Análisis de Señales

Descripción matemática de señales

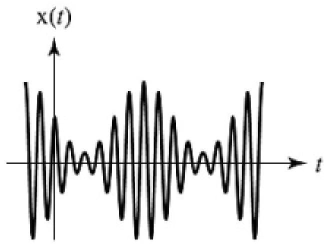
Señales

- Las señales son funciones de variables independientes, portadoras de información
- Señales eléctricas:tensiones y corrientes en un circuito
- Señales acústicas: audio
- Señales de video: variación de la intensidad
- Señales biológicas: secuencias de bases de un gen

Variables independientes

- Pueden ser continuas
- Pueden ser discretas
- Pueden ser 1-D, 2-D.....N-D
- Para este curso: tiempo. Var. Indep.1-D
- tiempo continuo (TC) x(t) ➡ t toma valores continuos
- tiempo discreto (TC) x[n] ➡ n toma valores enteros

Señales en TC :analógicas

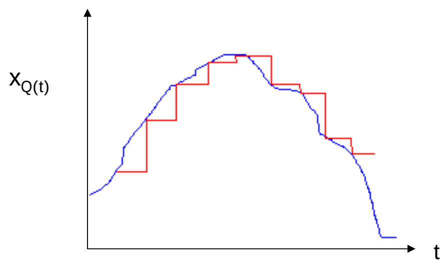


Amplitud y tiempo continuos - x(t)

t valores contínuos

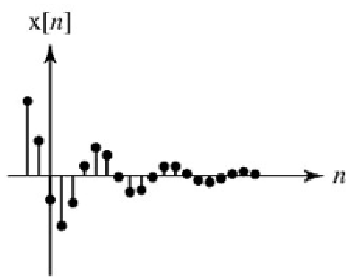
La mayoría de las señales del mundo físico son del tipo TC. Por ej. tensión, corriente, presión, temperatura y velocidad

Señales cuantizadas



Tiempo continuo, amplitud discreta. La amplitud solo toma determinados valores.

Señales en TD : muestreadas



Muestreadas: tiempo discreto amplitud continua - x[n]

n valores enteros

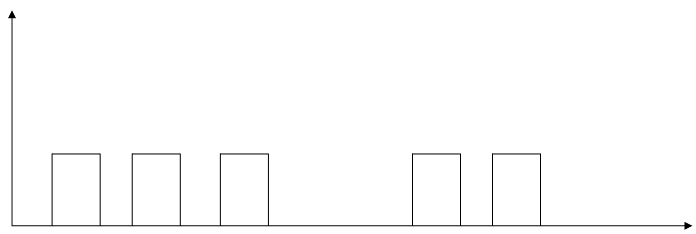
Señales en TD en la naturaleza

- Secuencia de bases ADN
- Población de especies

En TD hechas por el hombre

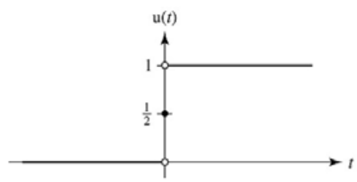
- Imagen digital
- Interés bancario

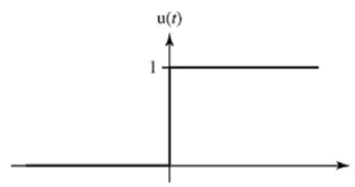
Digitales



FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO

Función escalón

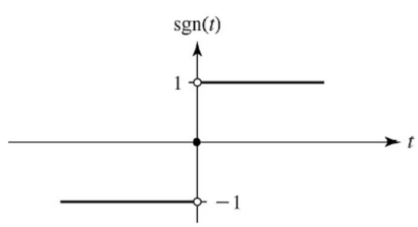


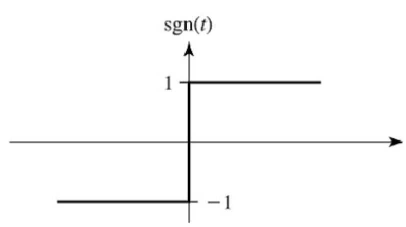


$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ \tfrac{1}{2} & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

