Análisis de Señales-Curso 2011

Serie de Fourier en TD

Transformada de Fourier en TD

Transformada discreta de Fourier

Transformada rápida de Fourier (FFT)

Señales periódicas en TD:Series de Fourier

- Si x(t) es periódica y cumple las condiciones de Dirichlet.., su desarrollo en SFTC es :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk\,w_0 t}$$

- Al igual que en TC una señal x[n] discreta y periódica puede representarse como una superposición de exponenciales complejas discretas con frecuencias múltiplos de la fundamental.

- Si la señal en TD es periódica x[n]=x[n+N], su representación mediante la SF es:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{jk\Omega_0 n}$$

- Donde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ es la frecuencia "digital" fundamental de la señal periódica, y la frecuencia de la componente k-ésima es $k\Omega_0$

- Ahora podemos preguntarnos: ¿cuántos términos deben considerarse en la suma para el caso de una secuencia discreta periódica de período N?
- Recordando la propiedad de las exponenciales complejas discretas

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jN\Omega_0 n}\, e^{jk\Omega_0 n} = e^{j\cancel{N}\frac{2\pi}{\cancel{N}}n}\, e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$$

- Como habíamos visto antes exponenciales complejas con f $\neq$ no son todas diferentes como ocurría en TC. Sólo hay N exponenciales complejas distintas.

- En consecuencia se puede escribir la SF de una señal periódica discreta :

$$x[n] = \sum_{k=<N>} C_k \, e^{j\Omega kn}$$

SFTC $\Rightarrow$ SFTD

- En TC:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{j2\pi k f_0 t} \qquad\qquad C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

- Para discretizar x(t) tomamos N muestras durante un período a intervalos $T_s \Rightarrow N.T_s = T$
- Los coeficientes serán :

$$C_k = \frac{1}{N\,T_S}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi k f_0 n T_s} . T_S = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi k f_0 n T_s}$$

- La representación en SFTD será :

$$x[n] = \sum_{k=<N>} C_k e^{j\Omega kn}$$

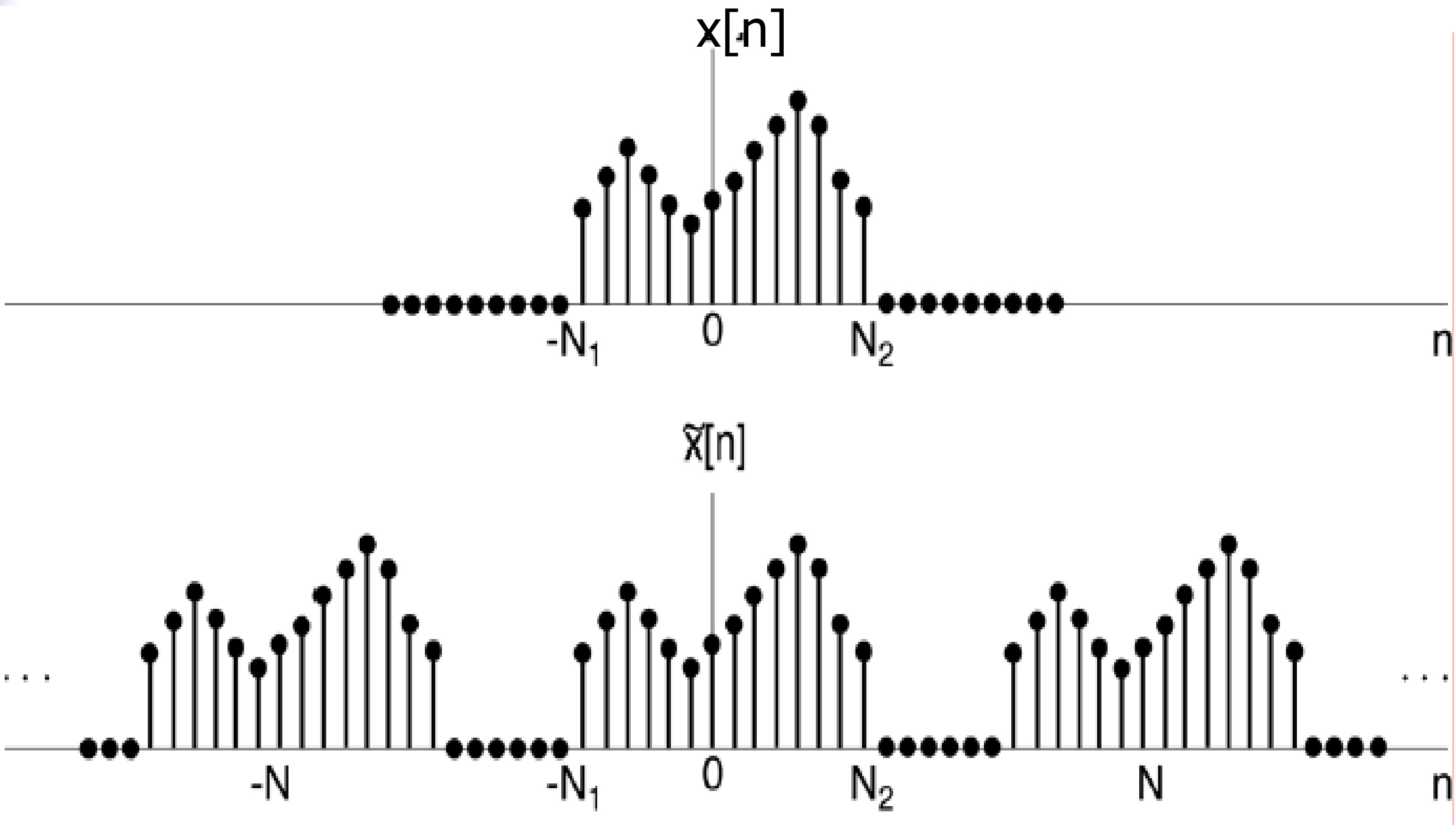
$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega n}$$

TFTD

- Derivación : igual que en TC

- $x[n]$ – aperiódica de duración finita
- $\tilde{x}[n]$ – periódica de período N
- $\tilde{x}[n] = x[n]$ en N

Derivación (continuación)



Derivación (continuación)

$$\bar{x}[n] = \sum_{k=<N>} C_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \bar{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Si definimos $X(e^{j\Omega})$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$C_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

$$\bar{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

- para $N \longrightarrow \infty$
- $\overline{x}[n] \longrightarrow x[n]$
- $\Omega_0 \longrightarrow 0$
- $\sum \Omega_0 \longrightarrow \int d\Omega$

Par TF en TD

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

TFTD – Ecuación de análisis

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

TFITD – Ecuación de síntesis

Convergencia

Ecuación de síntesis: ninguna, ya que se integra sobre un intervalo finito

Ecuación de análisis: son necesarias condiciones análogas a la TF en tiempo continuo, por ejemplo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$ — Energía finita

