TF en TC

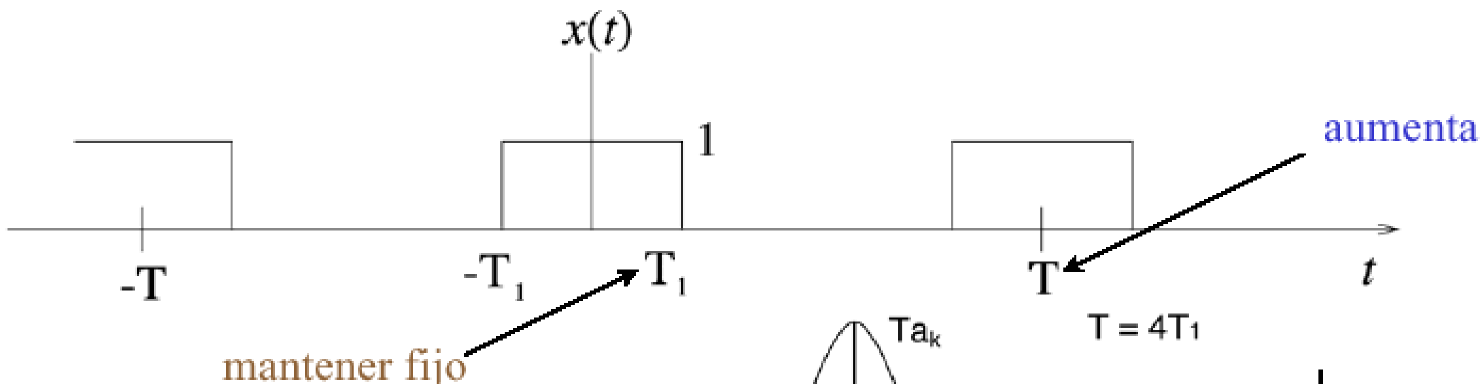
- Derivación del par TF de TC
- Ejemplos de TF
- TF de señales periódicas
- Propiedades de la TF en TC

Derivación

- Sea x(t) una señal aperiódica. Pensemos como el límite de una señal periódica que $T \longrightarrow \infty$
- Para una señal periódica las componentes armónicas están separadas $w_0=2\pi/T$
- Como $T \longrightarrow \infty$, $w_0 \longrightarrow 0$ y las componentes armónicas están c/vez más cerca en f

$\Downarrow$

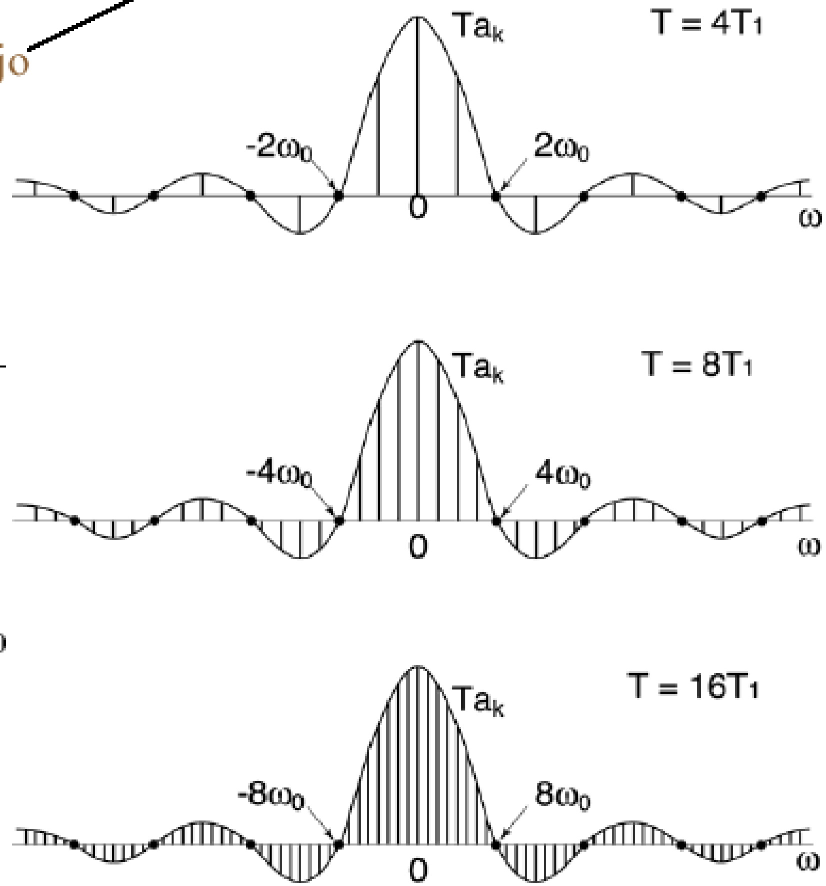
Serie de Fourier $\Rightarrow$ Integral de Fourier



$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$\Downarrow$$

$$T a_k = \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$



Los puntos de frecuencia discreta se vuelven más densos en ω a medida que aumenta T

Derivación

- La señal periódica $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk w_0 t}$ donde
- $$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \, e^{-j w_0 kt} \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-j w_0 kt} \, dt$$
- Si definimos $X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-jwt} \, dt$

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk \, w_0)$$

Derivación

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\,w_0)\, e^{jk\,w_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_0\, X(jk\,w_0)\, e^{jk\,w_0 t}$$

Dado que T $\longrightarrow$ ∞ entonces $\Sigma w_0 \longrightarrow \int dw$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jw)\, e^{jwt}\, dw$$

Ecuación de síntesis

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt} dt$$

Par de TF

- Las ecuaciones anteriores son conocidas como el par de transformadas de Fourier. Las señales periódicas las expresamos como una suma de exponenciales complejas de amplitud a_k y para un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para una sucesión contínua de frecuencias y de “amplitud” $X(jw)dw/2\pi$

Relación entre los coeficientes de la SF y la TF

- Supongamos que es una señal periódica con período T y coeficientes de Fourier a_k. x(t) es una señal de duración finita que es igual a en un período, entonces

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)\, e^{-jk\,w_0 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\,w_0 t}\, dt$$

- ya que x(t) es cero fuera del intervalo T

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\,w_0 t}\, dt = \frac{1}{T} X(jw) \Big|_{w\,=\,k\,w_0}$$