Función signo

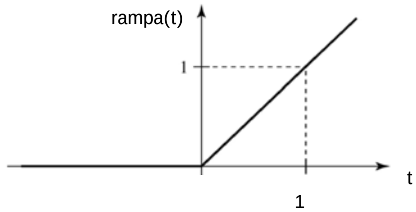




$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

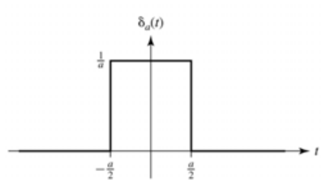
Función rampa unitaria

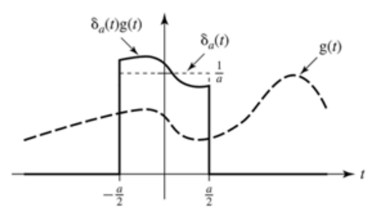


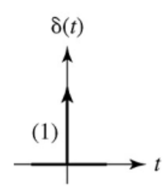
La función rampa en TC es la integral de la función escalón unitario

$$rampa(t) = \begin{Bmatrix} t & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau = tu(t)$$

Función impulso unitario



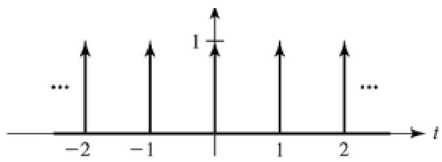




$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t) g(t)\,dt = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} g(t)\,dt$$

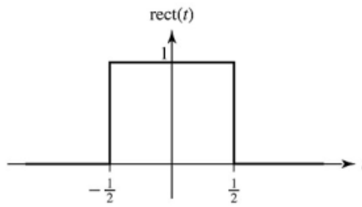
$$\lim_{a \to 0} A = g(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dt = g(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} (a) = g(0)$$

Tren de impulsos unitarios



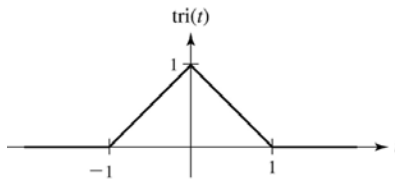
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-T)$$

Función rectángulo unitario



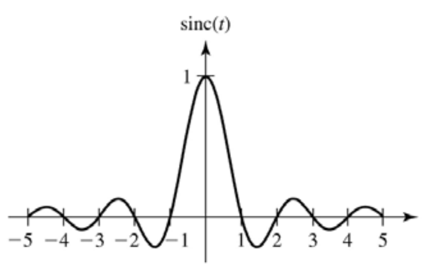
$$rect(t)=\begin{cases}1 & |t|\leq 1/2\\ 0 & |t|>1/2\end{cases}$$

Función triángulo unitario



$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Función sinc unitaria



$$\mathrm{sinc(t)} = \frac{\mathrm{sen}(\pi\,\mathrm{t})}{\pi\,\mathrm{t}}$$

Función de Dirichlet

$$drcl(t,N)=\frac{sen(\pi\,Nt)}{N\,sen(\pi\,t)}$$

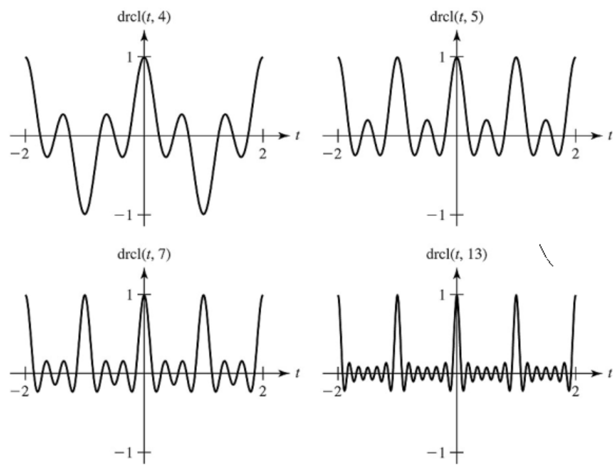
El numerador es 0 cuando t es múltiplo entero de 1/N.