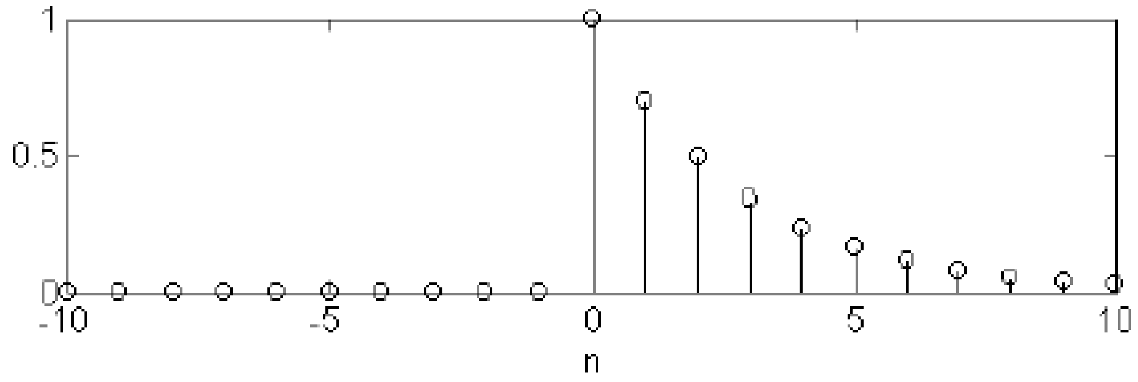
or

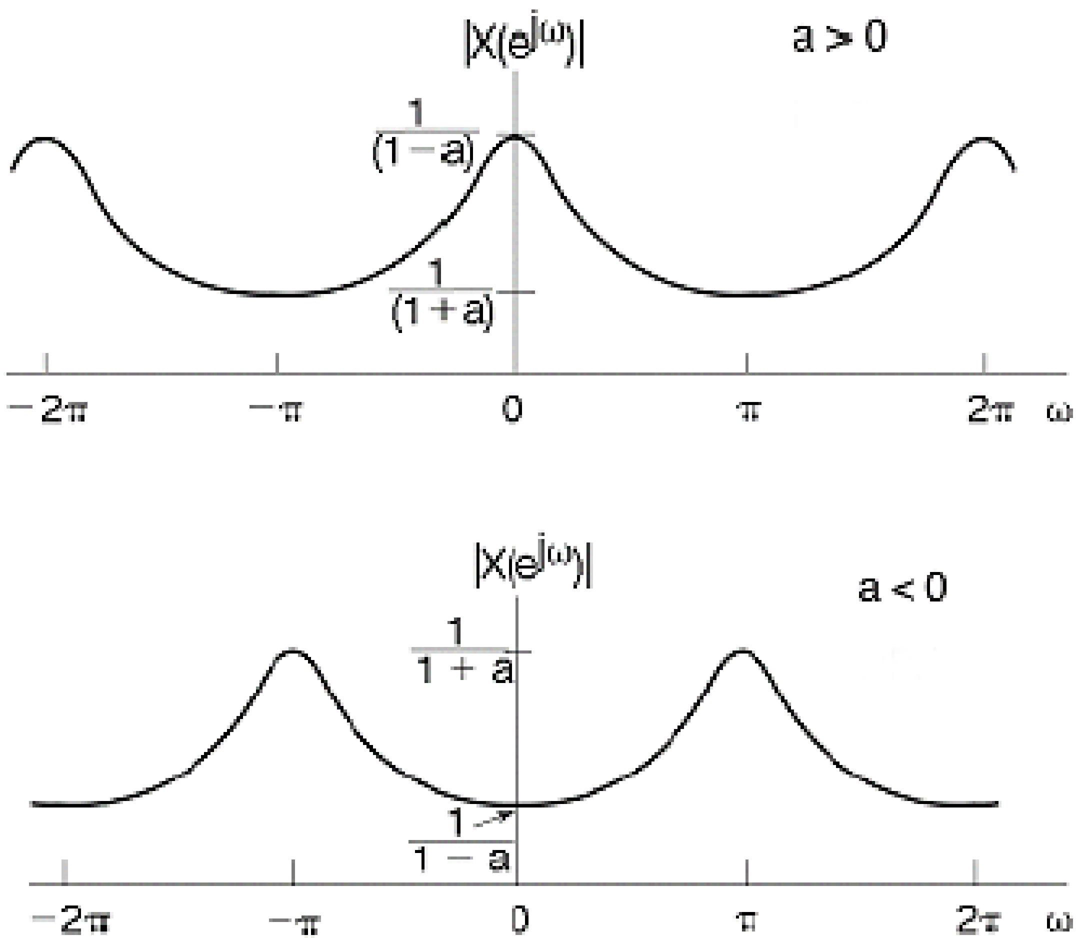
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$ — Completamente sumable

Ejemplo

$$x[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\, e^{-jw})^n = \frac{1}{1 - a\, e^{-jw}}$$



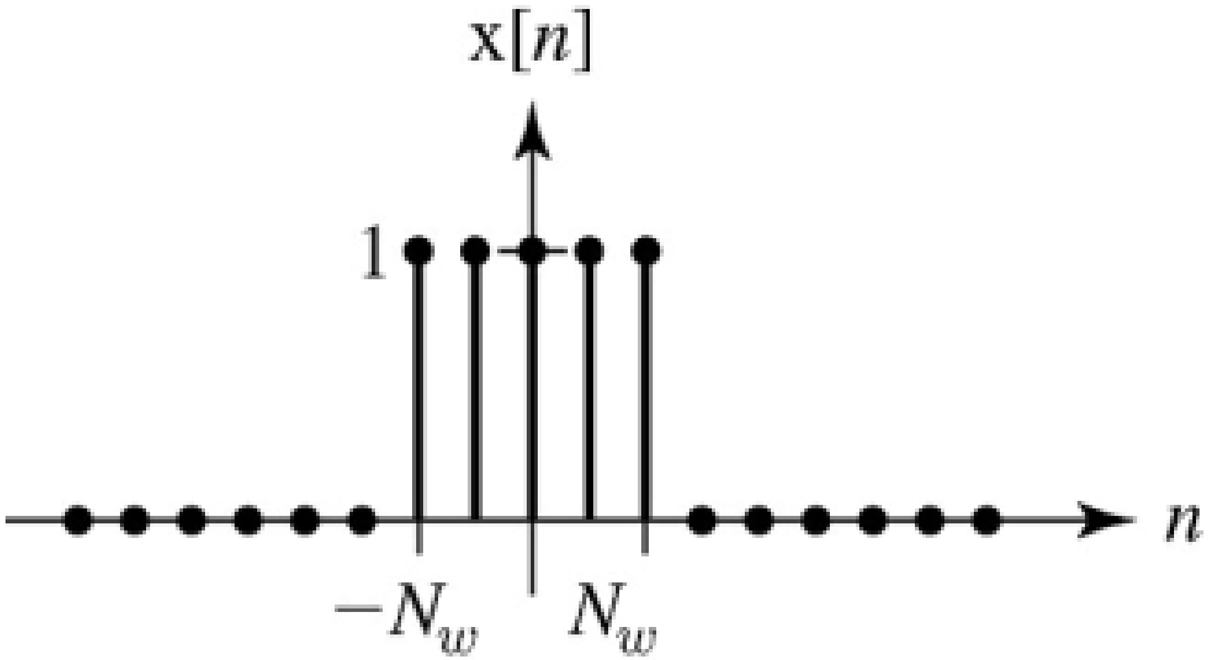


|X(e^{jω})|
a > 0
1/(1 − a)
1/(1 + a)
− 2π
− π
0
π
2π
ω
|X(e^{jω})|
a < 0
1/(1 + a)
1/(1 − a)
− 2π
− π
0
π
2π
ω

