Análisis de Fourier en TC

- Teorema de Fourier
- Serie de Fourier
- Transformada de Fourier
- Fórmulas de análisis y síntesis
- Respuesta en f de sistemas LTI

Dominio de Frecuencia

- Metodología

-Señales elementales a partir de las cuales se puede construir por combinación lineal cualquier señal.

-Construir la respuesta al sistema a partir de su respuesta a la señal elemental.

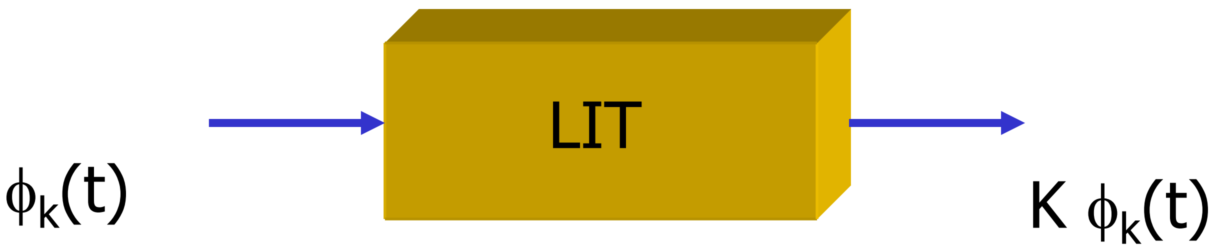
- Se introducen los siguientes conceptos :

-Exponenciales complejas como señal básica.

-Dualidad entre dominios de tiempo y frecuencia.

-Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

- Antes pensábamos → impulsos
- Ahora pensamos → funciones propias de los sistemas LIT



Entrada : función propia → Salida : misma función multiplicada por una constante

A partir de la propiedad de superposición de los sistemas LIT

$$x(t)=\Sigma\ a_k\ \phi_k(t) \quad \Rightarrow \quad y(t)= \Sigma\ k\ a_k\ \phi_k(t)$$

¿Cómo calculamos k?

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau} d\tau\right] e^{st} =$$

$$= H(s)\, e^{st}$$

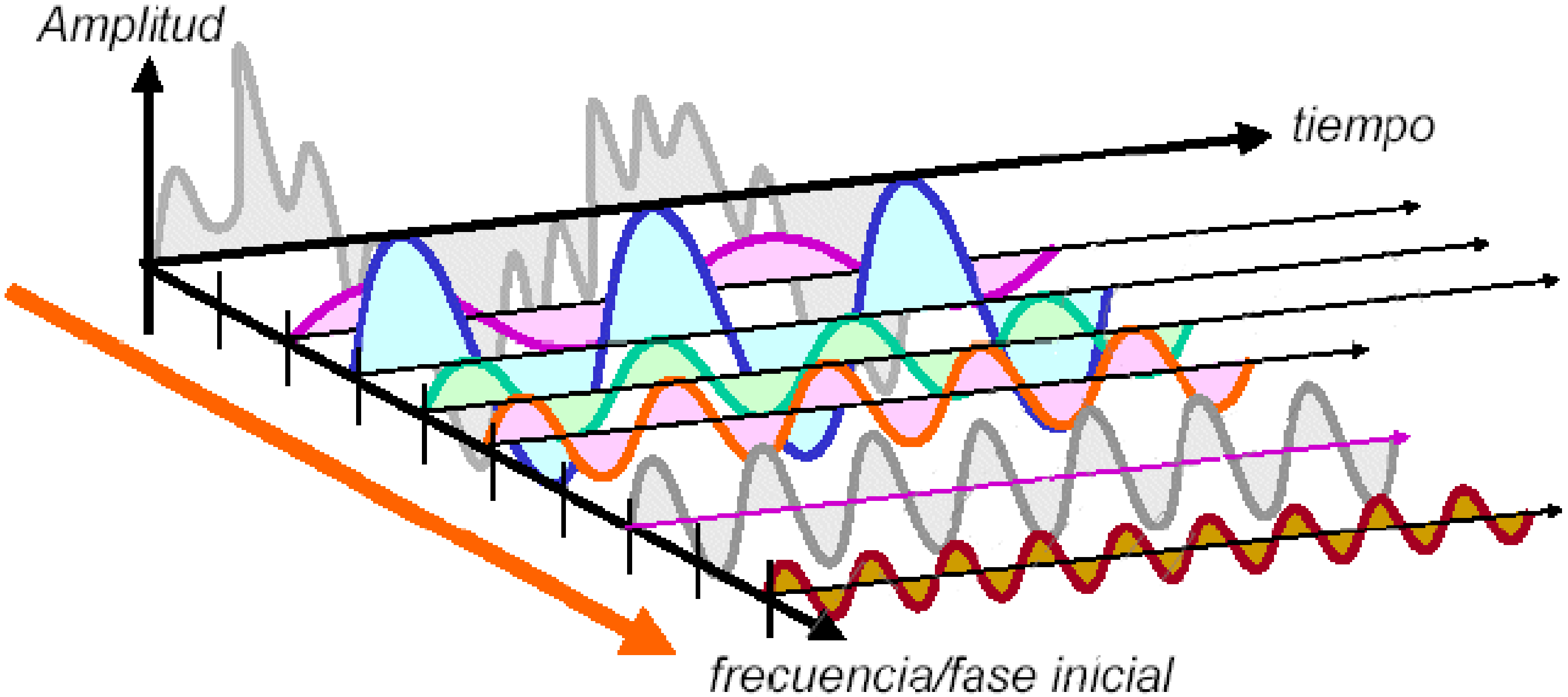
Función propia

Valor propio

Fourier : con
s=jw

Representación de señales

Uno de los métodos de representar la señal x(t) es bajo la forma de componentes de ≠ f, c/u de ellas con una amplitud y fase inicial