La función vale 0 en esos puntos salvo que el denominador sea también sea 0.

Si N es par los extremos se alternan entre +1 y –1.

Si N es impar todos los extremos son +1.

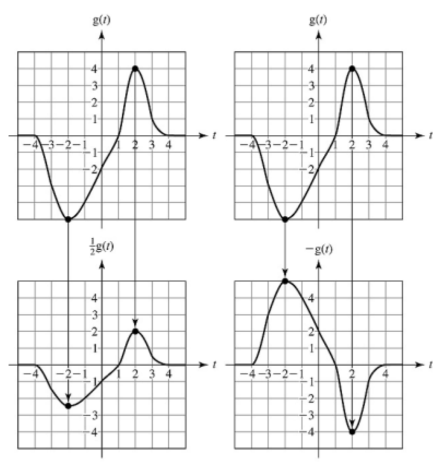
Función de Dirichlet



Transformaciones de la variable independiente

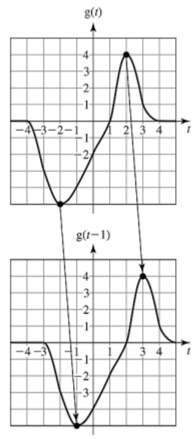
- Escalamiento de amplitud
- Desplazamiento en el tiempo
- Escalamiento en el tiempo
- Transformaciones múltiples