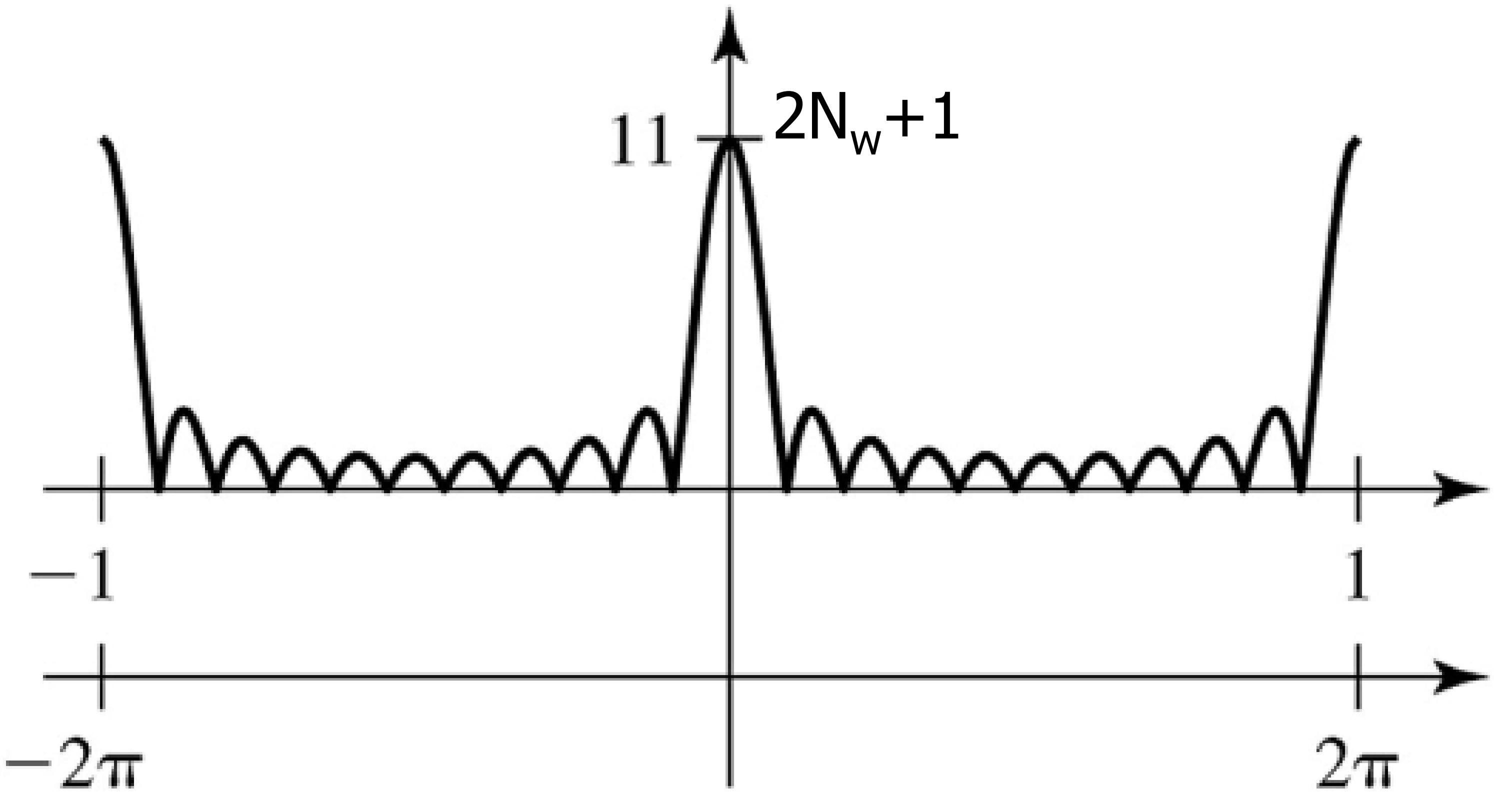
Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_w \\ 0 & |n| > N_w \end{cases}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_w}^{N_w} e^{-jwn} = \frac{sen w(N_w + 1/2)}{sen(w/2)}$$



x[n]
1
n
−N_w
N_w



2N_w+1
11
−1
1
−2π
2π

Propiedades de la TFTD

- Periodicidad: la TFTD siempre es periódica en w con período 2π.

$$X(e^{j(w+2\pi)}) = X(e^{jw})$$

- Linealidad

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{jw})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{jw})$$

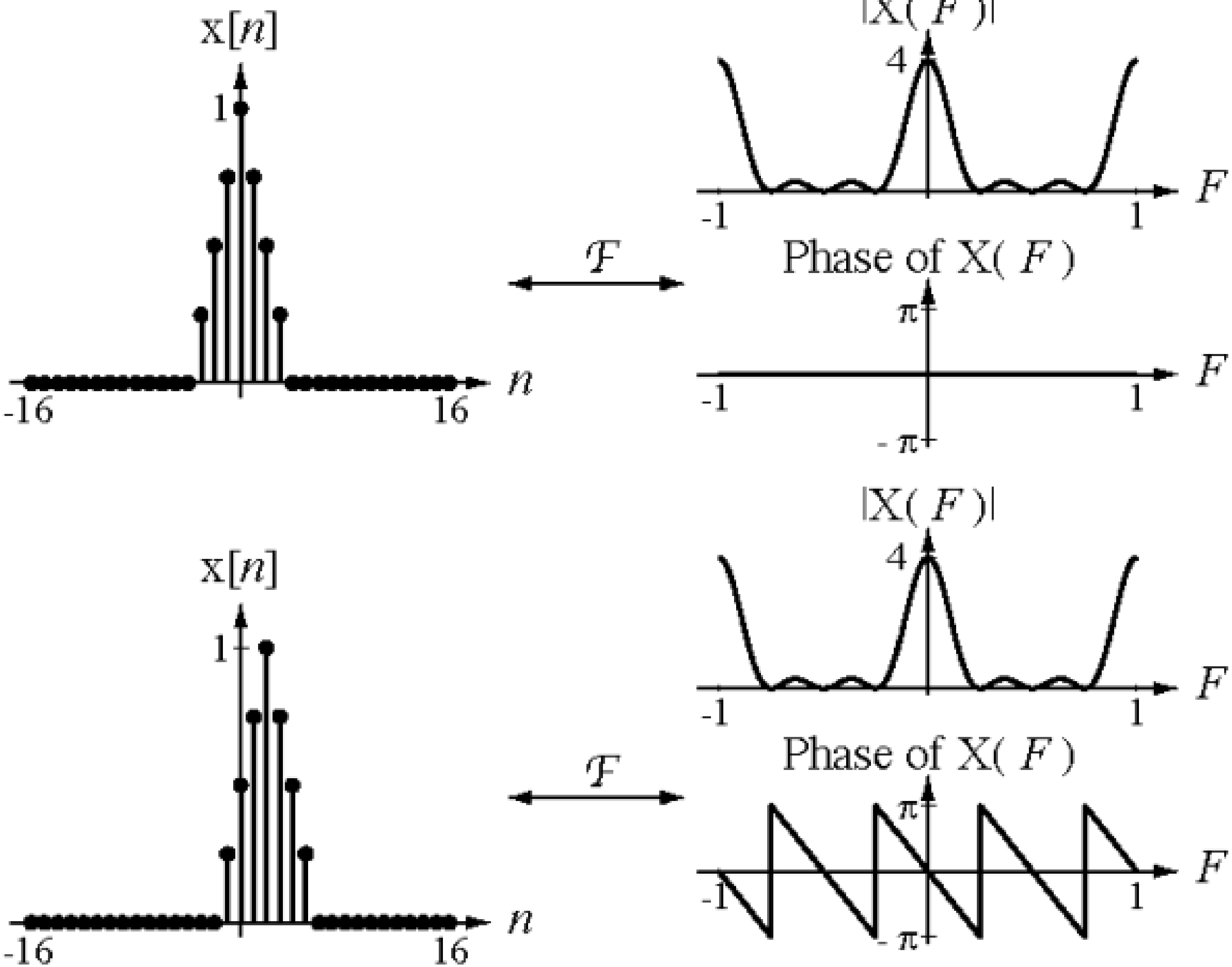
$$a\,x_1[n] + b\,x_2[n] \xleftrightarrow{F} a\,X_1(e^{jw}) + b\,X_2(e^{jw})$$