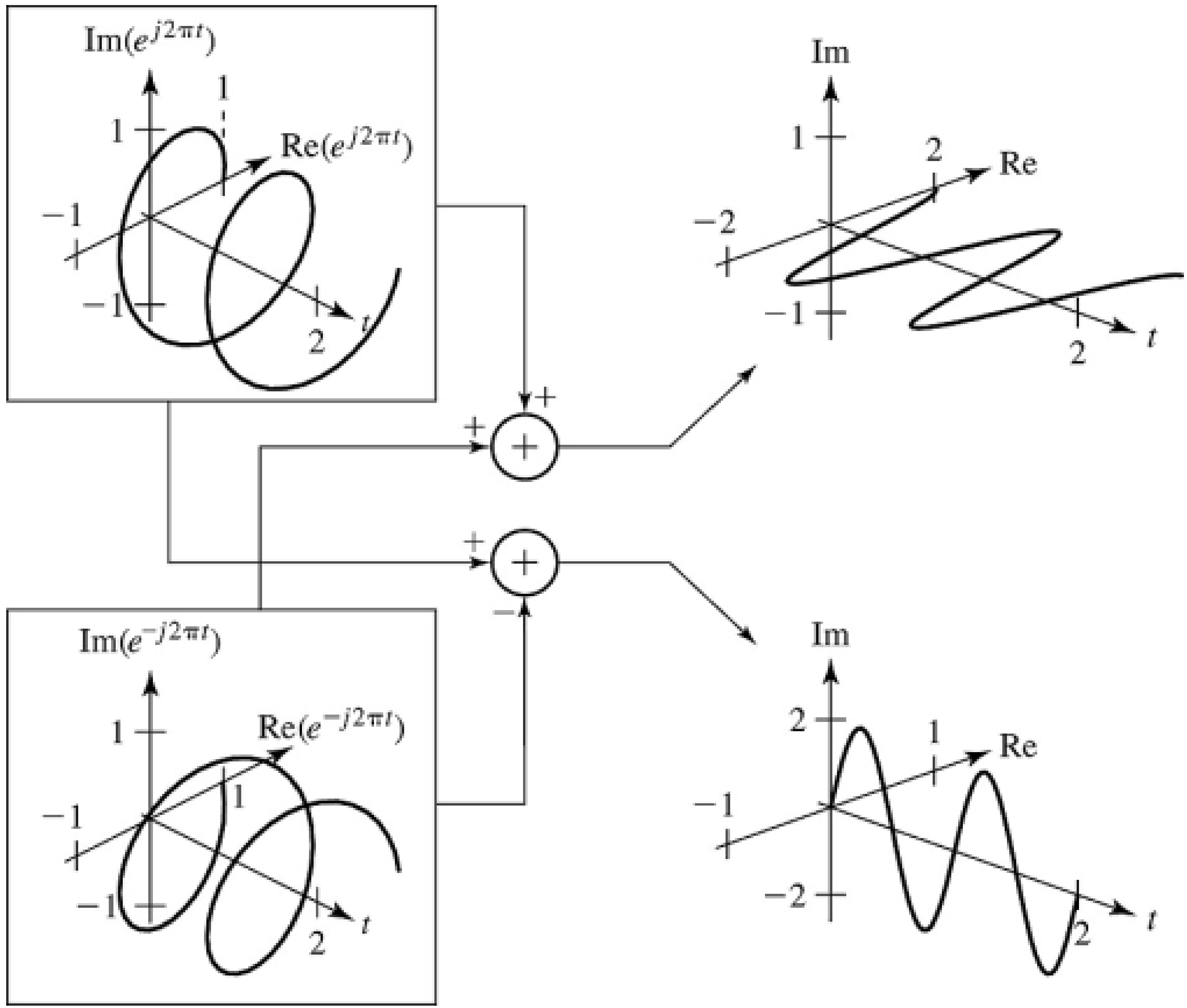


Recordemos, utilizando la fórmula de Euler

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j\, sen\, \omega_0 t$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = Re\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$sen\, \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = Im\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$



$\mathrm{Im}(e^{j2\pi t})$
$\mathrm{Re}(e^{j2\pi t})$
$\mathrm{Im}(e^{-j2\pi t})$
$\mathrm{Re}(e^{-j2\pi t})$
Im
Re
Im
Re

Exponencial compleja

- Asociado a c/exponencial compleja existe un conjunto de señales relacionadas armónicamente, sus frecuencias son múltiplos enteros de una única frecuencia

w_0 $\Rightarrow$ $\phi_k(t) = e^{j w_0 t k}$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2.....$

- Para c/k ϕ_k es una función periódica de frecuencia fundamental $|k|w_0$.