Escalamiento en amplitud



$g(t) \longrightarrow Ag(t)$

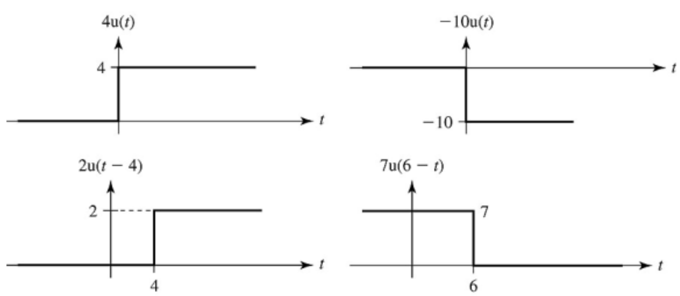
Desplazamiento en el tiempo



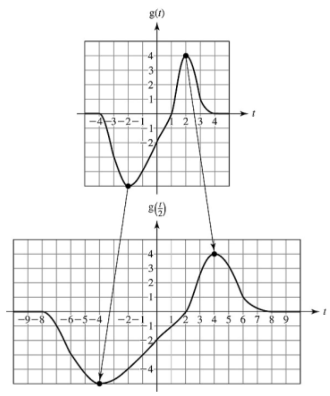
t ⟶ t-1

t	t-1	g(t-1)
-3	-4	0
-2	-3	-3
-1	-2	-5
0	-1	-4
1	0	-2
2	1	0
3	2	4

Ej. Funciones escalón transformadas



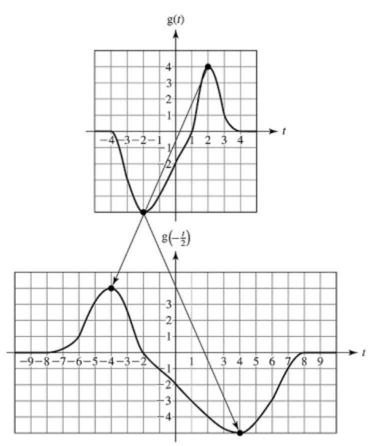
Escalamiento en el tiempo



$t \longrightarrow t/a$

t	t/2	g(t/2)
-4	-2	-5
-2	-1	-4
0	0	-2
2	1	0
4	2	4

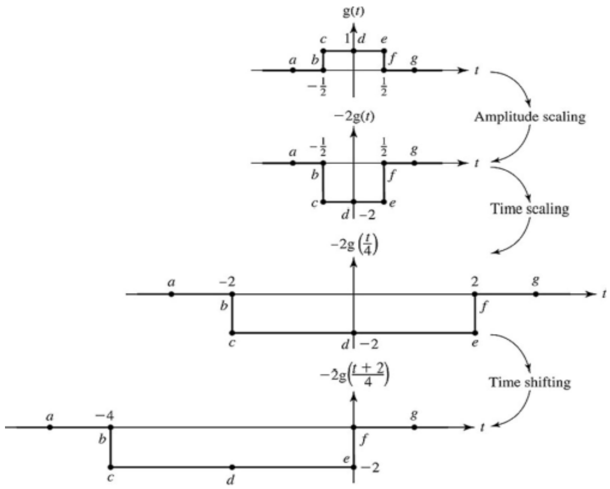
Escalamiento en el tiempo



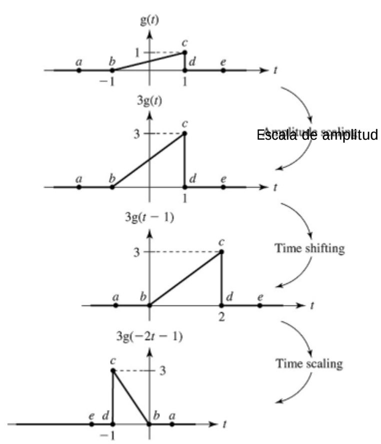
$t \longrightarrow -t/2$

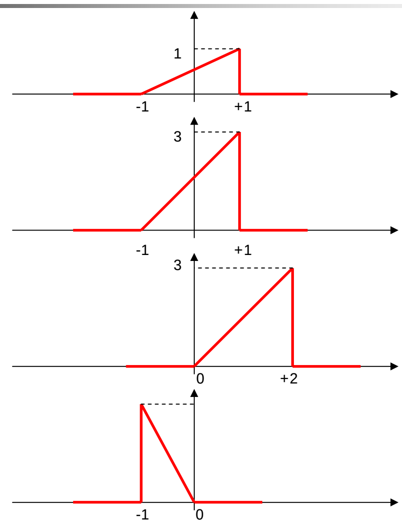
t	-t/2	g(-t/2)
-4	2	4
-2	1	0
0	0	-2
2	-1	-4
4	-2	-5