- Desplazamiento en t y f

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jw})$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-jwn_0} X(e^{jw})$$

$$e^{jw_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(w-w_0)})$$


x[n]
1
-16
16
n
|X(F)|
4
F
-1
1
Phase of X(F)
π
- π
x[n]
1
-16
16
n
|X(F)|
4
F
-1
1
Phase of X(F)
π
- π

Frecuencia contínua y discreta

- Para tc $x_a(t)=A\cos(wt) \quad -\infty<t<\infty$
- $w=2\pi f= 2\pi/T$

- Para td $x(n)=A\cos(\Omega n) \quad -\infty<n<\infty$
- $\Omega= 2\pi F= 2\pi/N$

Muestreo de señales analógicas

- Si muestreamos al cos cada T_m
- ➡ $x(n)=x_a(nT_m)=A\cos(2\pi fnT_m)$
- Comparando $x(n)=A\cos(2\pi Fn)$
- ➡ $F=fT_m=f/f_m$
- Se denomina frecuencia normalizada ó relativa.

Recordando

- Las sinusoides en td cuyas f están separadas por un múltiplo entero de 2π son idénticas. Ej.
- $\cos[(w+2\pi)n] = \cos(wn+2\pi n) =$

  $\Rightarrow \cos(wn)$
- Por tanto existen señales discretas iguales con f distintas. Es decir cualquier secuencia con $|\Omega|>\pi$ tiene una secuencia idéntica en $|\Omega|<\pi$ $\Leftarrow$

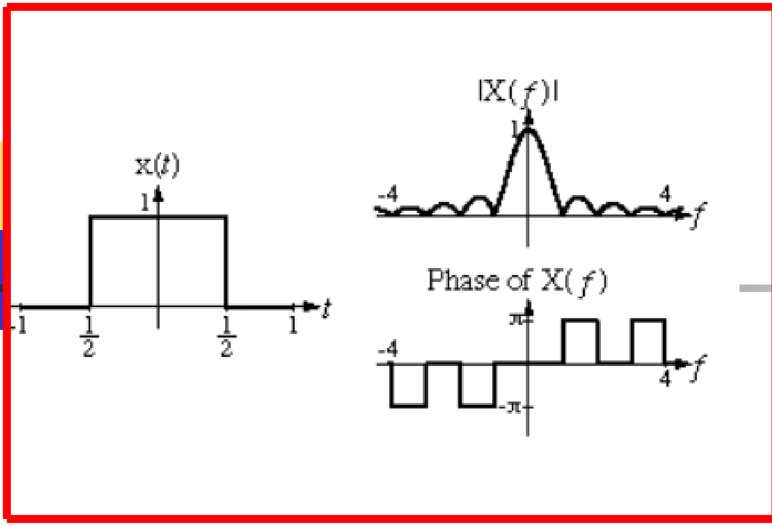
Resumiendo

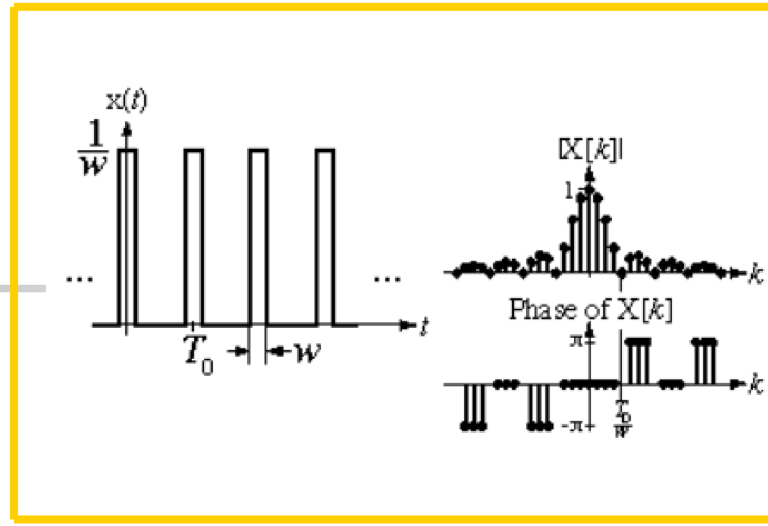
- Los rangos analógicos son
- $-\infty < f < \infty$ $\qquad$ $-\infty < w < \infty$
- Los rangos digitales son
- $-1/2 < F < 1/2$ $\qquad$ $-\pi < \Omega < \pi$