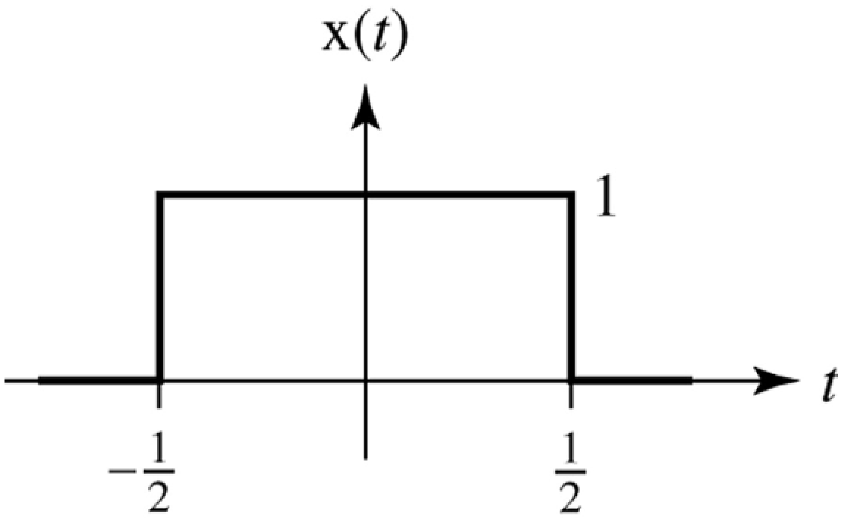
Convergencia de la TF

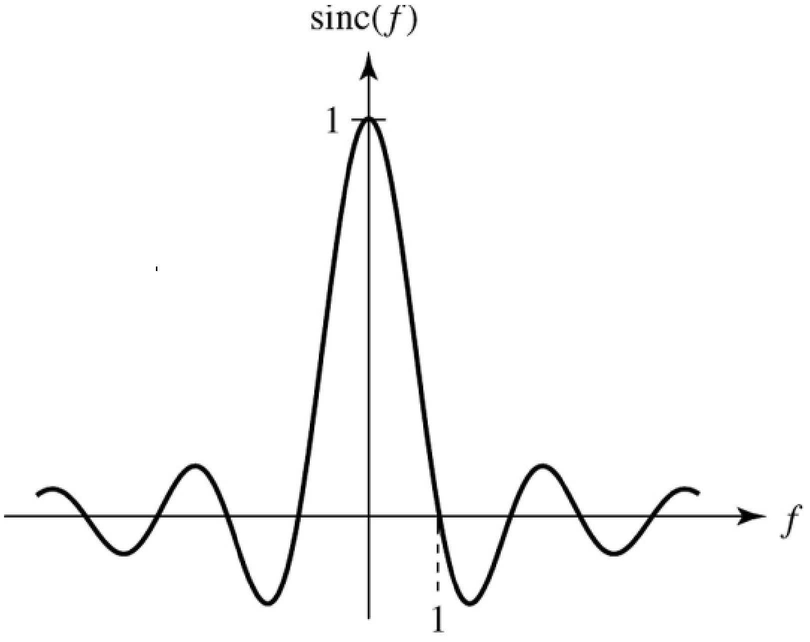
- Nos referiremos también como condiciones de Dirichlet :
- x(t) sea absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

- x(t) tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito
- x(t) tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además cada discontinuidad debe ser finita.

Ejemplo





Linealidad

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$

  y

- $y(t) \longleftrightarrow Y(jw)$

  entonces

- $ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(jw)+bY(jw)$

Desplazamiento de tiempo

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$

  entonces

- $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-jwto} X(jw)$

Diferenciación e integración

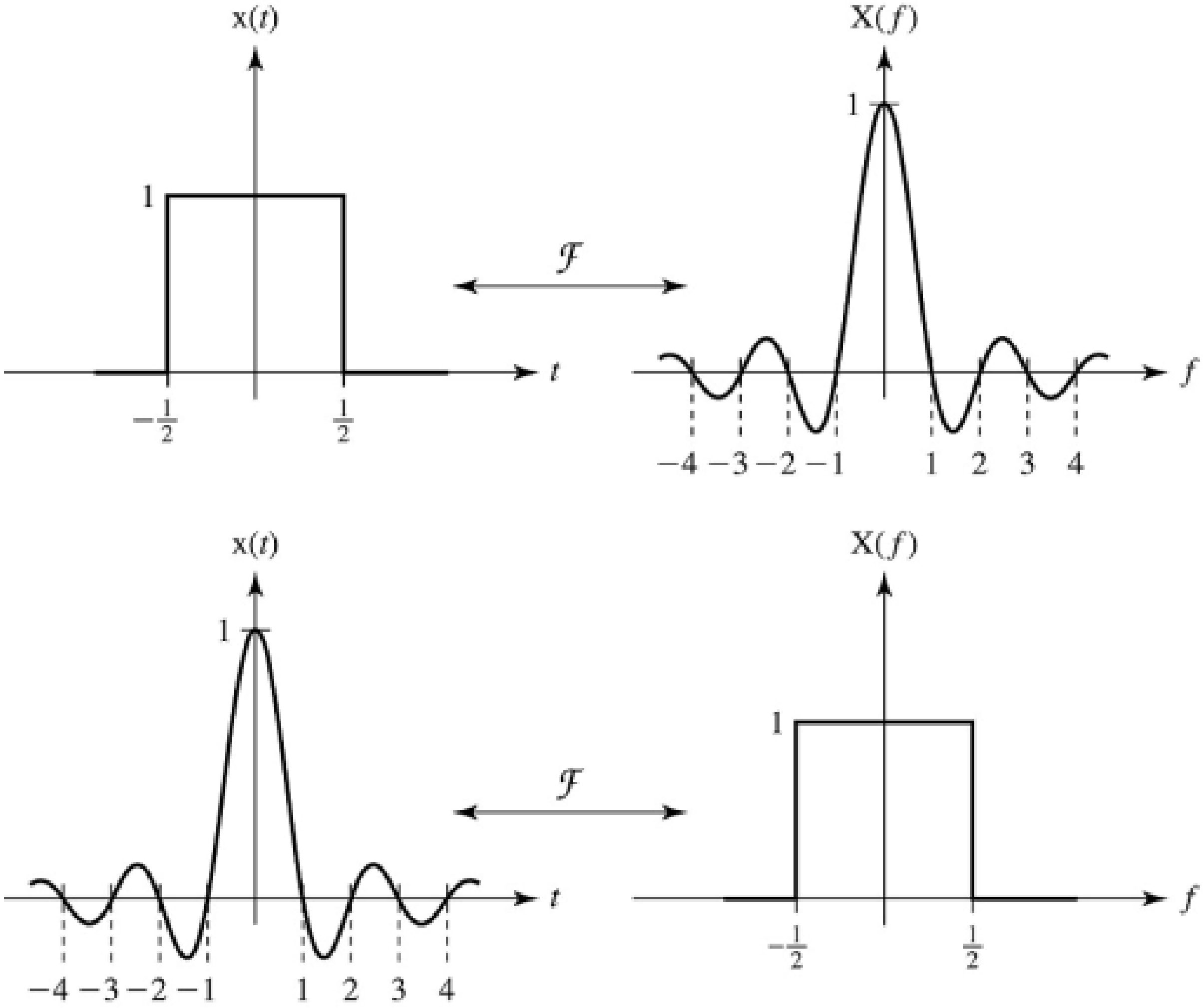
$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow jwX(jw)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \leftrightarrow \frac{1}{jw} X(jw) + \pi X(0)\delta(w)$$