Transformaciones múltiples

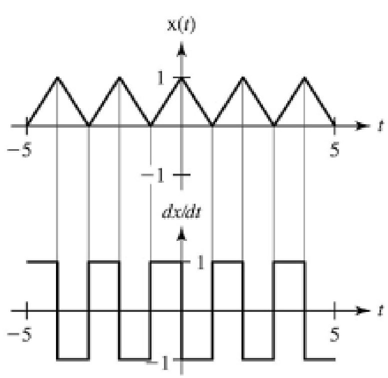


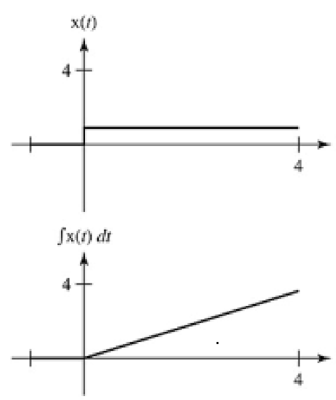
Transformaciones múltiples





Diferenciación e Integración

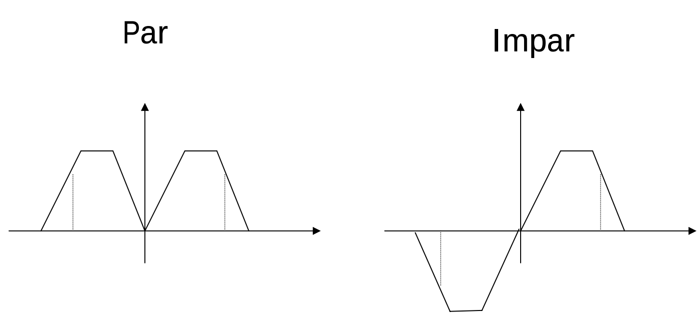




Funciones Par e Impar en TC

- Función par → $g(t)=g(-t)$
- Función impar → $g(t)=-g(-t)$
- Una forma de reconocer una función par, el eje de las ordenadas es un espejo.
- Para una función impar las mismas dos imágenes son en espejo negativas una de otra.

Funciones Par e Impar en TC



Ni Par Ni Impar

- ✓ Cualquier función g(t), incluso si no es par ni impar, puede expresarse como la suma de sus partes par e impar:

$$g_e(t) = \frac{g(t) + g(-t)}{2} \qquad g_o(t) = \frac{g(t) - g(-t)}{2}$$

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

Funciones periódicas en TC

- Una función g(t) es periódica si
- g(t)=g(t+nT)
- Para cualquier valor entero de n donde T es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental $T_{o.}$
- La frecuencia fundamental $f_o=1/T_o$ ciclos/seg ó Hz (Hertz)
- La frecuencia fundamental en radianes por segundo $\omega_o=2\pi f_o$.

Ej. $f(t)=\cos w_1 t + \cos w_2 t$

- Si la función es periódica con período T, entonces es posible encontrar dos enteros m y n tales que
- $w_1T=2\pi m$ $\qquad w_1/w_2=m/n$
- $w_2T=2\pi n$
- Es decir la relación w_1/w_2 debe ser un número racional.

Señales periódicas exponencial compleja y senoidal

- Consideremos la siguiente exponencial compleja :

$$x(t)=e^{jw_0t}$$

- Propiedad importante: es periódica

$$e^{jw_0t}=e^{jw_0(t+T)}=e^{jw_0t}e^{jw_0T}$$

- Para ser periódica

$$e^{jw_0T}=1$$

Señales exponenciales y senoidales

- ✓Si $\omega_0 = 0$ entonces $x(t) = 1$ periódica para cualquier valor de T.
- ✓Si $\omega_0 \neq 0$ entonces el período fundamental T_0, el valor positivo más pequeño de T que cumple con

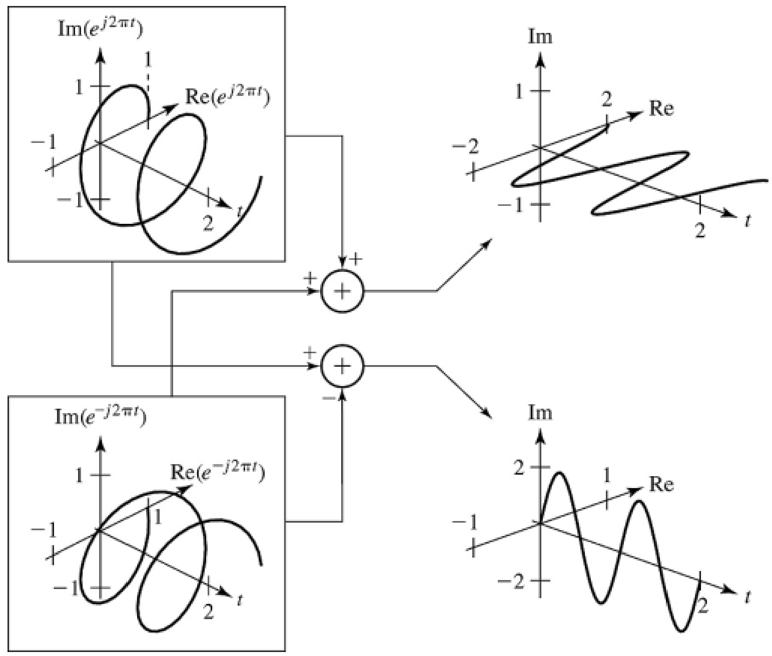
$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