Una combinación lineal de dichas señales :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; e^{jk\,w_0 t}$$

también es periódica con período T_0 y se conoce como representación por Series de Fourier de x(t). Expresa la descomposición de la señal x(t) como combinación lineal de k exponenciales complejas:

- Con amplitudes C_k discretas
- Para un conjunto discreto de frecuencias kw_0 relacionadas armónicamente

Formas alternativas

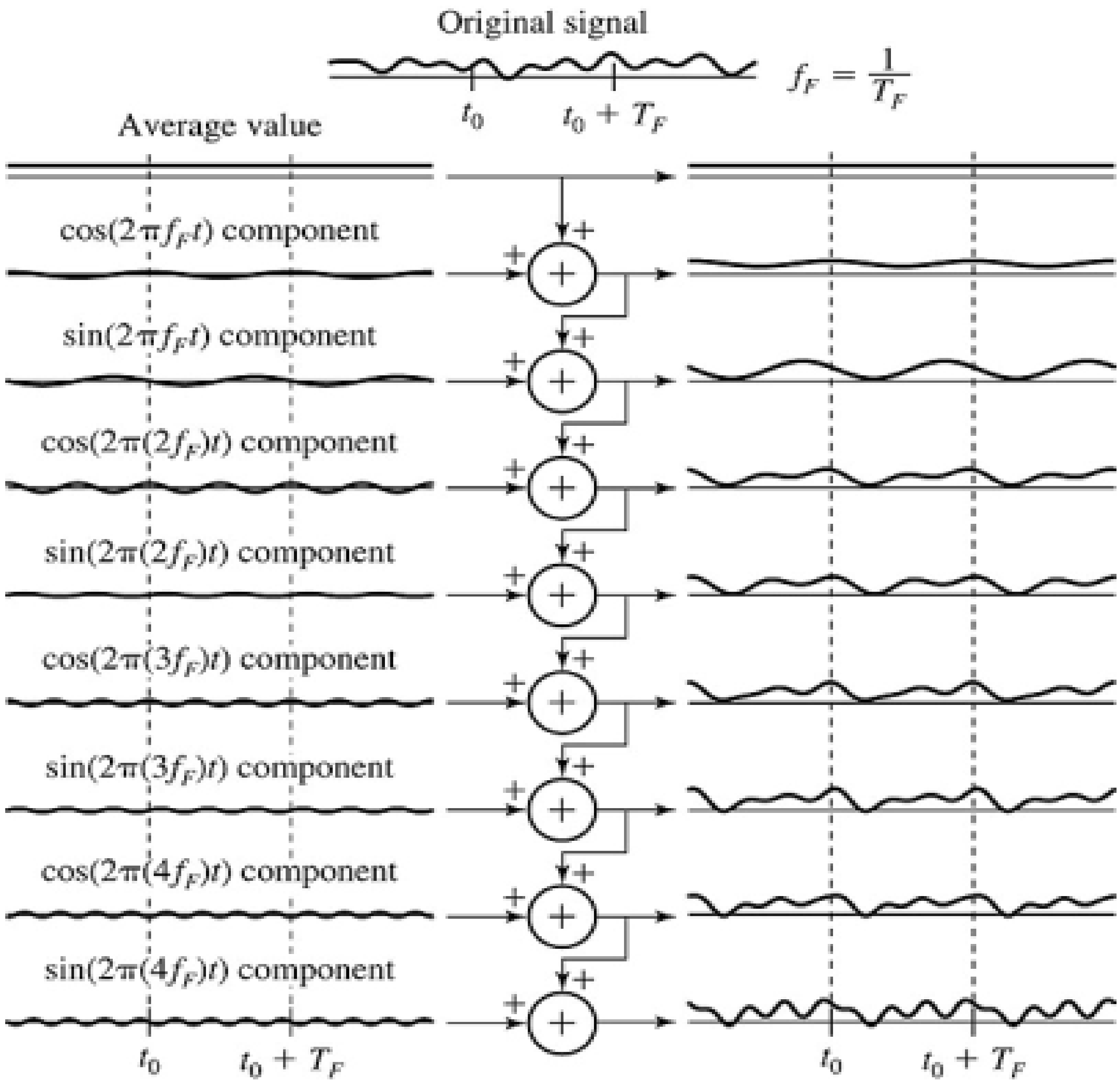
$$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k w_0 t)-b_k \operatorname{sen}(k w_0 t)]$$

$$x(t)=a_0+a_1\left(\frac{e^{jw_0t}+e^{-jw_0}}{2}\right)+a_2\left(\frac{e^{j2w_0t}+e^{-j2w_0t}}{2}\right)+....+b_1\left(\frac{e^{jw_0t}-e^{-jw_0}}{2j}\right)+b_2\left(\frac{e^{j2w_0t}-e^{-j2w_0t}}{2}\right)+..$$