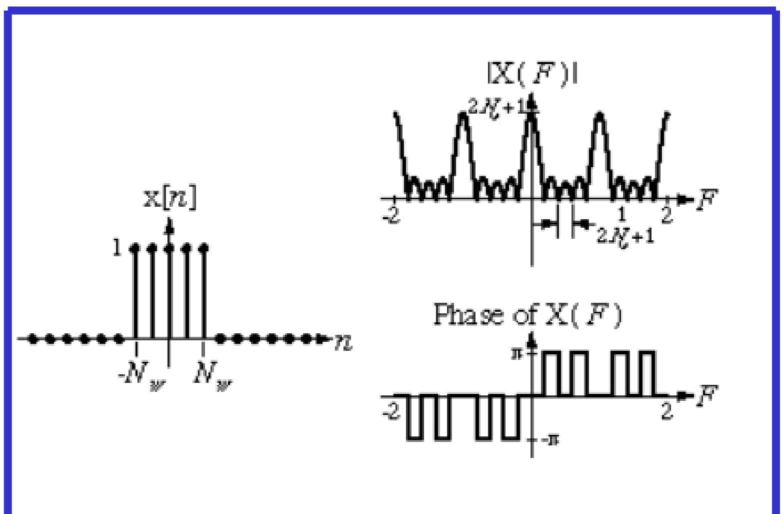
Los 4 métodos de Fourier

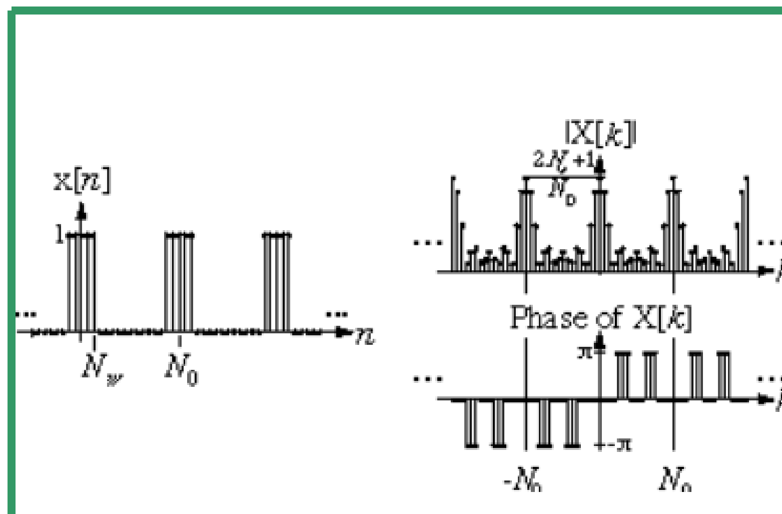
	Frec. discreta	Frec. continua
TC	SFTC	TFTC
TD	SFTD	TFTD

Dominio de tiempo	Periódica	No periódica	
Continua	**FS : Serie de Fourier** $$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]e^{jk\omega_0 t}$$ $$X[k]=\frac{1}{T}\int_{<T>}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$	**FT: Transformada de Fourier** $$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ $$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$	No periódica
Discreta	**DTFS: Serie de Fourier en tiempo discreto** $$x[n]=\sum_{k=<N>}X[k]e^{jk\hat{\omega}_0 n}$$ $$X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\hat{\omega}_0 n}$$	**DTFT: Transformada de Fourier en tiempo discreto** $$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\hat{\omega}n}d\omega$$ $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\hat{\omega}n}$$	Periódica
	Discreta	Continua	Dominio de la frecuencia


x(t)
|X(f)|
Phase of X(f)


x(t)
|X[k]|
Phase of X[k]


x[n]
|X(F)|
Phase of X(F)


x[n]
|X[k]|
Phase of X[k]

Dualidad : SFTC y TFTD

- Tenemos una señal periódica contínua $x_p(t)$. Mediante las SF (obtengo los coeficientes) transformamos esta señal periódica contínua en una función aperiódica y discreta (los coeficientes espectrales separados 1/T).
- De forma dual, podemos intercambiar tiempo y frecuencia, y tenemos una señal aperiódica discreta en el tiempo (muestreada a $1/f_m$) y la transformamos en una señal periódica, (período f_m) contínua en f mediante TFTD.

Transformada de Fourier Discreta (TFD)

- Sin embargo a la hora de realizar operaciones tenemos los mismos problemas que en las SF ya que seguimos tratando con señales contínuas ó con serie de datos de longitud infinita. La “electrónica” nos obliga a trabajar con un número finito de datos discretos que además tienen una precisión finita.
- Se trata de conseguir discretizar las variables contínuas y de limitar el número de muestras en los dos dominios : temporal y frecuencial.

De la TFTD $\Rightarrow$ TFD

- Tenemos una señal x[n] limitada a N muestras con un período de muestreo t_s
- Se define la TFTD :

$$X_p(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n f t_s}$$

- $X_p(f)$ es periódica con período t_s. Muestreamos la señal N veces sobre un período por tanto $X_T[k]$ (sustituir f por k/Nt_s)

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi n k t_s}{N t_s}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi n k}{N}} \qquad k = 0,1 \ldots N-1$$

- Podemos interpretar los resultados de la TFD de una secuencia x[n] desde dos puntos de vista :
  - Como coeficientes espectrales (SF) de una señal periódica discreta cuyos muestreos coinciden con la secuencia x[n].
  - Como el espectro de una señal aperiódica discreta cuyos muestreos corresponden a la secuencia x[n].
- La TFD es una aproximación al espectro de la señal analógica original.

¿Cómo hacer TFD?

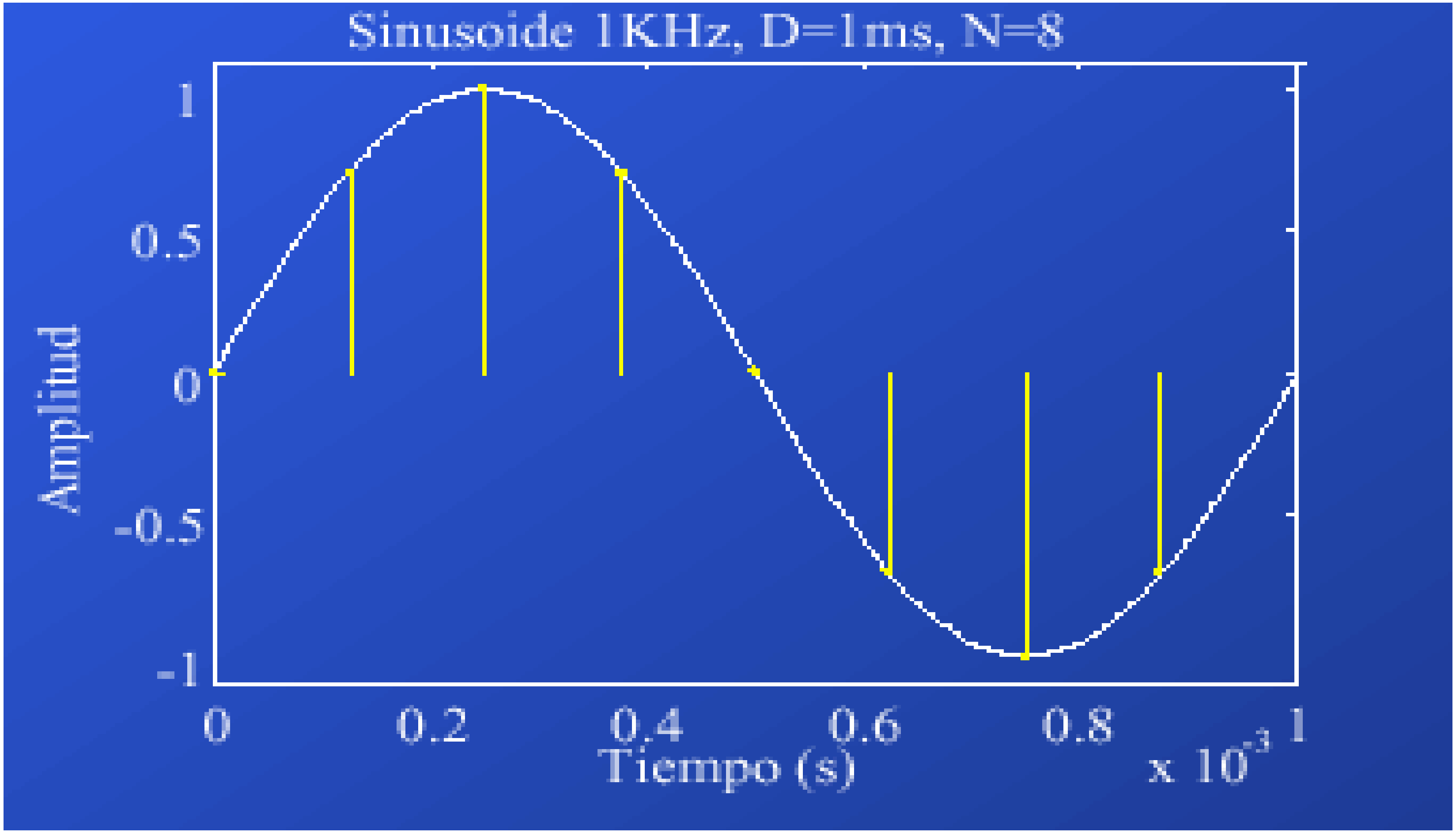
- Elegir el intervalo de muestreo t_s, de tal manera que se cumpla el T. de Muestreo.
- Crear una expansión periódica $x_p(t)$ de $x(t)$ con período D (tiempo total de muestreo).
- Tomar N muestras de $x_p(t)$ y calcular TFD.