Recordando relación : exponencial compleja ➡ señal senoidal

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\,sen\,\omega_0 t$$

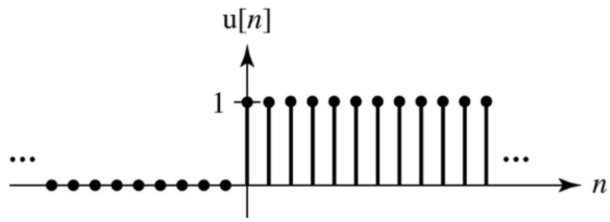
$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = Re\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$

$$sen\,\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = Im\left\{e^{j\omega_0 t}\right\}$$



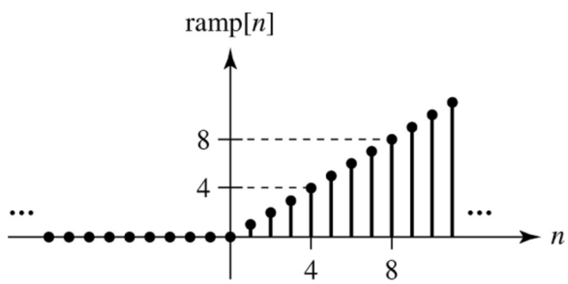
FUNCIONES DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Secuencia unitaria



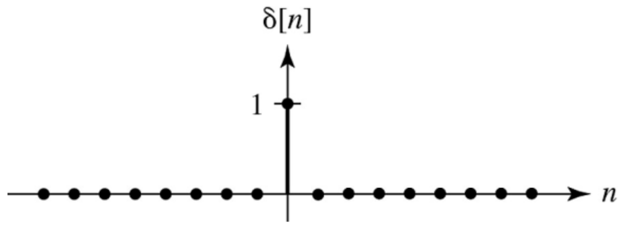
$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

Función rampa unitaria



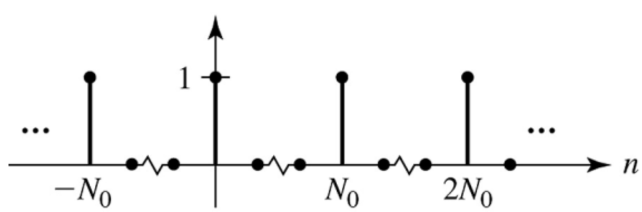
$$rampa[n]=\begin{cases}n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

Impulso unitario



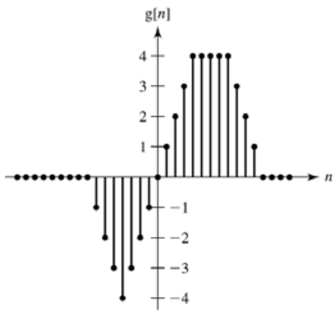
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

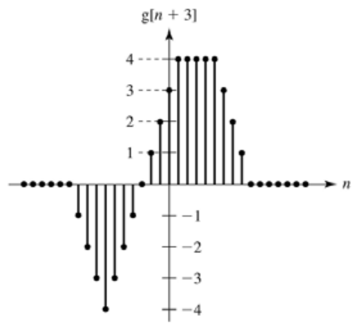
Tren de impulsos unitarios



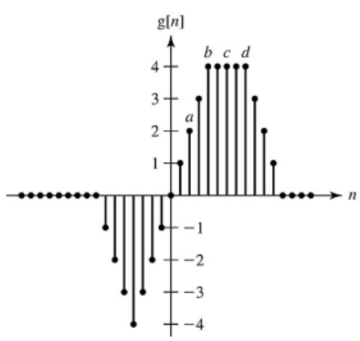
$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - m\, N_0]$$

