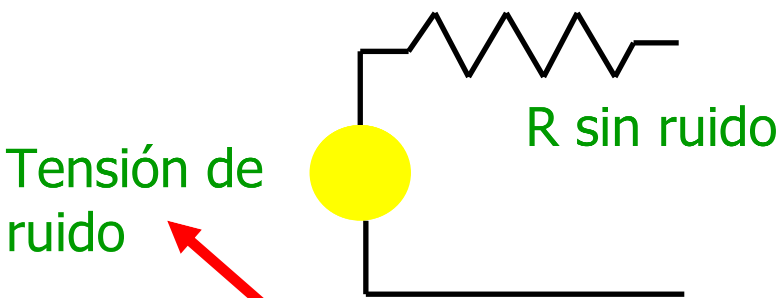
$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- No es realizable

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(f)df = \infty$$

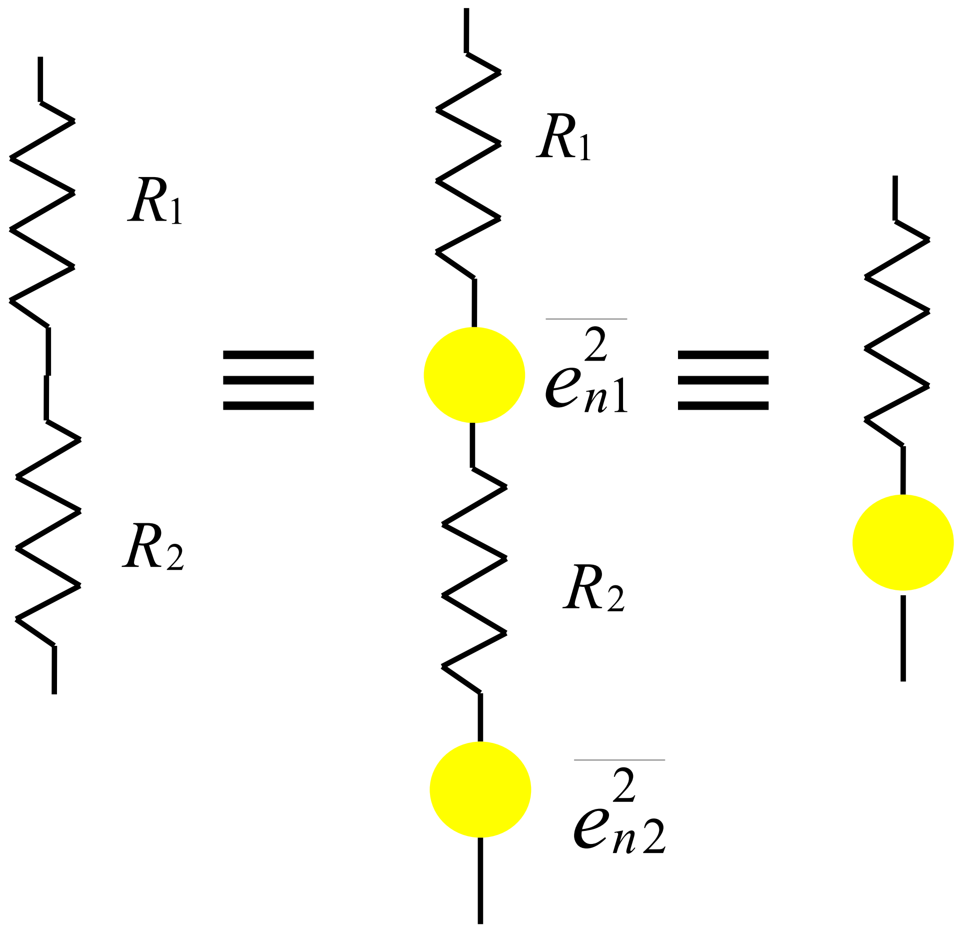
Ruido térmico

- Debido a la agitación térmica
-  Resistencia “ruidosa”
- Su circuito equivalente



$$\overline{e_n^2} = \frac{2KT\Lambda f}{\pi} R$$

Ej. 2 R en serie



$$R_{equi} = R_1 + R_2$$

$$\overline{e_n^2} = \overline{e_{n1}^2} + \overline{e_{n2}^2}$$

$$2K\left[T_1 R_1 + T_2 R_2\right]\Lambda f = 2K\left[T_{equi}\left(R_1 + R_2\right)\Lambda f\right.$$

$$T_{equiv} = \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2}{R_1 + R_2}$$

Temperatura equivalente de ruido