Resumen de Series y Transformadas de Fourier

- Series de Fourier
  - Señal Continua Periódica (periodo *T*), Espectro Discreto Aperiódico (intervalo de discretización *1/T*)
- Transformada de Fourier
  - Señal Continua Aperiódica, Espectro Continuo Aperiódico.
- Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo
  - Señal Discreta Aperiódica (intervalo de discretización t_s), Espectro Continuo Periódico (periodo $1/ t_s$)
- Transformada Discreta de Fourier
  - Señal Discreta Periódica (intervalo de discretización t_s, periodo *T*), Espectro Discreto (intervalo de discretización *1/T*)

Ej.

$X(t)=\text{sen}(2\pi f_0 t)$; $f_0=1\text{kHz}$ $D=1\text{mSeg}$ $N=8$



- x[n]={0, 0.707, 1, 0.707, 0, -0.707, -1, -0.707}

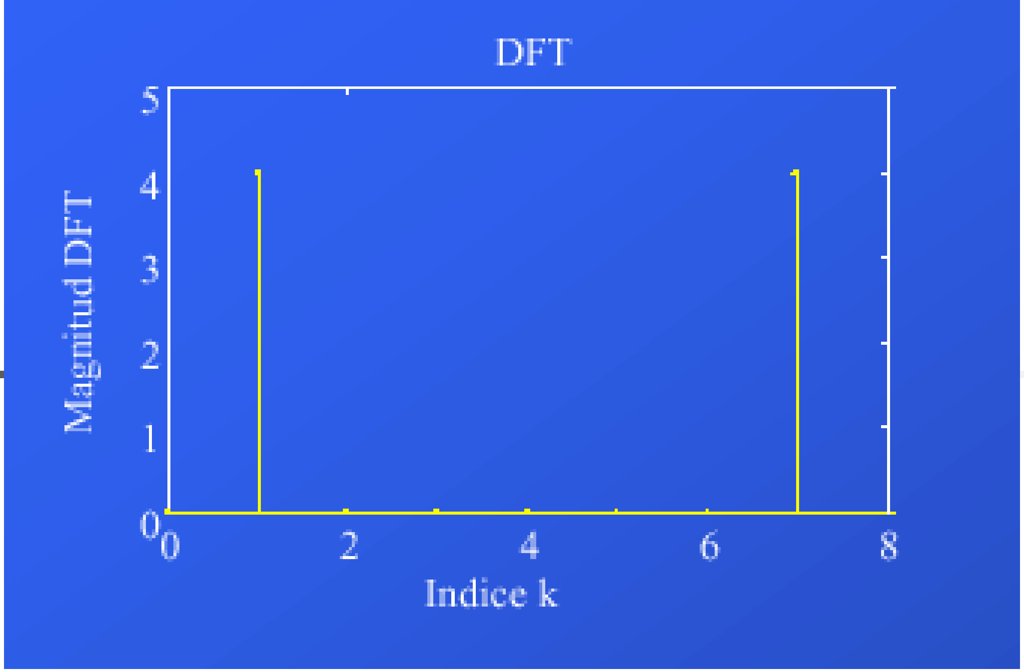
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(nk/N)}$$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{7} x[n] = 0$$

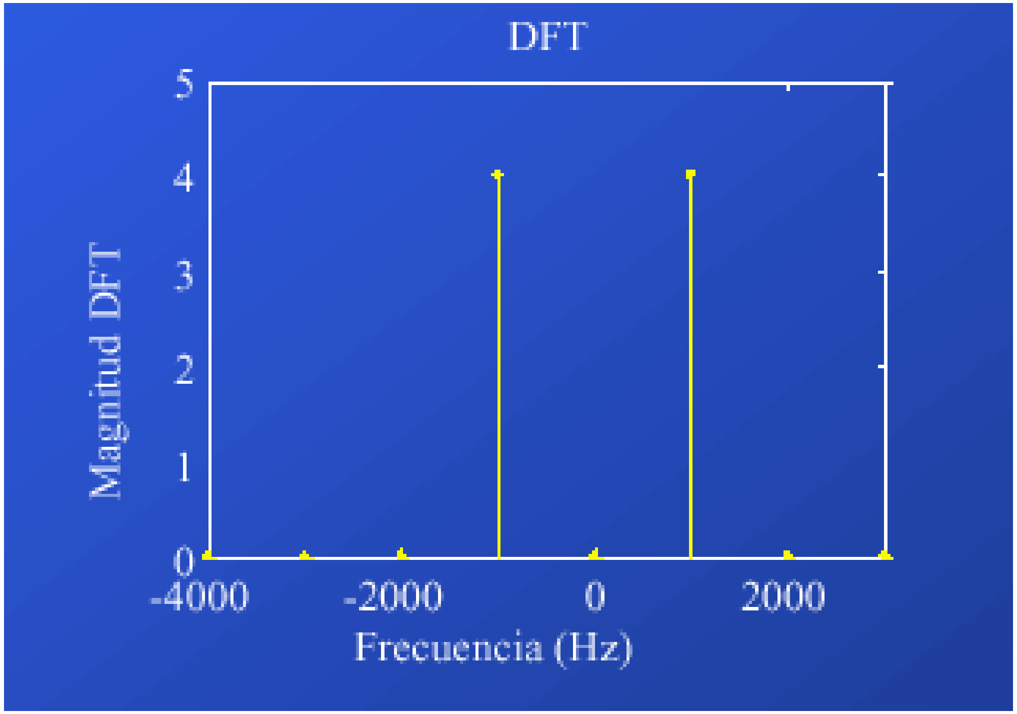
$$X[1] = \sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j2\pi n/8} = -4j$$