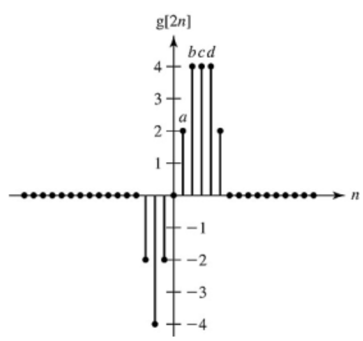
Desplazamiento en TD





Escalamiento en TD





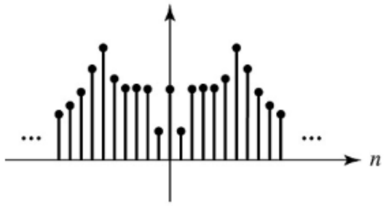
Funciones Par e Impar en TD

- Es par si ➡ g[n]=g[-n]
- Es impar si ➡ g[n]=-g[-n]
- Igual que en TC, definimos

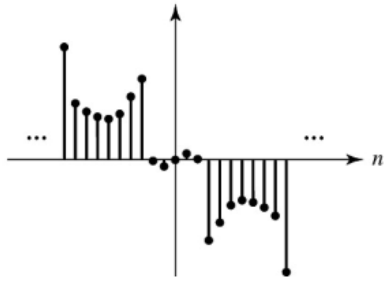
$$g_e[n] = \frac{g[n] + g[-n]}{2} \qquad g_o[n] = \frac{g[n] - g[-n]}{2}$$

Ejemplos

Par



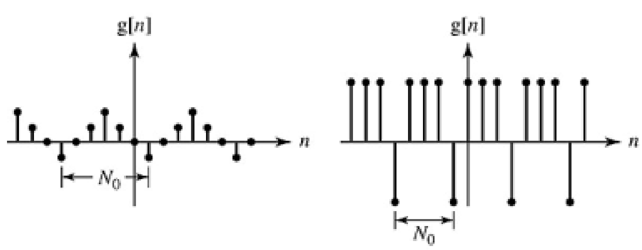
Impar



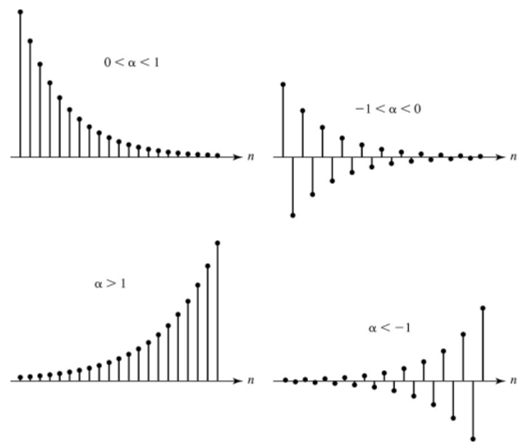
Funciones periódicas en TD

- Una función g[n] es periódica si
- g[n]=g[n+mN]
- Para cualquier valor entero de m donde N es el período de la función.
- El intervalo mínimo positivo para el cual se repite la función es el período fundamental N_o.
- La frecuencia fundamental $f_o=1/N_o$ ciclos/muestra
- La frecuencia fundamental en radianes por muestra $\omega_o=2\pi f_o$.

Funciones periódicas en TD



Exponencial real en TD



$$x[n] = C\alpha^n$$

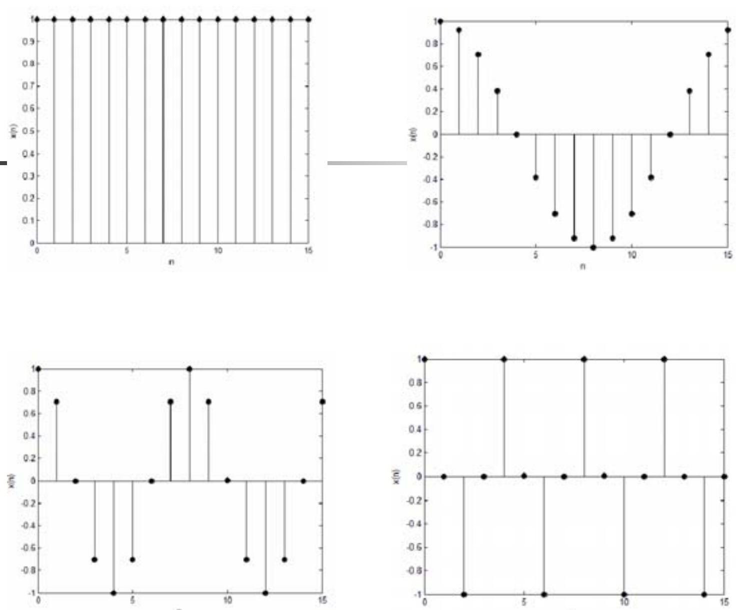
Periodicidad de exponenciales discretas(1)