Escalamiento de tiempo y frecuencia

- Si $x(t) \longleftrightarrow X(jw)$
  entonces
- $x(at) \longleftrightarrow 1/|a|.\ X(jw/a)$

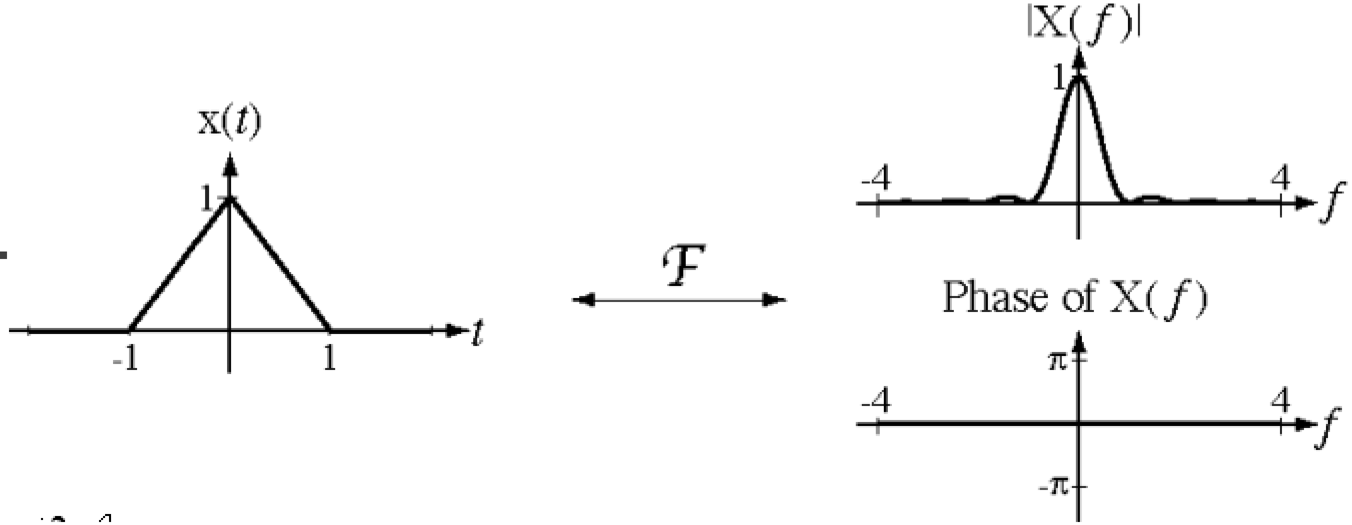
Dualidad

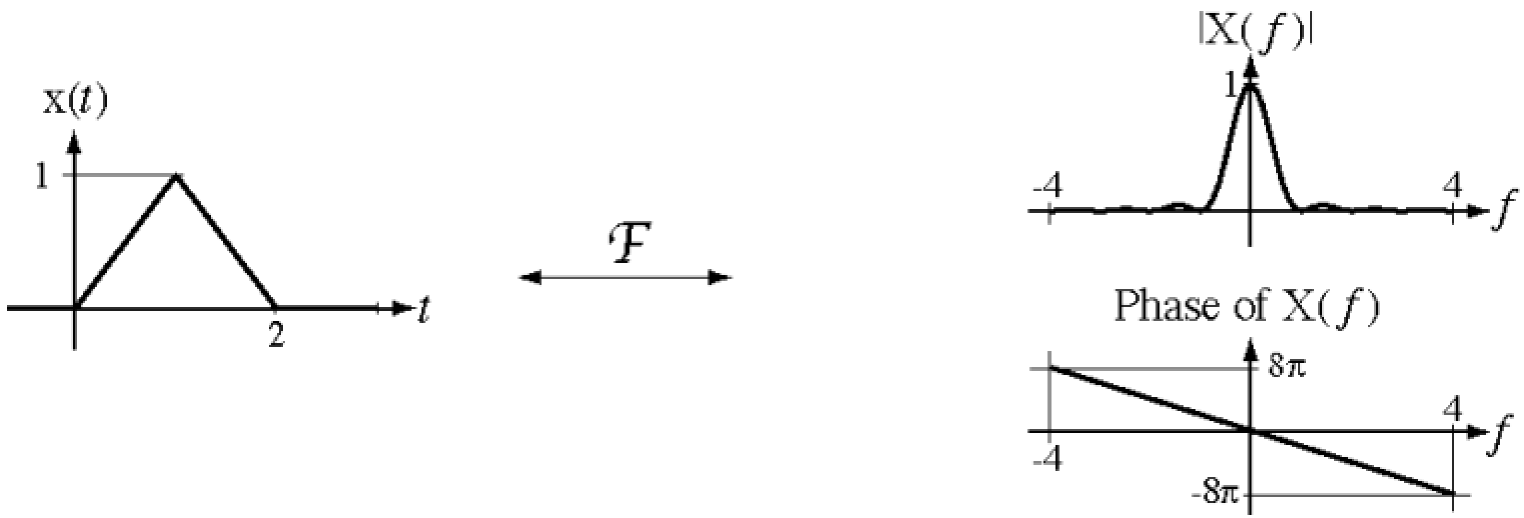


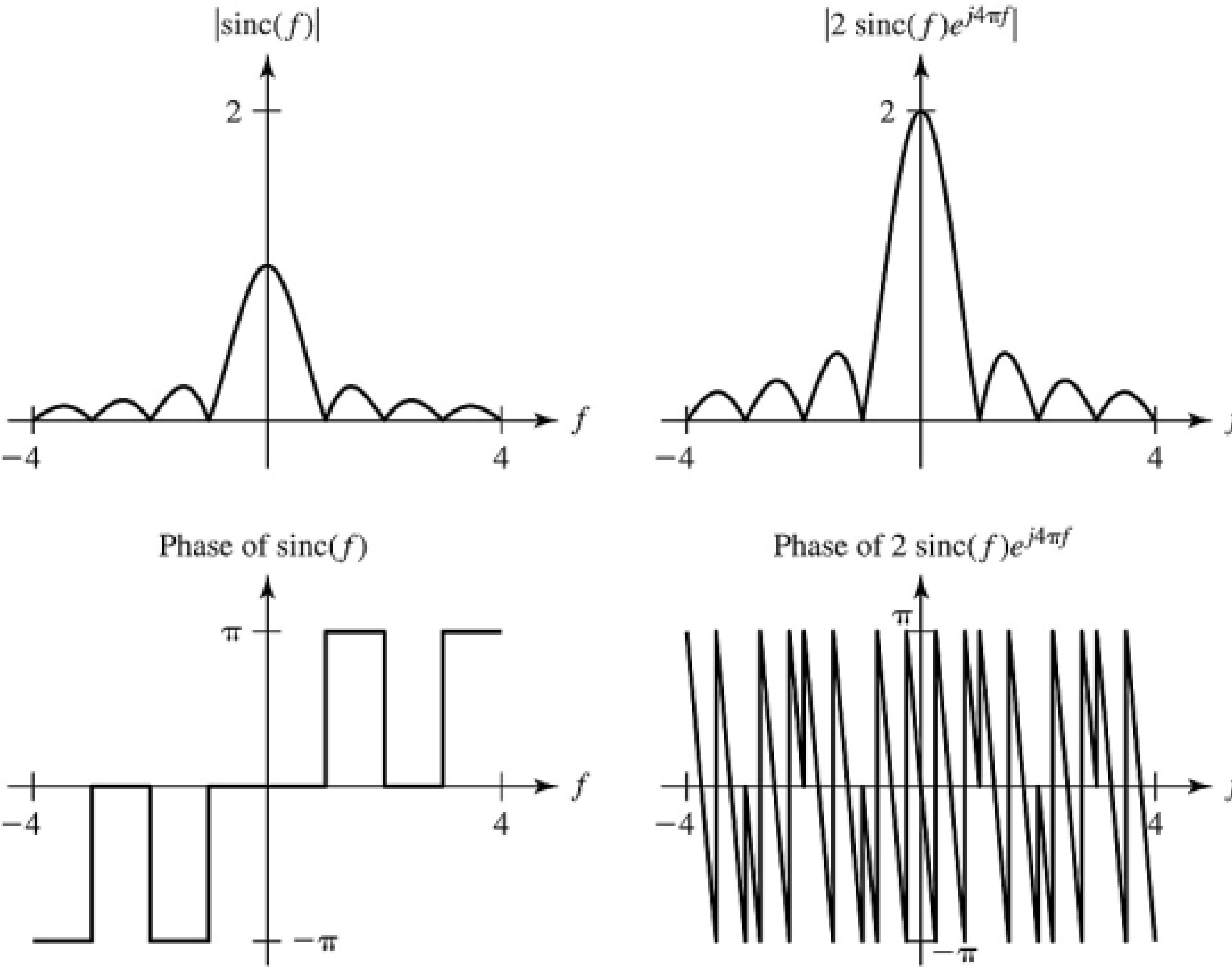
Relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(jw) \right|^2 dw$$

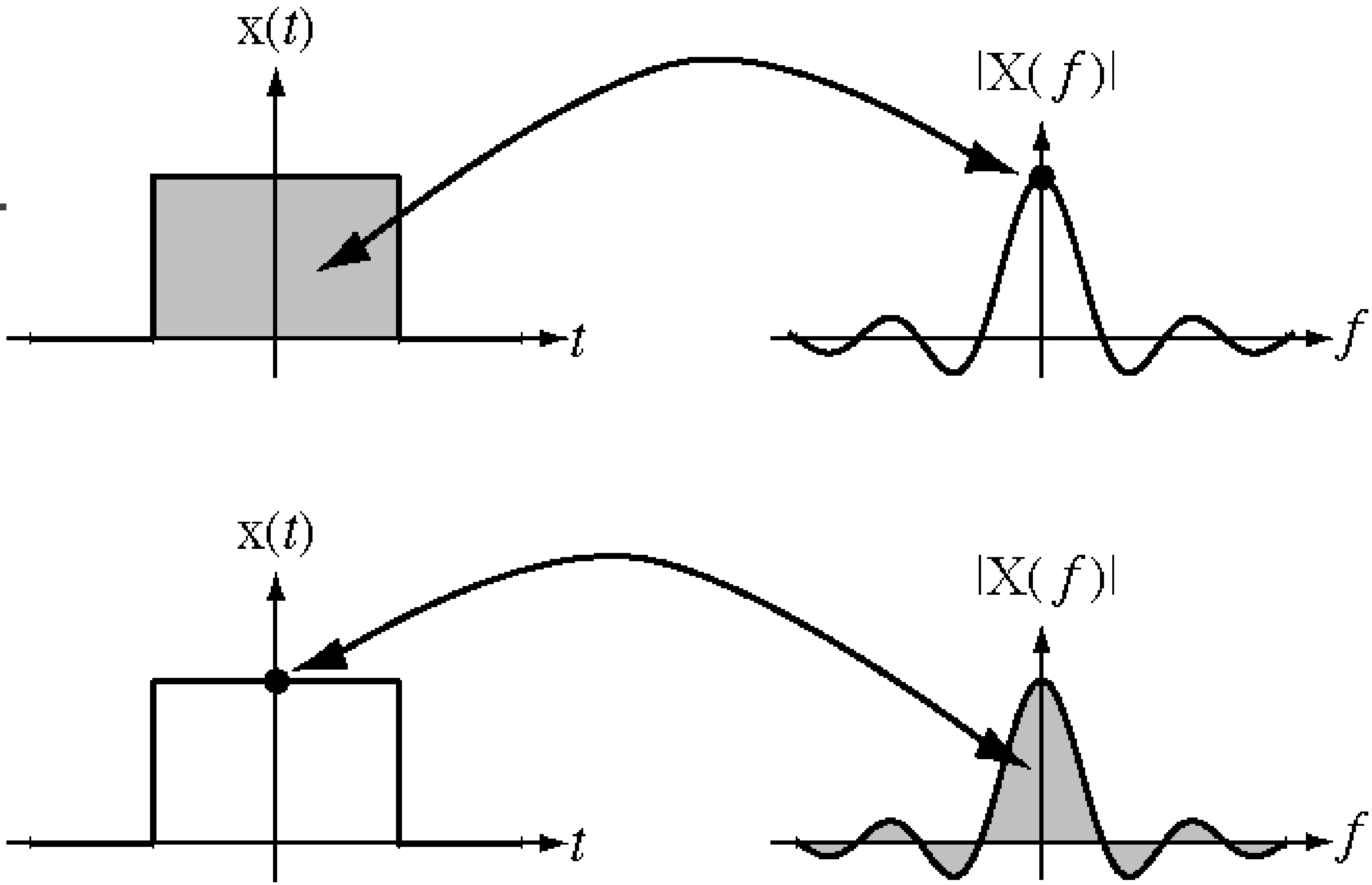
La energía total se puede calcular ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo integrando para todo tiempo, ó calculando la energía por unidad de frecuencia e integrando para todas las frecuencias.


