Sistemas Lineales

Sistemas

- Un sistema opera con señales en una ó más entradas para producir señales en una ó más salidas. Los representamos mediante diagrama en bloques

Señal de entrada ó excitación

Señal de salida ó respuesta

x(t) ⟶ y(t)

Sistema contínuo y discreto

- Un sistema continuo transforma las señales de entrada contínuas, en señales contínuas de salida.

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

- Un sistema discreto transforma las señales discretas de entrada, en señales de tiempo discreto de salida.

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

Propiedades de los sistemas

- Sistema estático ó sin memoria : si su salida en cualquier valor de la variable independiente (t ó n), depende a lo sumo de la entrada en ese mismo instante.

✓ $y(t)=Ax(t)$

✓ $y[n]=x^2[n]+x[n]$

Propiedades de los sistemas

- Sistema dinámico ó con memoria : cuando su salida en un instante depende del valor de la entrada en otros instantes.
  - $y(t)=1/C\int x(t)dt$ tensión en un C
  - $y[n]=x[n-1]$ retardo

Propiedades de los sistemas

- Linealidad : si una excitación $x_1[n]$ ocasiona una respuesta $y_1[n]$ y una excitación $x_2[n]$ provoca una respuesta $y_2[n]$, entonces una excitación

$$x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$$

causará la respuesta

$$y[n]=ay_1[n]+by_2[n]$$

donde a y b son ctes. arbitrarias

Propiedades de los sistemas

- Estas características de los sistemas lineales se llama *superposición.*
- Un sistema lineal además debe cumplir que para excitación 0, x[n]=0 deberá ser y[n]=0
- Para tiempo continuo
- $ax_1(t)+bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t)+by_2(t)$

Propiedades de los sistemas

- Entonces un sistema es lineal si :
- la respuesta a $x_1(t)+x_2(t)$ es $y_1(t)+y_2(t)$
- la respuesta a $ax_1(t)+bx_2(t)$ es $ay_1(t)+by_2(t)$ donde a y b son ctes. complejas cualesquiera.
- Propiedad de aditividad
- Propiedad de escalamiento

Ej. $y(t)=tx(t)$ ¿es lineal?

- $x_1(t)$ $y_1(t)=tx_1(t)$
- $x_2(t)$ $y_2(t)=tx_2(t)$
- $x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$
- $y_3(t)=tx_3(t)=t(ax_1(t)+bx_2(t))=$
- $atx_1(t)+btx_2(t)=ay_1(t)+by_2(t)$

- Concluimos que el sistema es lineal.

Ej. $y[n]=2x[n]+3$ ¿es lineal?

- $x_1[n]$ $y_1[n]=2x[n]+3$
- $x_2[n]$ $y_2[n]=2x[n]+3$
- $x_3[n]=x_1[n]+x_2[n]$
- $y_3[n]=2(x[n]+x[n])+3=$
- $y[n]+y[n]$
- No es lineal. No cumple $y[n]=0$ para $x[n]=0$

Invariancia en el tiempo

- Un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo no cambian con el tiempo.
- Si se aplica una señal x[n] la salida es y[n], si aplicamos $x[n-n_0]$ la salida será $y[n-n_0]$ pues el sistema es invariante en el tiempo. Un desplazamiento en tiempo de la señal de entrada produce un corrimiento en tiempo de la señal de salida.
- En TC $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

Ej. y[n]=2x[n]

- Si retardamos si retardamos la secuencia de entrada k muestras
- $y_r[n]=2x[n-k]$
- Ahora retardemos la salida original
- $y[n-k]=2x[n-k]$
- Como $y_r[n]=y[n-k]$ el sistema es invariante en el tiempo.

Ej. $y(t)=tx(t-3)$

- Si retardamos la entrada
- $y_r(t)=tx(t-3-t_0)$
- Si retardamos la salida original
- $y(t-t_0)=(t-t_0)x(t-3-t_0)$
- $y_r(t) \neq y(t-t_0)$ ⇐
- El sistema no es invariante en el tiempo.

Causalidad

➢ Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado. También se le suele llamar sistema no anticipativo.

- $y[n]=x[n]-x[n-1]$ ⇐ causal
- $y(t)=x(t-1)$ ⇐ causal
- $y(t)=x(t-2)+x(t+4)$ ⇐ no causal

Estabilidad

- Definimos un sistema estable como aquél en el que cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Es decir
- $|x(t)| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty$
- Si para alguna entrada acotada x(t) la salida no está acotada (es infinita) el sistema no es estable (inestable).

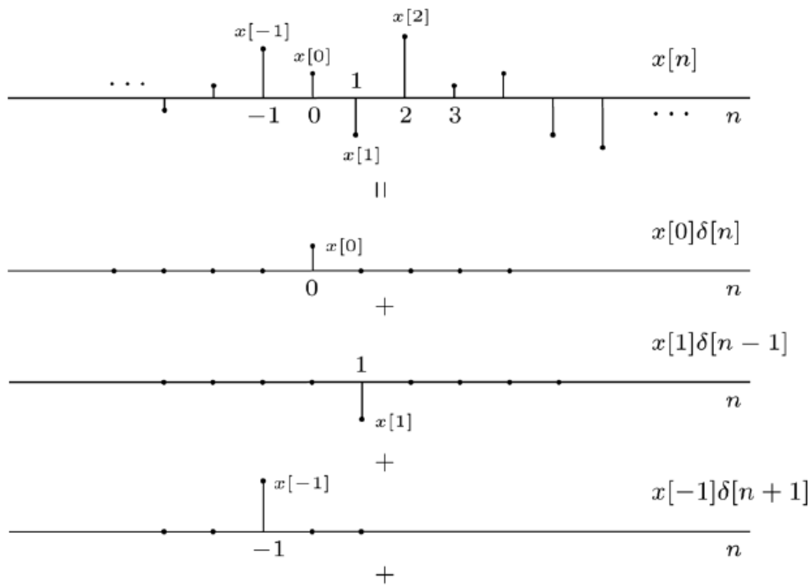
Ej. y[n]=nx[n-3]