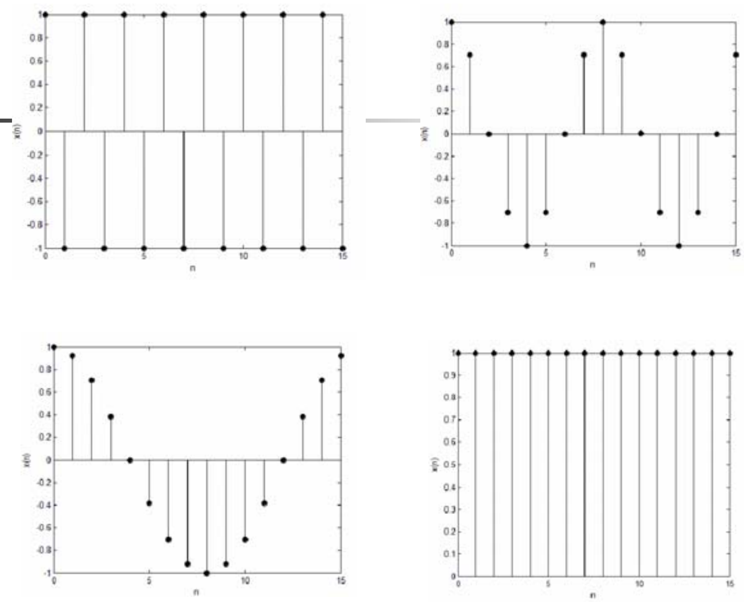
- Para tiempo continuo vimos dos propiedades de $e^{j\omega_0 t}$
- Mientras más grande la magnitud de w_0 mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
- Es periódica para cualquier valor de w_0.
- Veamos estas propiedades en TD

Periodicidad de exponenciales discretas(2)

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j2\pi n}e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

Vemos que la exponencial $w_0+2\pi$ es la misma con frecuencia w_0. Diferente al caso contínuo, donde las señales son distintas para distintas w_0. Por lo tanto al considerar exponenciales complejas, necesitamos solamente tomar el intervalo de frecuencia de longitud 2π dentro del cual se escoge w_0. Conforme w_0 se incrementa desde 0, la señal oscila más rápido hasta π. Seguimos aumentando w_0 hasta 2π y la señal oscila más lento hasta producir la misma secuencia que en w=0.





Periodicidad de exponenciales discretas(3)

- La segunda propiedad respecto de la periodicidad de la exponencial compleja discreta. Para ser periódica :

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \qquad e^{j\omega_0 N} = 1$$

- Debe haber un entero m tal que
- $w_0 N = 2\pi m \quad w_0/2\pi = m/N$

Periodicidad de exponenciales discretas(4)

- De acuerdo con lo anterior, la exponencial es periódica si $w_0/2\pi$ es un número racional y es no periódica en otras circunstancias.
- $N=m(2\pi/w_0)$

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de w_0	Señales idénticas para valores de w_0 separados 2π
Periódica para cualquier w_0	Periódica sólo si $w_0=2\pi m/N$ con m y N enteros
Frecuencia fundamental w_0	Frecuencia fundamental w_0/m
Período fundamental $2\pi/w_0$	Período fundamental $2\pi m/w_0$