$$x(t)=a_0+e^{jw_0t}\left(\frac{a_1}{2}-j\frac{b_1}{2}\right)+e^{-jw_0}\left(\frac{a_1}{2}+j\frac{b_1}{2}\right)+e^{j2w_0t}\left(\frac{a_2}{2}-j\frac{b_2}{2}\right)+e^{-j2w_0t}\left(\frac{a_2}{2}+j\frac{b_2}{2}\right)+....$$

$$x(t)=....+A_{-1}e^{-jw_0t}+A_0+A_1e^{jw_0t}+.....$$

Forma trigonométrica



Teorema de Fourier

- Toda señal periódica que cumpla las condiciones de Dirichlet :
  - Integrable en el período
  - Nº finito de máximos y mínimos en el período
  - Nº finito de discontinuidades
- Puede reproducirse como una superposición de componentes sinusoidales de frecuencias f_0, $2f_0$,...
- La componente con el mismo período que la función original se denomina *fundamental.*
- Las componentes con f superiores a la fundamental se denominan *armónicos.*

Determinación de la representación en series de Fourier de una señal periódica contínua

- Suponiendo que una señal periódica pudiera representarse con la serie anterior, necesitaríamos un procedimiento para determinar los coeficientes a_k:

$$x(t)\,e^{-jn w_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}\, e^{-jn w_0 t}$$

- Integrando ambos miembros de 0 a T

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jn w_0 t}\, dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}\, e^{-jn w_0 t}\, dt$$

$$\int_0^T x(t)\, e^{-jn w_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k [\int_0^T e^{j(k-n) w_0 t}\, dt]$$

$$\int_0^T e^{j(k-n) w_0 t}\, dt = \int_0^T \cos(k-n)\, w_0\, t dt + j \int_0^T sen(k-n)\, w_0\, t dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n) w_0 t}\, dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, e^{-jn w_0 t} dt$$

Este par de ecuaciones define la serie de Fourier de una señal periódica contínua :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jn w_0 t} dt$$

Ecuación de análisis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{jk w_0 t}$$

Ecuación de síntesis

Propiedades de la serie de Fourier

- Linealidad

$$x(t) \longrightarrow a_k \qquad y(t) \longrightarrow b_k$$

$$Ax(t)+By(t) \longrightarrow c_k=Aa_k+Bb_k$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow e^{-jkw_0t_0}a_k$$

Propiedades de la serie de Fourier

- Escalamiento de tiempo

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jka w_0 t}$$

- Relación de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Simetría de la forma de onda

- ✓ Función par
- ✓ Función impar
- ✓ Simetría de ½ onda

$$f(t)=-f(t+T/2)$$

La porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada ½ período.

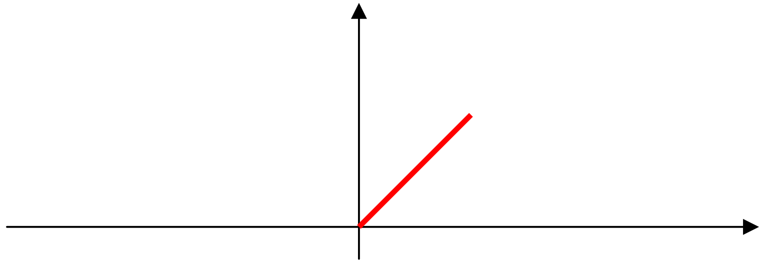
Simetría de la forma de onda

- Simetría de cuarto de onda

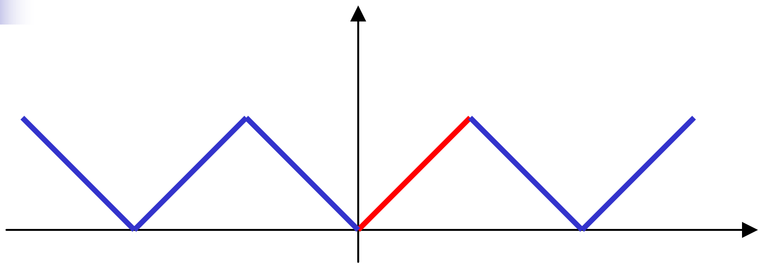
Si una función periódica f(t) tiene simetría de media onda y además es una función par ó impar, entonces f(t) tiene simetría de cuarto de onda par ó impar.

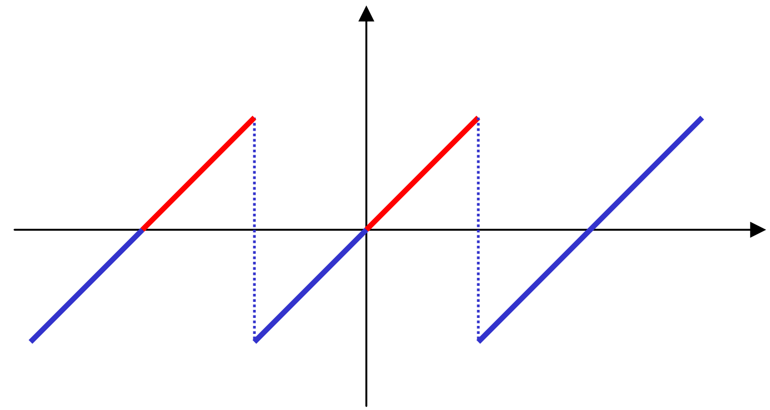
¿Qué podemos decir de los coeficientes con la simetría?