$$X[2] = X[3] = X[4] = X[5] = X[6] = 0$$

$$X[7] = 4j$$

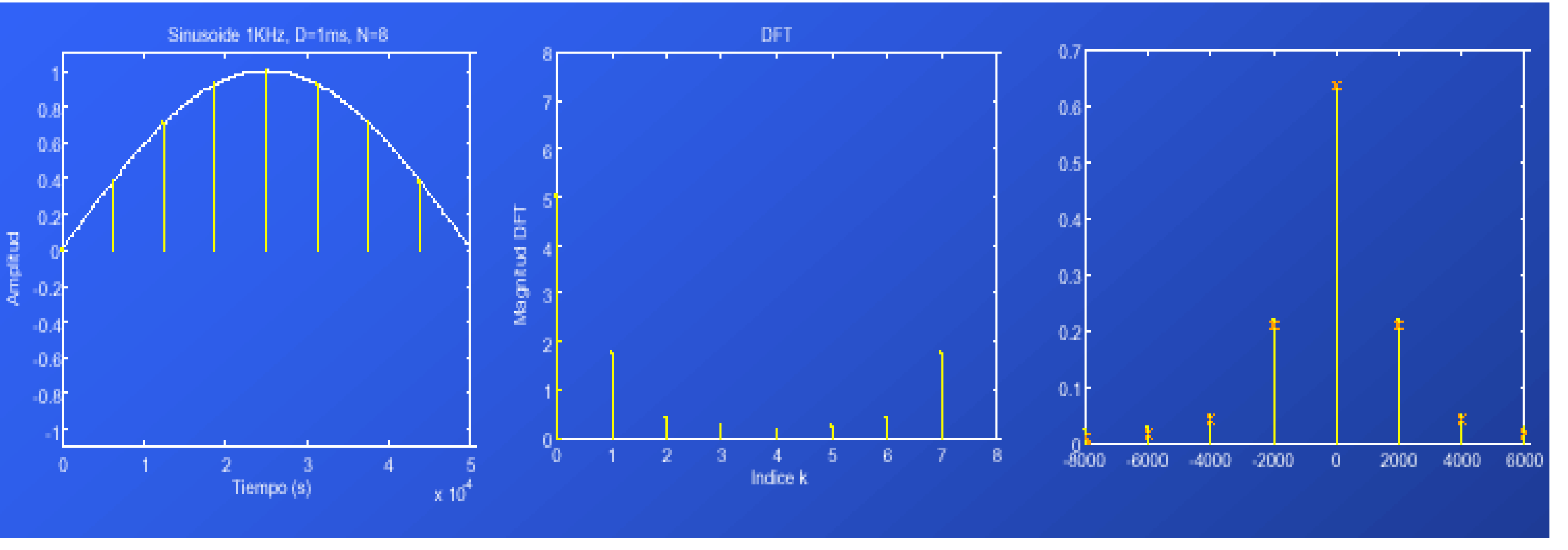


DFT
Magnitud DFT
0
1
2
3
4
5
0
2
4
6
8
Indice k

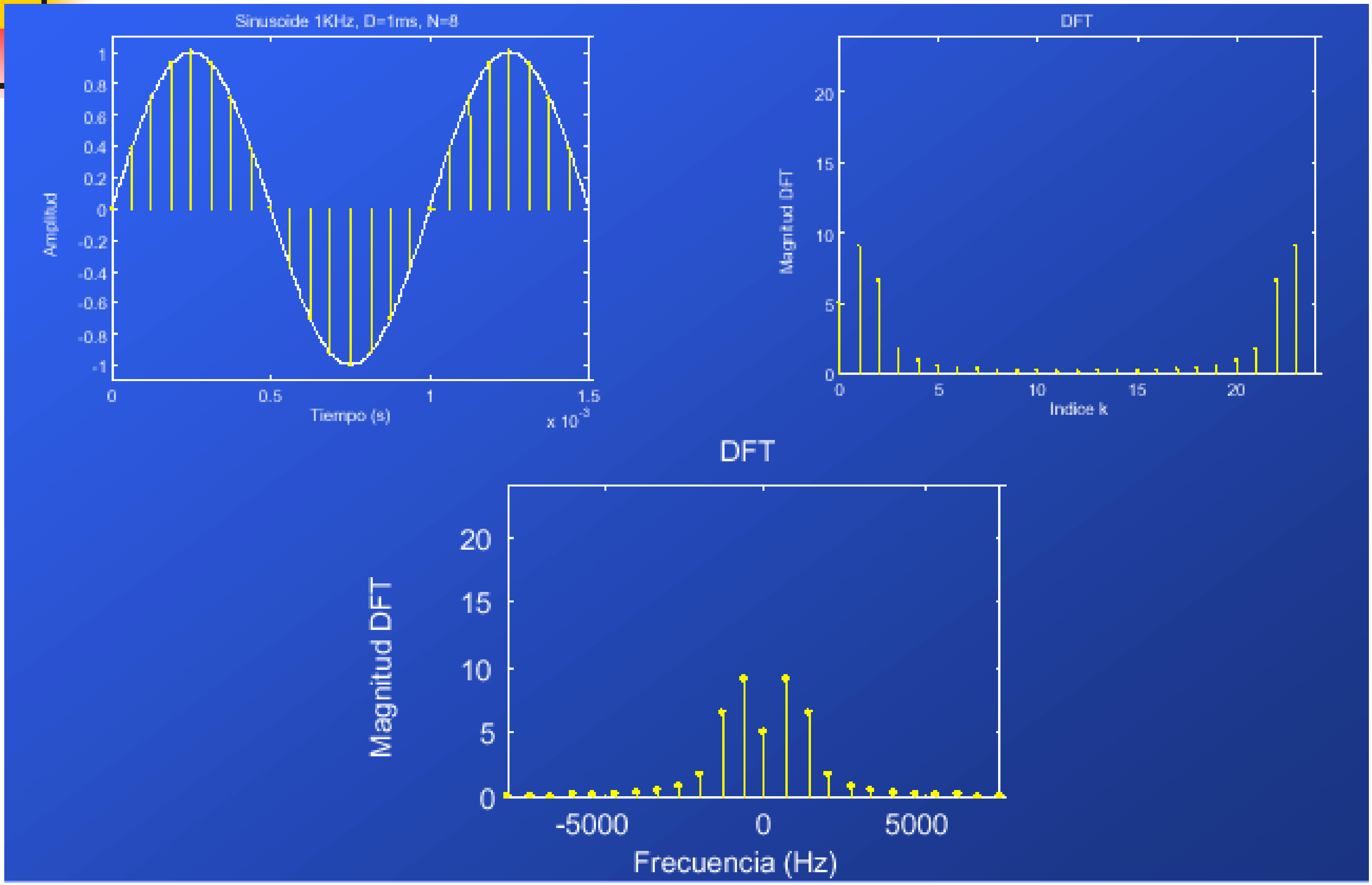


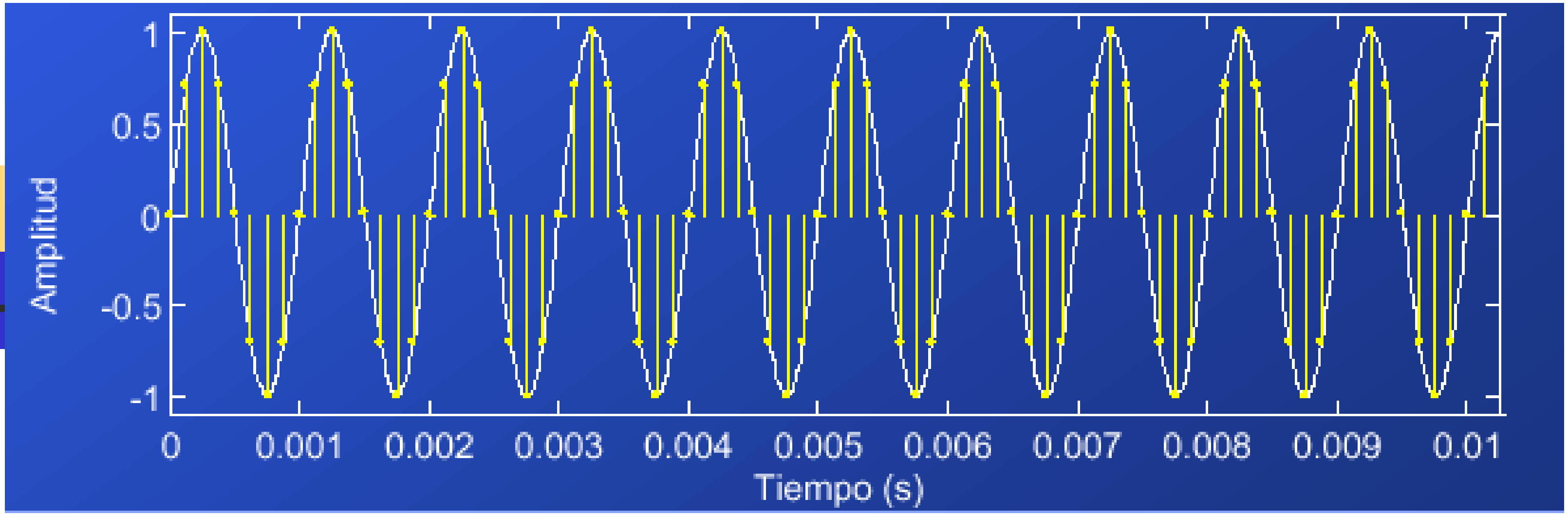
DFT
Magnitud DFT
0
1
2
3
4
5
-4000
-2000
0
2000
Frecuencia (Hz)

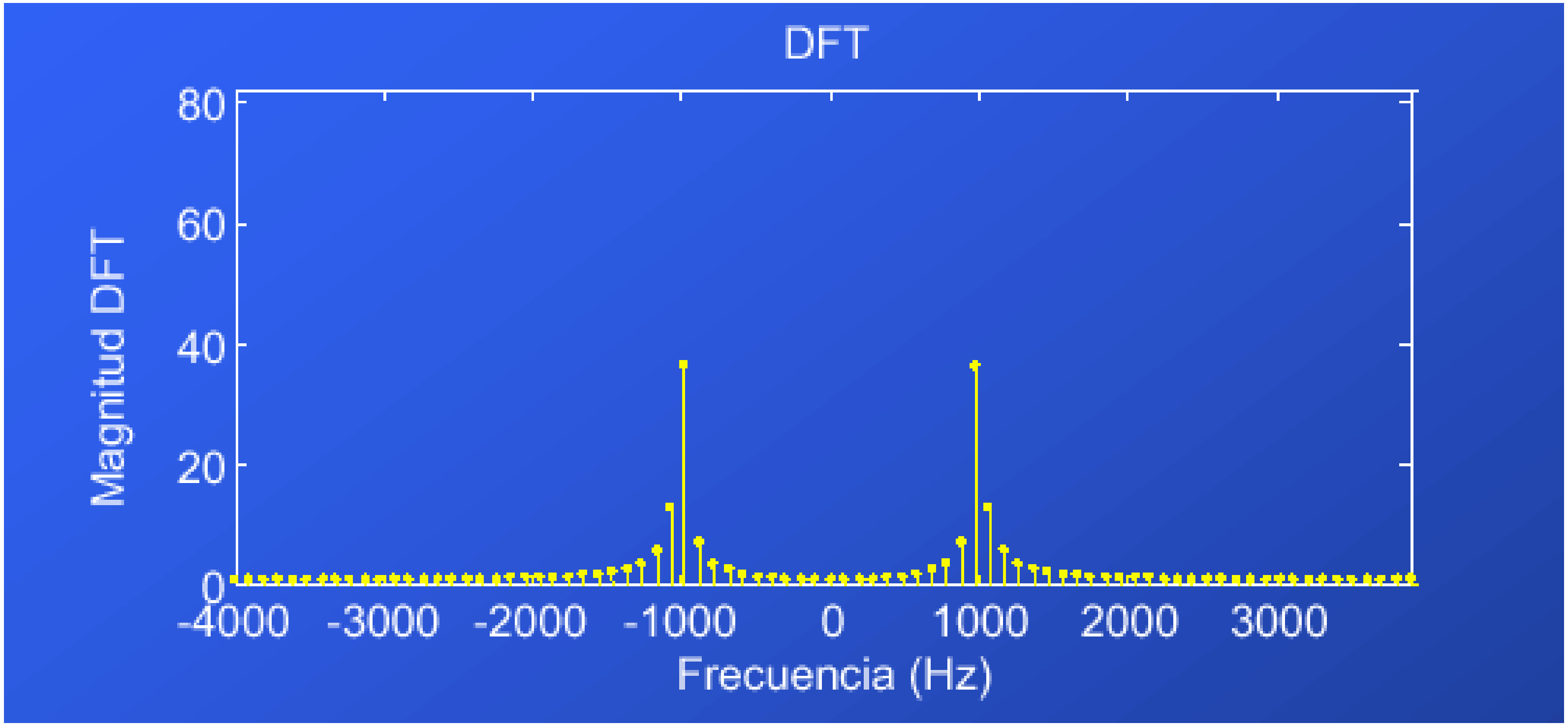
Ahora f=1kHz D=0.5mSeg N=8



D=1.5 mSeg   N=24


Sinusoide 1KHz, D=1ms, N=8
Amplitud
Tiempo (s)
x 10^-3
DFT
Magnitud DFT
Indice k
DFT
Magnitud DFT
Frecuencia (Hz)


1
0.5
0
-0.5
-1
Amplitud
0
0.001
0.002
0.003
0.004
0.005
0.006
0.007
0.008
0.009
0.01
Tiempo (s)


DFT
80
60
40
20
0
Magnitud DFT
-4000
-3000
-2000
-1000
0
1000
2000
3000
Frecuencia (Hz)

- En general, el DFT es una aproximación a las series o a la transformada de Fourier. Es muy importante elegir correctamente los parámetros del DFT (frecuencia de muestreo $f_s=1/t_s$, resolución de frecuencia $f_0=1/D$).
- La frecuencia de muestreo se determina a partir del teorema de muestreo. Si queremos detectar el espectro de una señal hasta una máxima frecuencia B , la frecuencia de muestreo deberá ser $2B$.
- La duración del muestreo se elige para una determinada resolución de frecuencia.
- Una regla de diseño muy útil es: Si queremos los M primeros armónicos de una señal con un error máximo del 5%, el número de muestreos $N=8M$.