x(t)
1
-1
1
t
F
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
π
-π

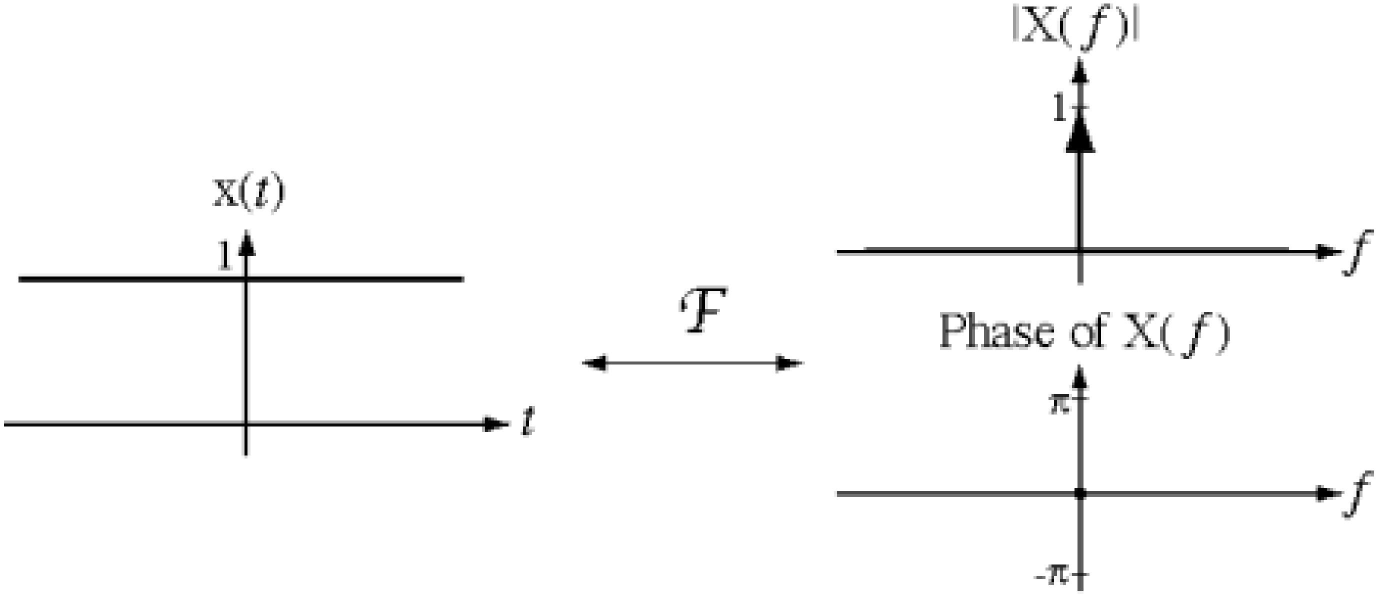

x(t)
1
2
t
F
|X(f)|
1
-4
4
f
Phase of X(f)
8π
-8π



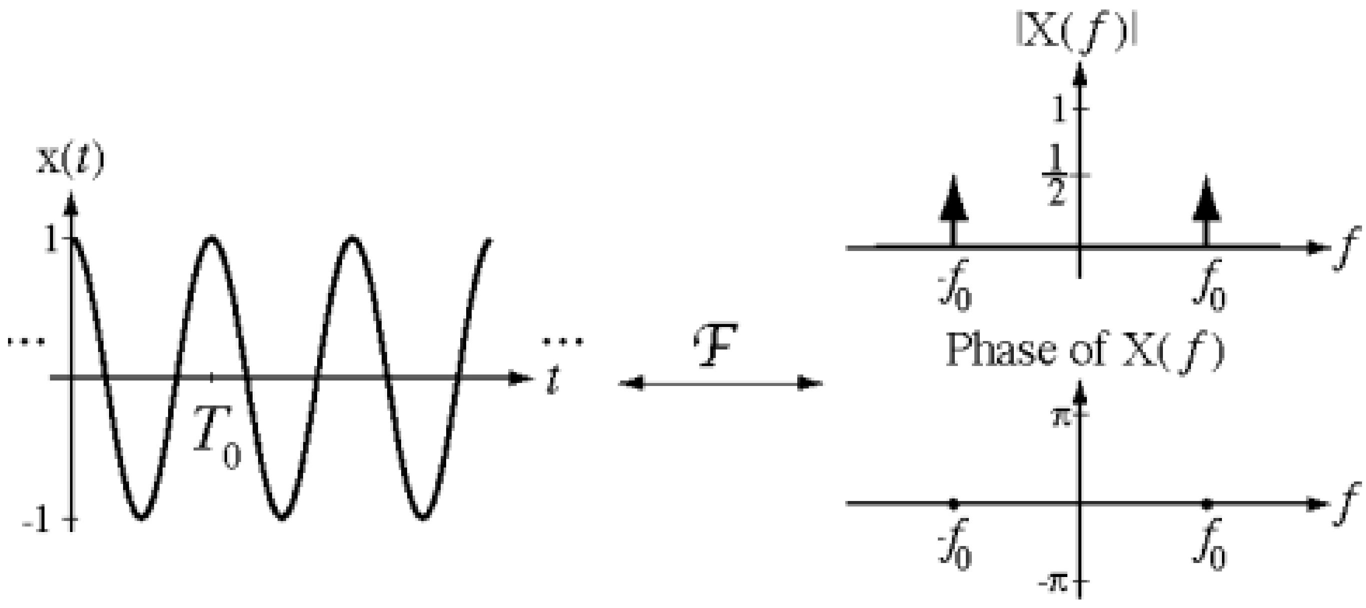
|sinc(f)|
|2 sinc(f)e^{j4πf}|
Phase of sinc(f)
Phase of 2 sinc(f)e^{j4πf}
2
−4
4
f
π
−π