- Función par $\Rightarrow$ a_0 y a_n sólo cos
- Función impar $\Rightarrow$ b_n sólo senos
- Función con simetría de ½ onda $\Rightarrow$ armónicos impares
- Función con simetría de ¼ de onda par $\Rightarrow$ armónicas impares coseno
- Función con simetría de ¼ de onda impar $\Rightarrow$ armónicas impares senos

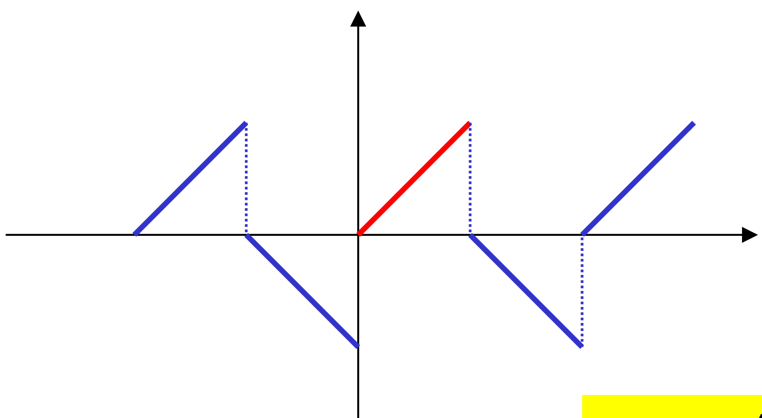


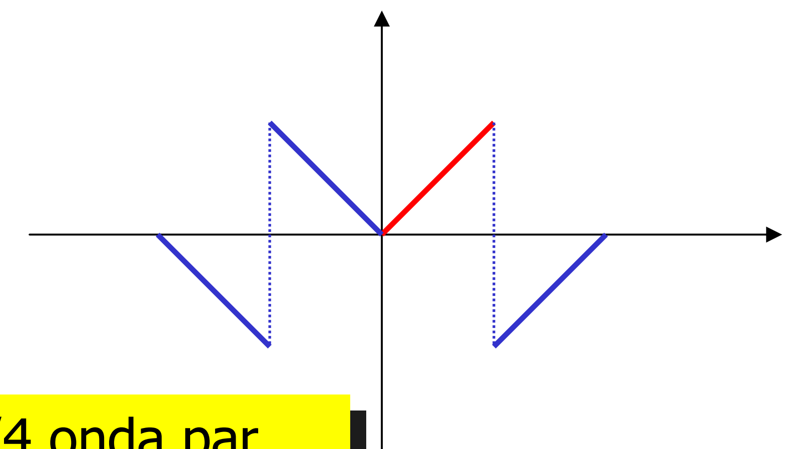
Simetría impar (senos)





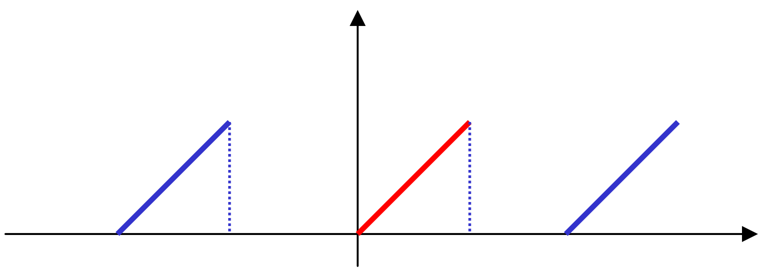
Simetría par (cosenos)



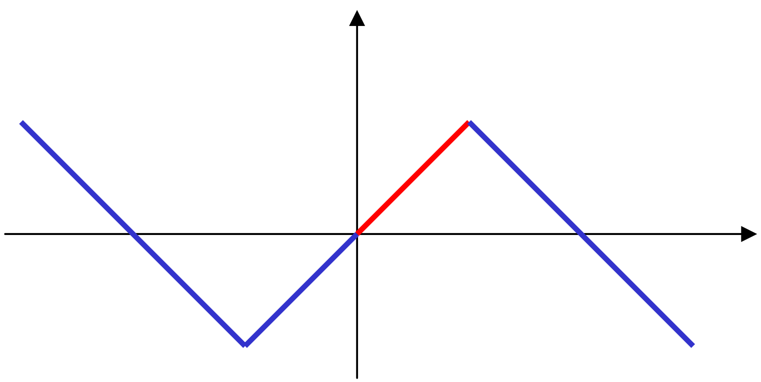


Simetría ½ onda (senos y cosenos impares)