- Si consideramos que la entrada es x[n]=u[n] que es acotada, la salida será una rampa que no está acotada
- y[n]=nu[n-3]
- En consecuencia el sistema no es estable

SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO (LIT)

Sistemas LIT discretos : la suma de convolución

- Nos preguntamos si existe un conjunto de señales tales que:
  - Podamos representar otras señales como combinación de estas funciones básicas
  - La respuesta a estas señales de los sistemas LTI será simple ?
- La idea es ver como cómo se puede utilizar el impulso unitario discreto para representar cualquier señal discreta.



TD ➡ muestras unitarias desplazadas

- Es decir

$$x[n] = ...+ x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n+1] + ...$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Coeficientes

Funciones básicas

✓ Representamos una secuencia arbitraria como combinación lineal de impulsos unitarios desplazados, con pesos x[k].

✓ La ecuación anterior se la suele llamar *propiedad de selección* del impulso unitario discreto.

✓ $\delta[n-k]$ es distinta de cero para n=k y selecciona el valor de la función x[k] para k=n.

- Supongamos un sistema lineal y definamos como $h_k[n]$ a la respuesta del sistema a $\delta[n-k]$
- Por superposición

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h_k[n]$$

- De acuerdo a la expresión anterior: si conocemos la respuesta de un sistema lineal al conjunto de impulsos desplazados, podemos construir la respuesta a una entrada arbitraria.

LIT

- Supongamos un sistema IT (invariante en el tiempo), entonces :

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Suma de convolución ó suma de superposición

Convolución

- La operación anterior la llamamos convolución de las secuencias x[n] y h[n]. De manera simbólica :

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- Por tanto el sistema LIT queda completamente caracterizado por la respuesta a una sola señal, su respuesta al impulso unitario.

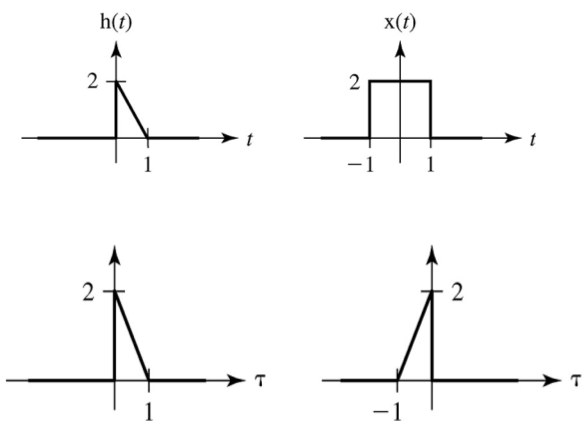
Para TC

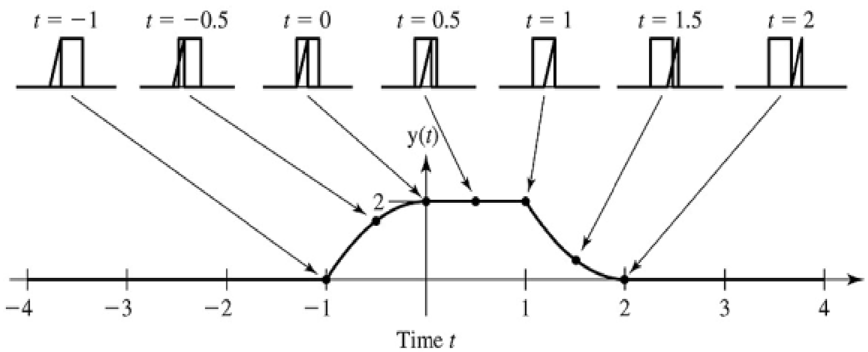
- Con un razonamiento análogo al caso de TD, podemos obtener una caracterización completa de un sistema LIT de TC en término de su respuesta al impulso unitario.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- *Integral de convolución o de superposición*

Interpretación gráfica de la convolución





Propiedades de los sistemas LIT

- Conmutativa
  - ✓ $x[n]*h[n] = h[n]*x[n]$
  - ✓ $x(t)*h(t) = h(t)*x(t)$
- Distributiva
  - ✓ $x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$
  - ✓ $x(t)*(h_1(t)+h_2(t))=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$

Propiedades

- Asociativa
- $x[n]*(h_1[n]*h_2[n])=(x[n]*(h_1[n])*h_2[n]$
- $x(t)*(h_1(t)*h_2(t))=(x(t)*h_1(t))*h_2(t)$

Sistemas LIT descritos por ecuaciones diferenciales

- Son aquellos sistemas para los cuales la salida y la entrada están relacionadas por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.
- Ej.

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)$$

Solución

- La solución consistirá de la suma de la solución particular y una solución a la homogénea (entrada cero).
- A la homogénea se la llama respuesta natural del sistema.
- Es necesaria por las condiciones iniciales.

Solución

- En general, una ecuación diferencial de orden N :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{d t^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k}$$

- Para el caso que N=0

$$y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{d t^k}$$

- y(t) es una función explícita.

Sistemas LIT descritos por ecuaciones de diferencias

- Es la contraparte de TD.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$ Recursiva

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)x[n-k]$$ No recursiva