x(t)
|X(f)|
t
f
x(t)
|X(f)|
t
f

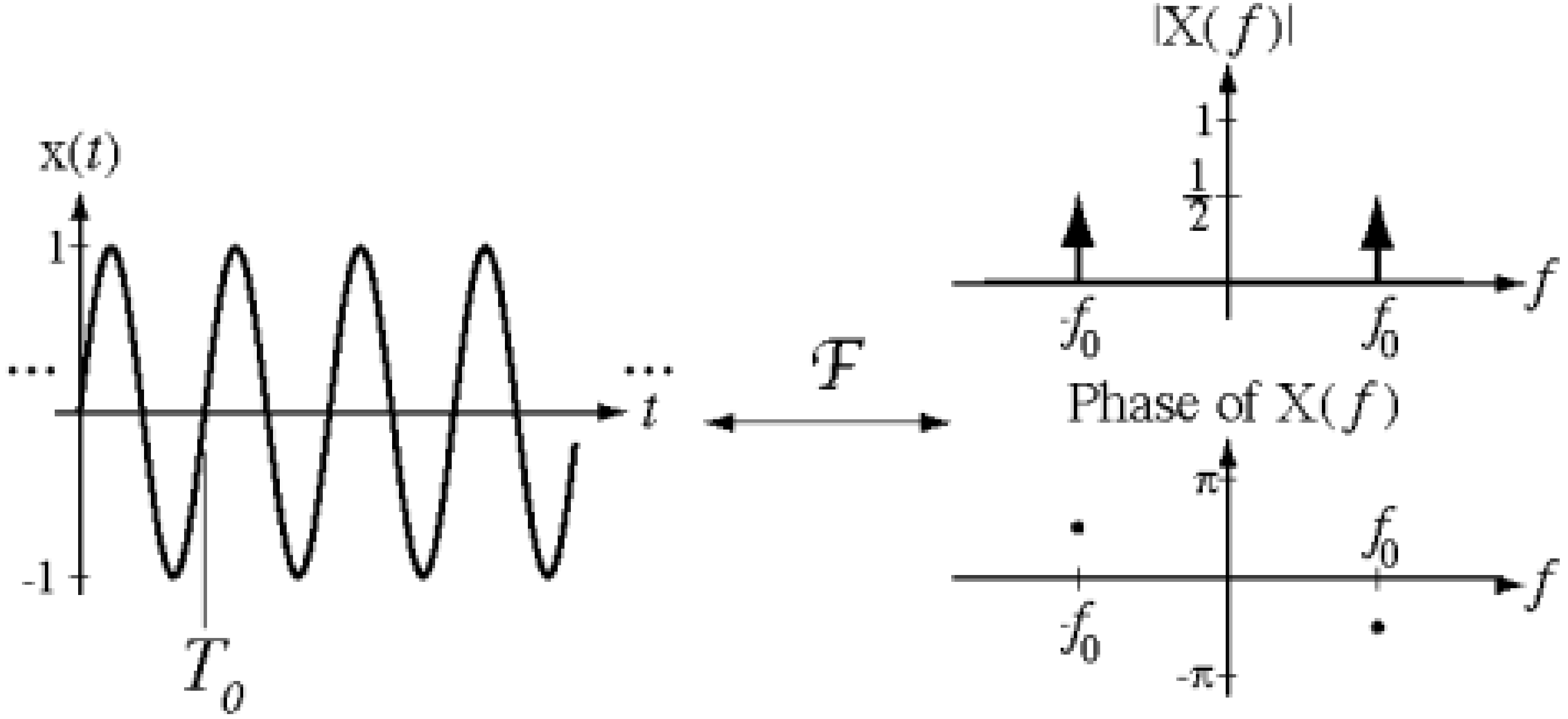
1 ⟷ δ(f)



$\cos 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$



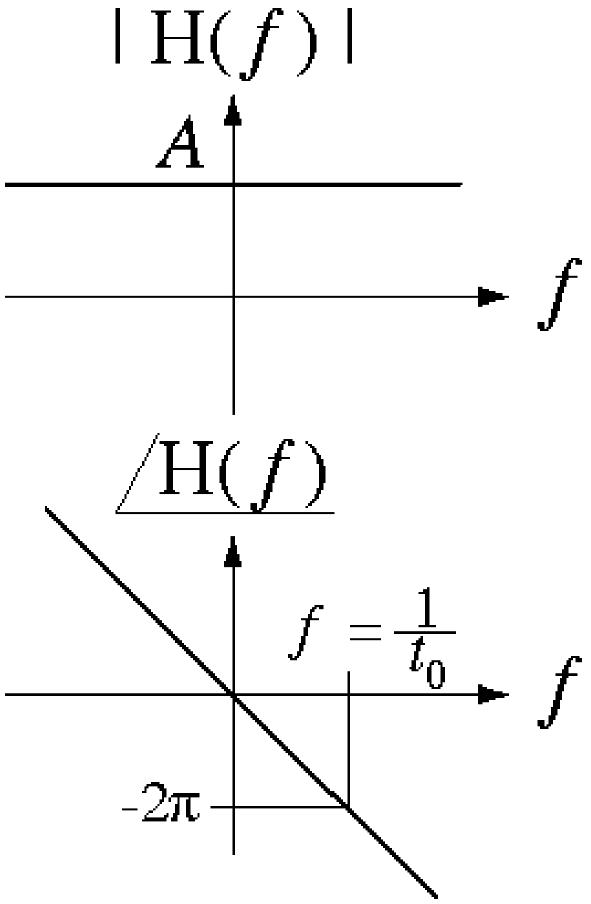
$\text{sen } 2\pi f_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}j[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$



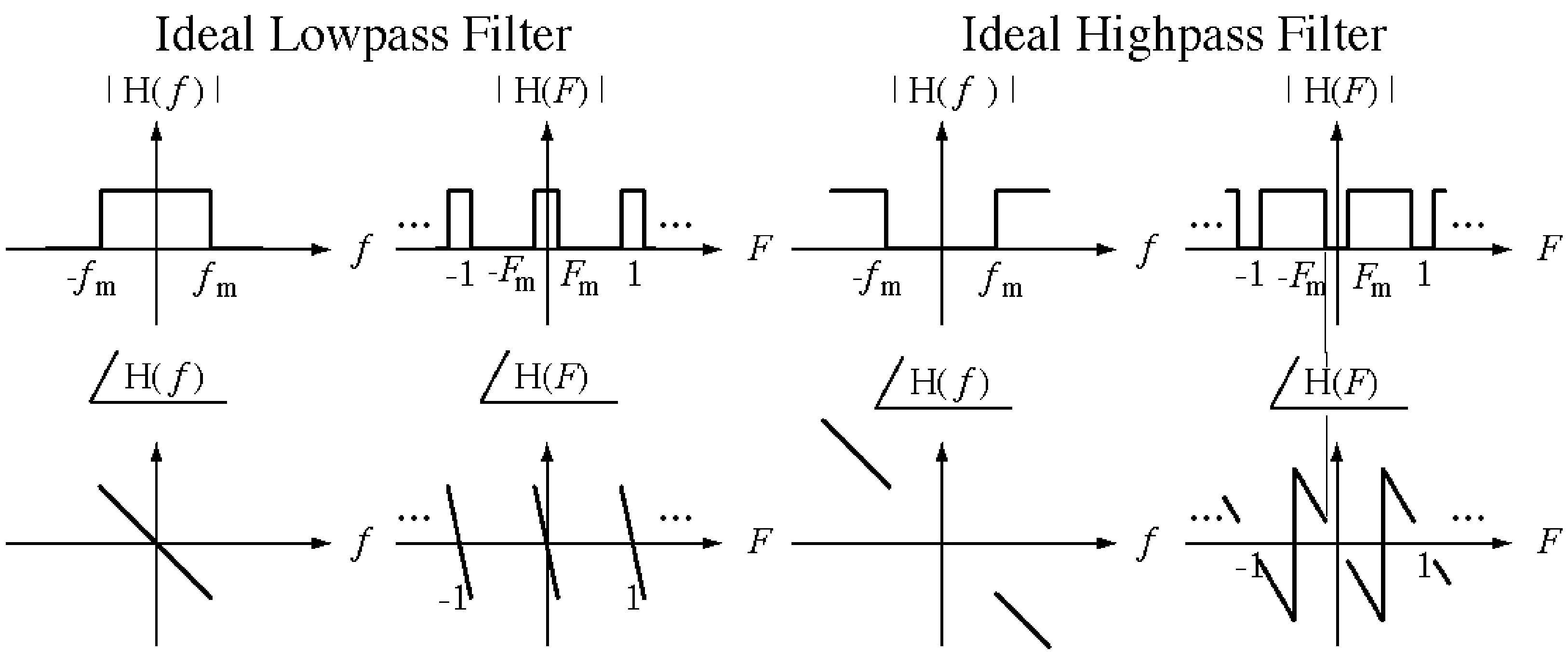
Filtros ideales en TC

- Filtro: separa lo deseado de lo que no es deseado.
- En señales un filtro separa señales en un rango de f, de señales en otro rango de f.
- Un filtro ideal "pasa" toda la señal en su banda de paso sin distorsión y bloquea la señal fuera de su banda.