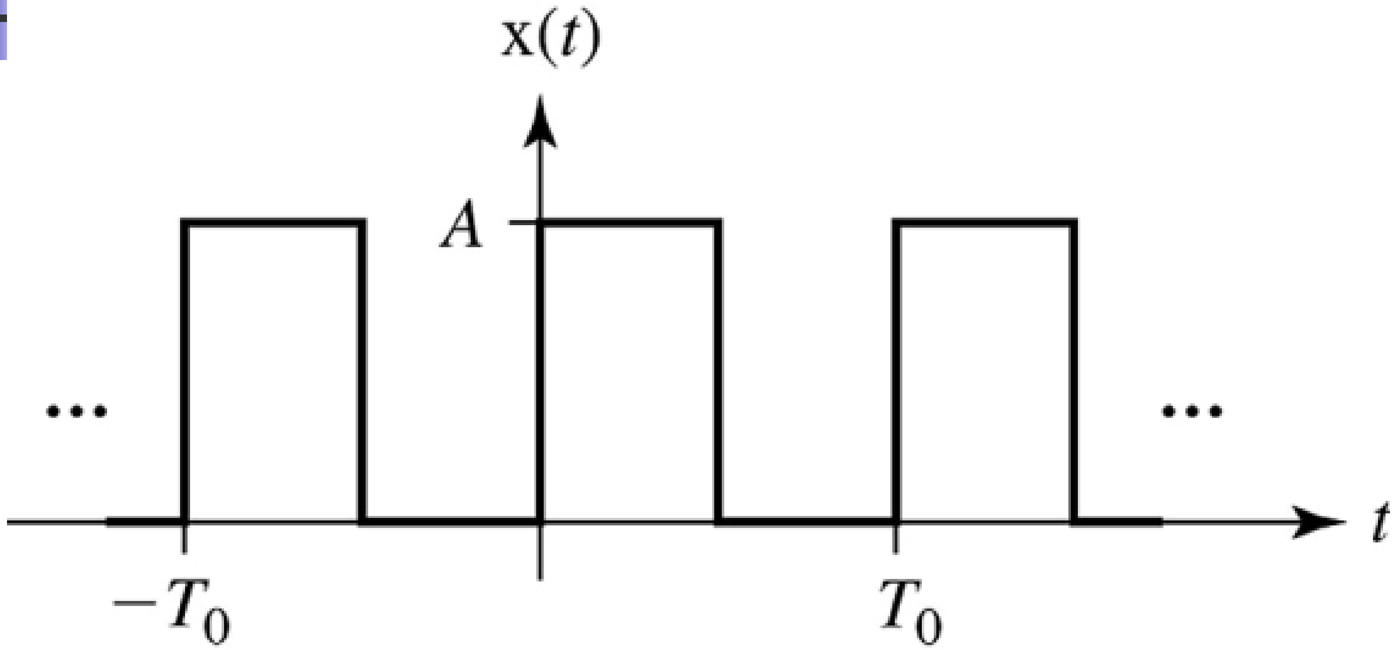
Simetría 1/4 onda par (cosenos impares)