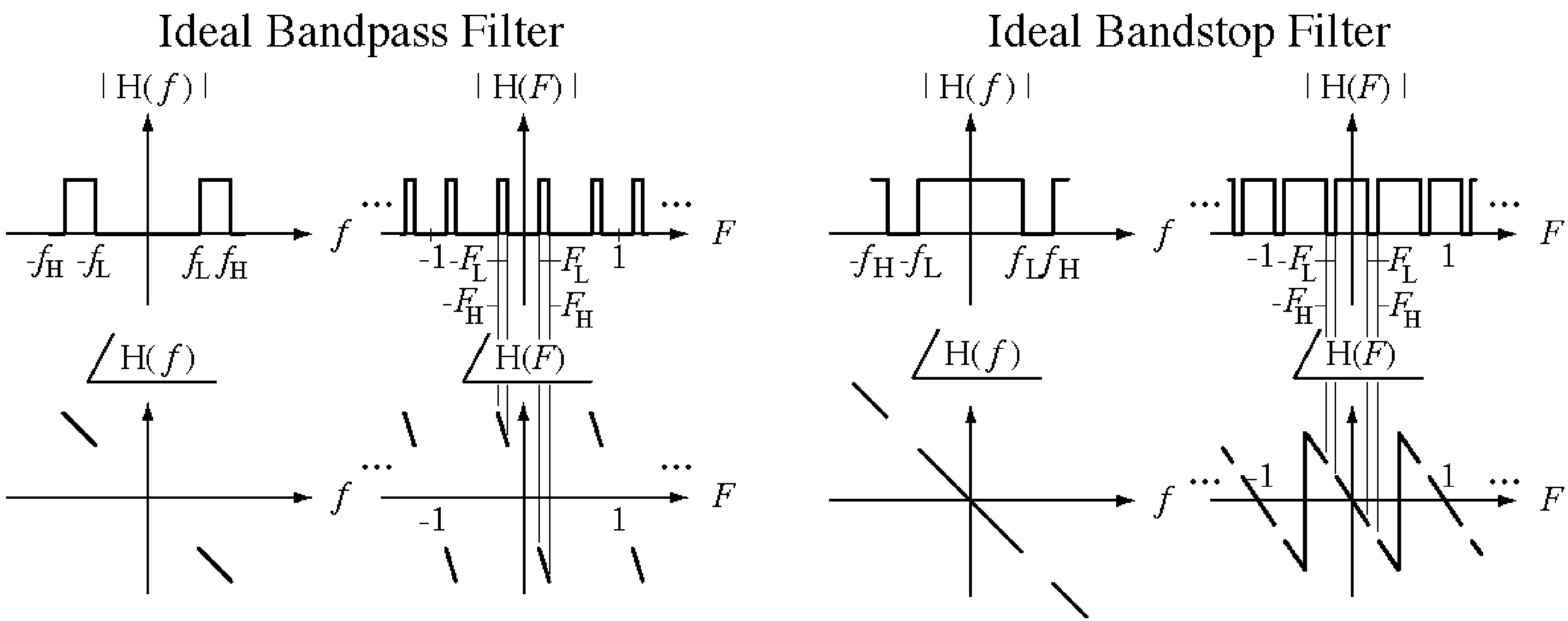
Filtro ideal



Pasa bajos ideal – Pasa altos ideal



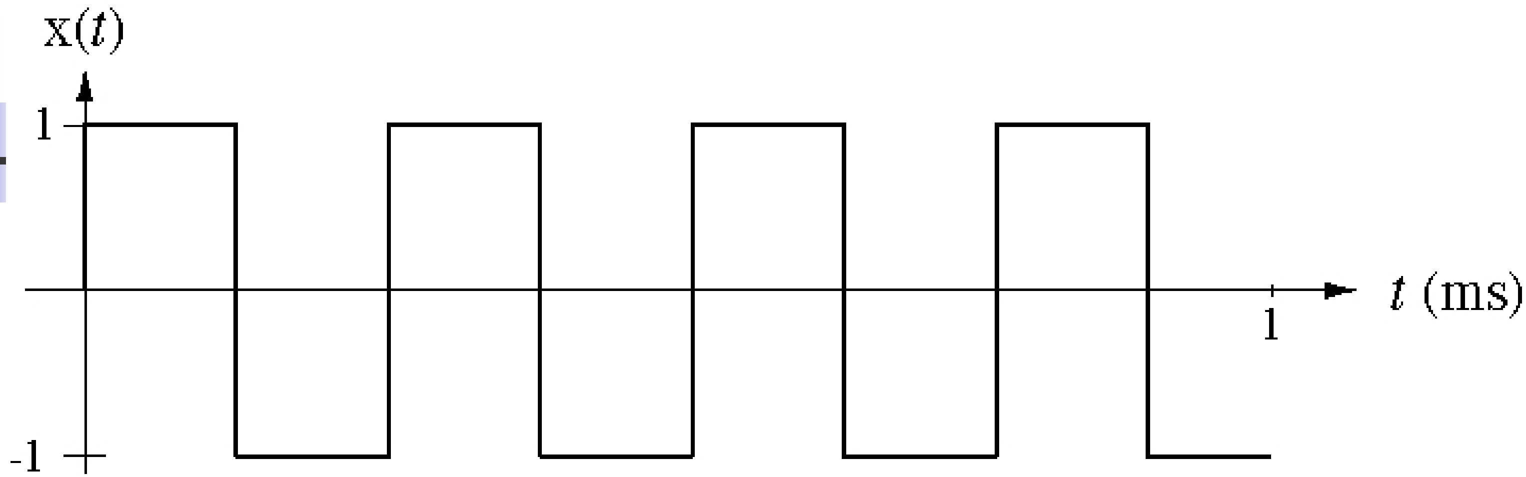
Pasa banda ideal – Rechazo de banda ideal



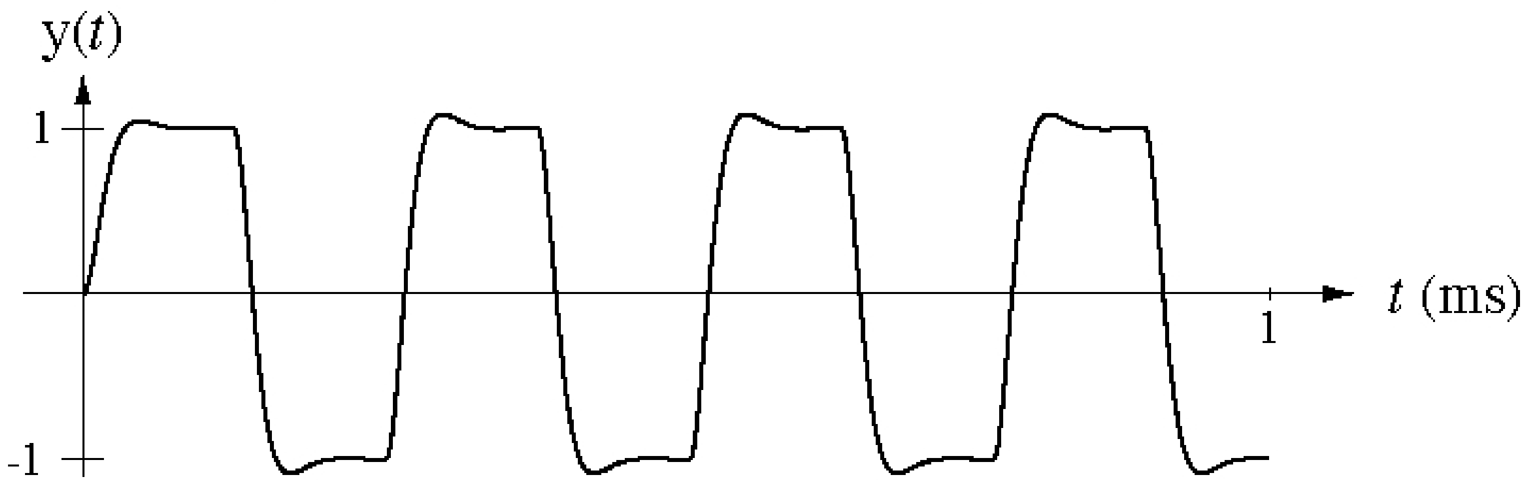
Ancho de banda

- Rango de f.
- Rango de frecuencias que deja pasar el filtro ó rango de frecuencias presentes en la señal.

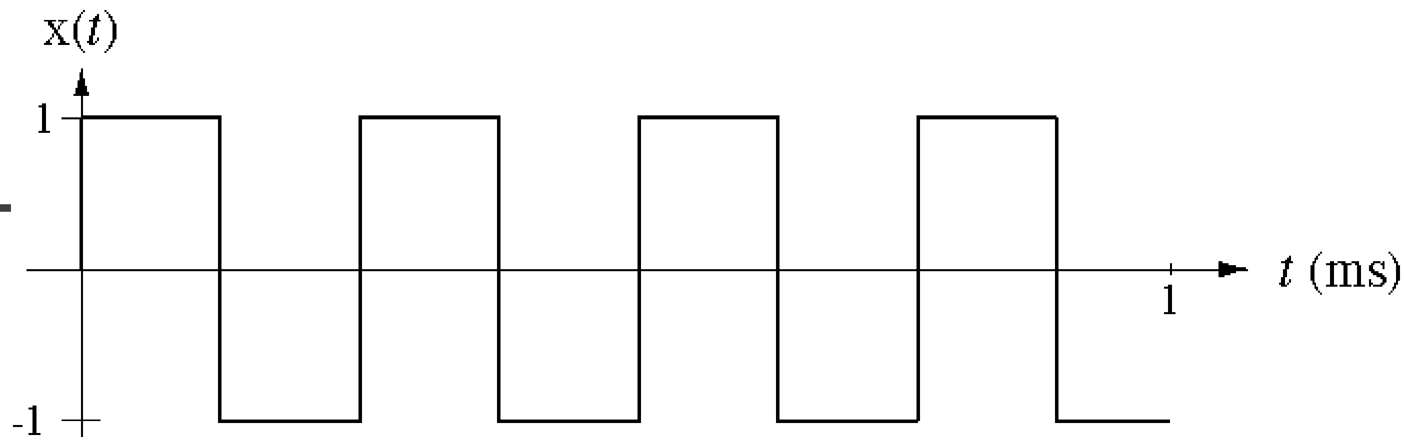
Excitation of a Causal Lowpass Filter



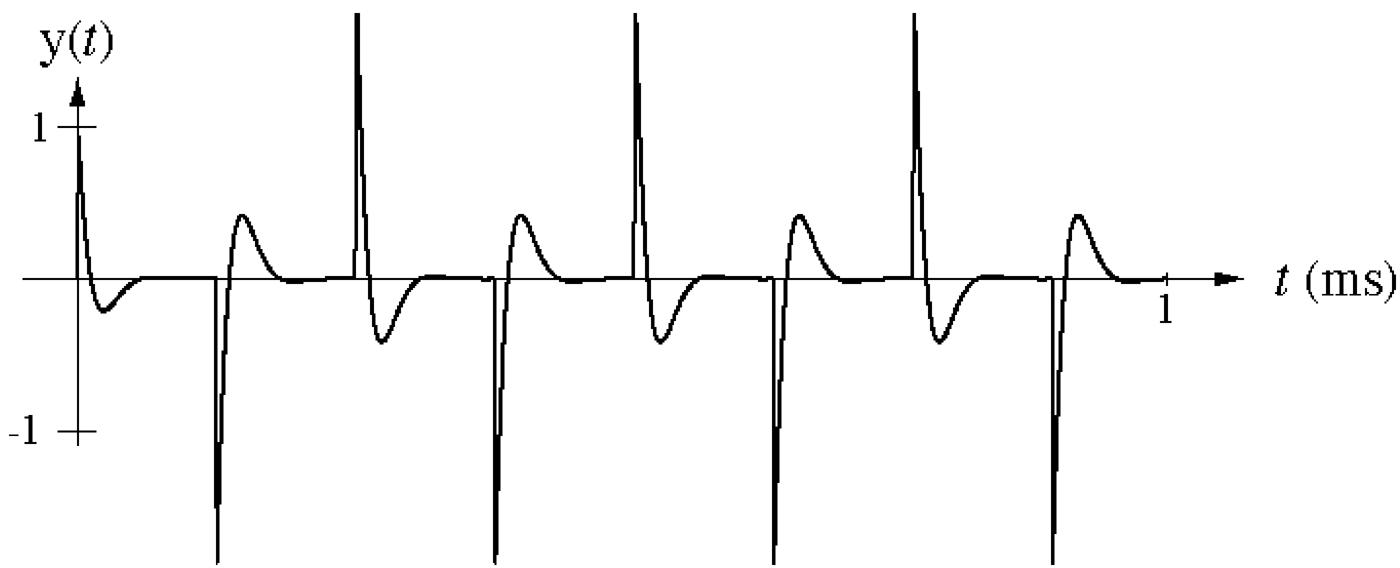
Response of a Causal Lowpass Filter



Excitation of a Causal Highpass Filter



Response of a Causal Highpass Filter



Contenido en f