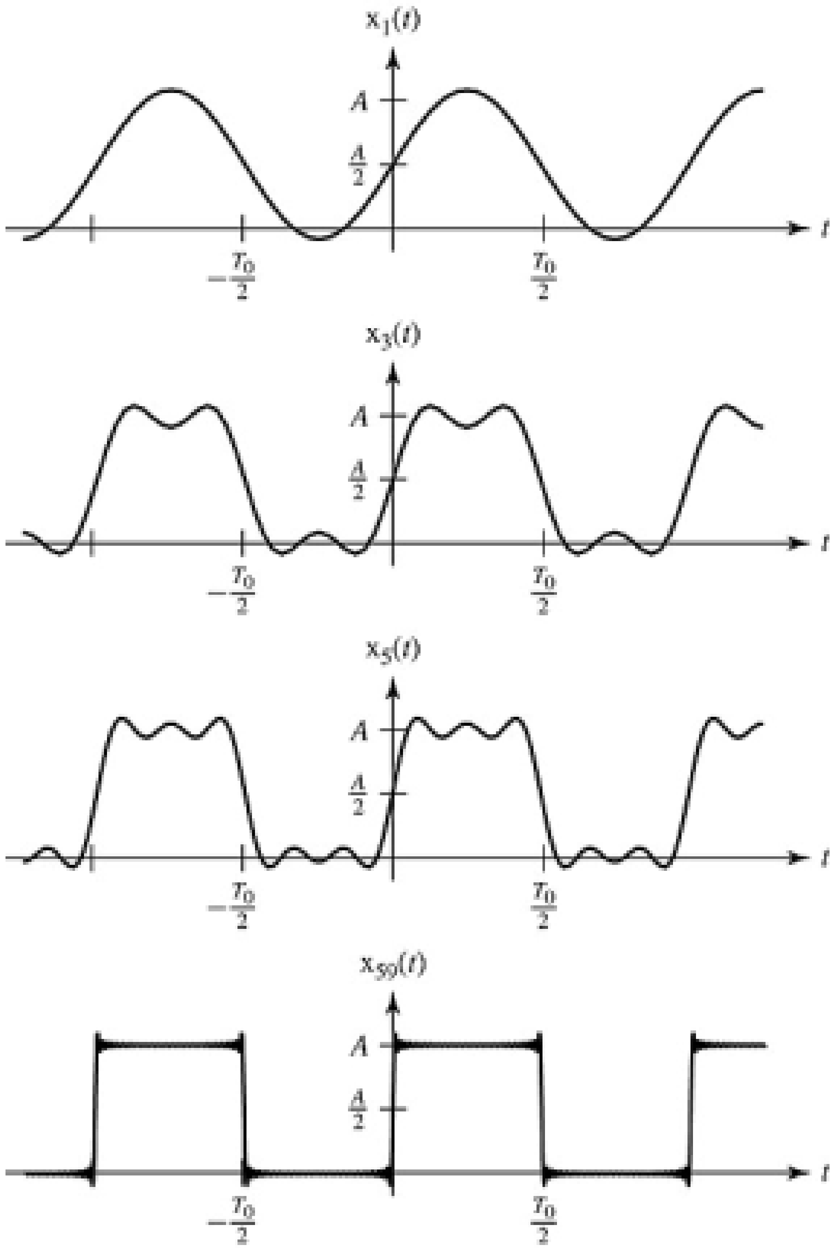


senos y cosenos



Simetría 1/4 onda impar
(senos impares)

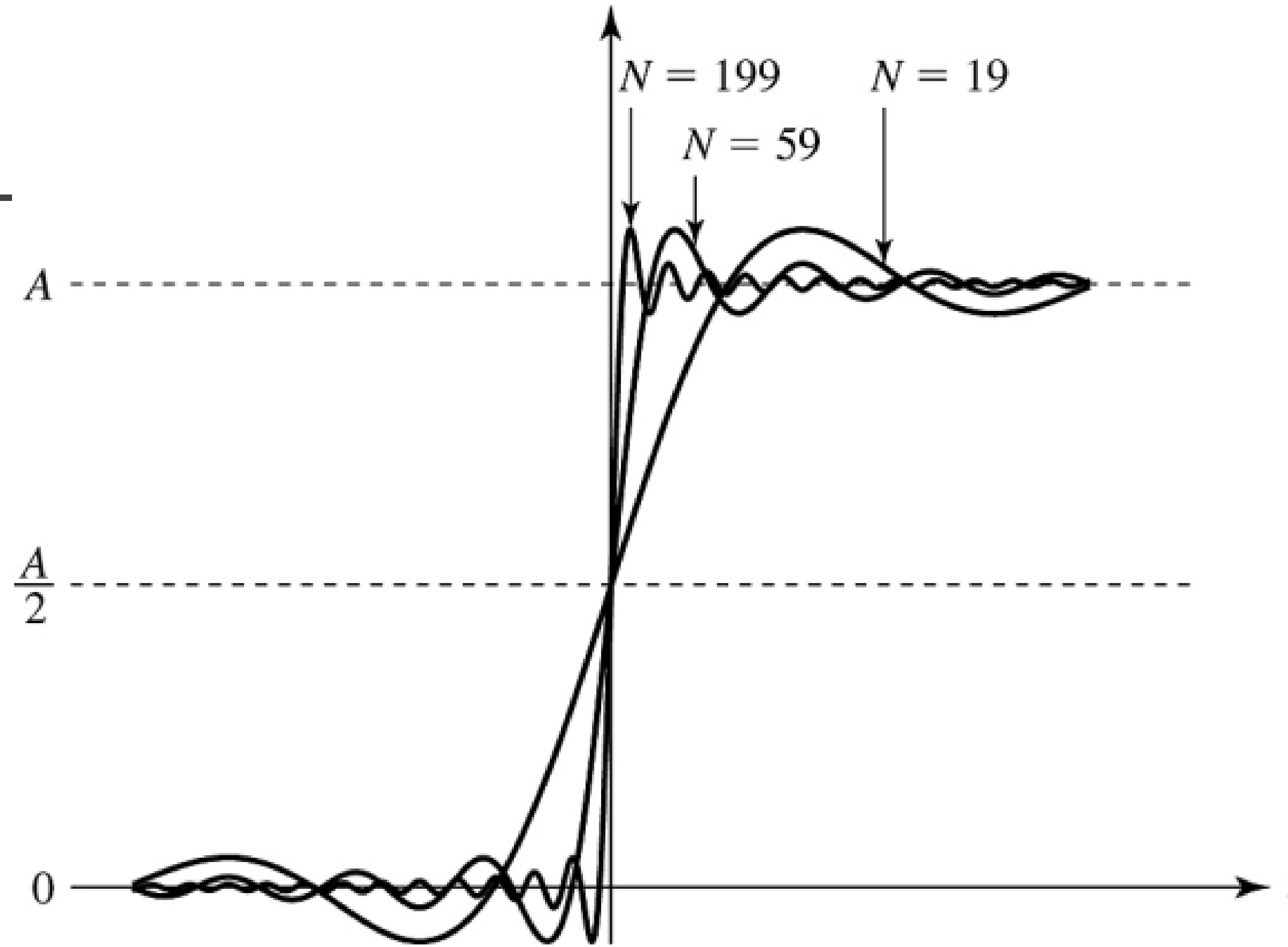

x(t)
A
...
...
t
−T0
T0

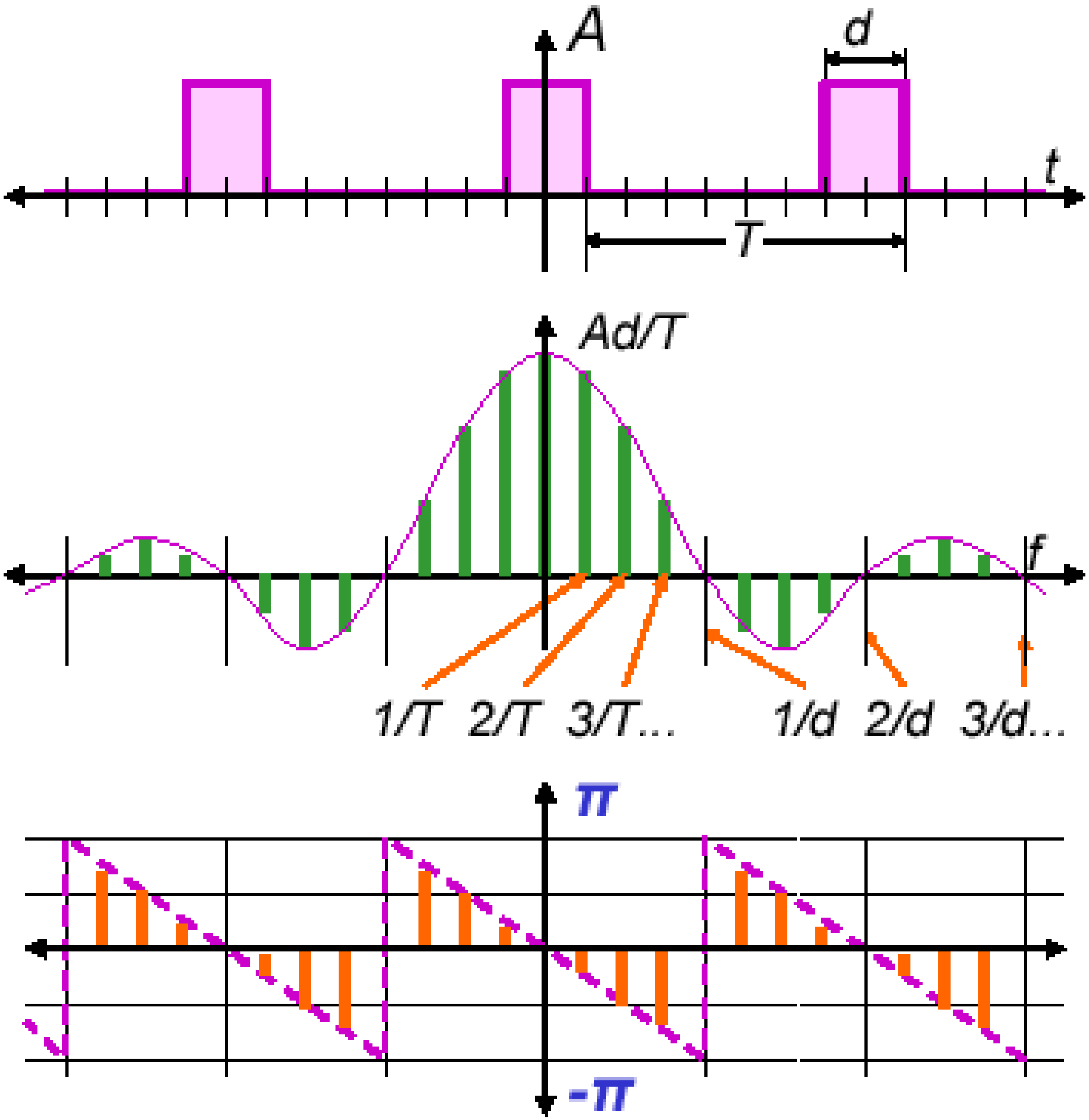


x1(t)
A
A/2
t
−T0/2
T0/2
x3(t)
x5(t)
x59(t)

Convergencia de la serie de Fourier

- Las señales que encontramos en el mundo real cumplen las condiciones de Dirichlet. Por lo tanto :
- Las series de Fourier=x(t) donde x(t) es contínua
- Las series de Fourier="punto medio" en puntos de discontinuidad.
- Convergencia. Fenómeno de Gibbs en puntos de discontinuidad.


N = 199
N = 59
N = 19
A
A/2
0
t


A
d
t
T
Ad/T
f
1/T 2/T 3/T...
1/d 2/d 3/d...
π
-π

Propiedades de las funciones seno y coseno: funciones ortogonales

- Un conjunto de funciones $\phi_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera se cumple

$$\int_a^b \phi_m(t)\,\phi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & para \;\; m \neq n \\ r_n & para \;\; m = n \end{cases}$$

Consideremos un conjunto de funciones senoidales