

**Pasaje de partículas cargadas por la
materia.**

Efecto Cherenkov. Bremsstrahlung

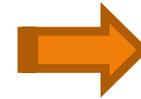
Laura C. Damonte

2017

Pasaje de partículas cargadas por la materia

Cuando una partícula cargada atraviesa materia, alguno o todos de los siguientes procesos de colisión pueden ocurrir:

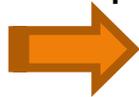
1) Colisiones elásticas con electrones atómicos



despreciable salvo a energías $<100\text{eV}$

2) Colisiones inelásticas con electrones atómicos

Constituye el modo principal de pérdida de energía para partículas cargadas



ionización en el absorbente

3) Colisiones elásticas con núcleos atómicos:

menos frecuente para partículas pesadas pero importante para e^\pm

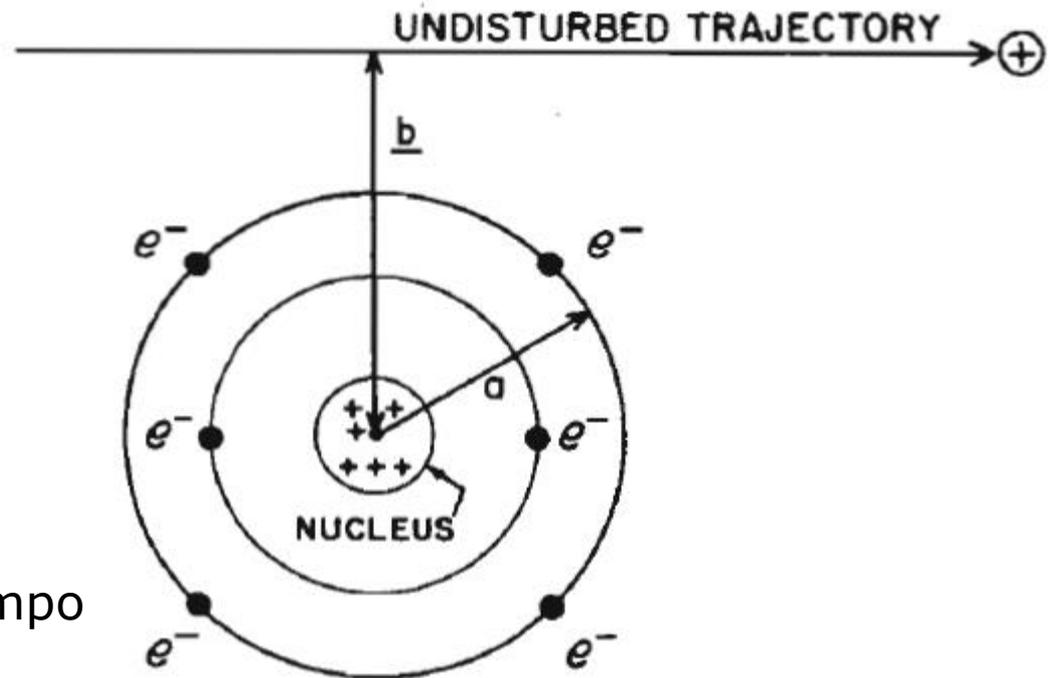
4) Colisiones inelásticas con núcleos atómicos:

menos probable que el anterior pero debe tenerse en cuenta para e^\pm

Las interacciones de la fuerza coulombiana de una partícula cargada al atravesar la materia, puede ser caracterizada simplemente por el tamaño relativo del parámetro de impacto b (parámetro clásico) al radio atómico a :

I. Colisiones suaves (soft): $b \gg a$

Son las más numerosas



II. Colisiones duras
(hard o Knock-on):

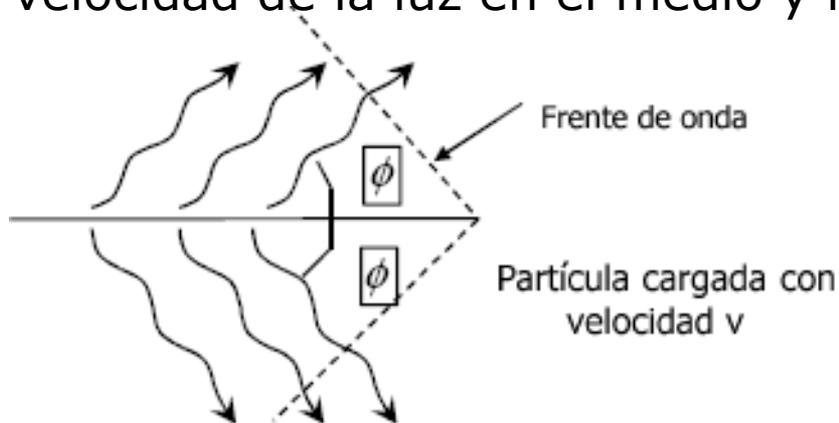
$$b \sim a$$

III. Interacciones con el campo
nuclear externo:

$$b \ll a$$

Radiación Cherenkov (Tipo I)

Cuando una partícula cargada atraviesa un medio dieléctrico a una velocidad superior a la velocidad de la luz en el medio, puede ocurrir el llamado efecto Cherenkov. Los átomos del medio emiten una onda de radiación coherente a un ángulo dado por la relación entre la velocidad de la luz en el medio y la velocidad de la partícula.



$$\cos \phi = \frac{c}{nv} = \frac{1}{n\beta}$$

El ángulo de Cherenkov varía con la velocidad desde cero hasta un valor máximo cuando $\beta = 1$. La cantidad de fotones emitidos por unidad de energía y de longitud recorrida por la partícula cargada está dada por:

$$\frac{d^2 N}{dE dx} = \frac{\alpha z^2}{\hbar c} \text{sen}^2 \phi = \frac{\alpha z^2}{r_0 m_e c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) = 370 z^2 \text{sen}^2 \phi \text{eV}^{-1} \text{cm}^{-1}$$

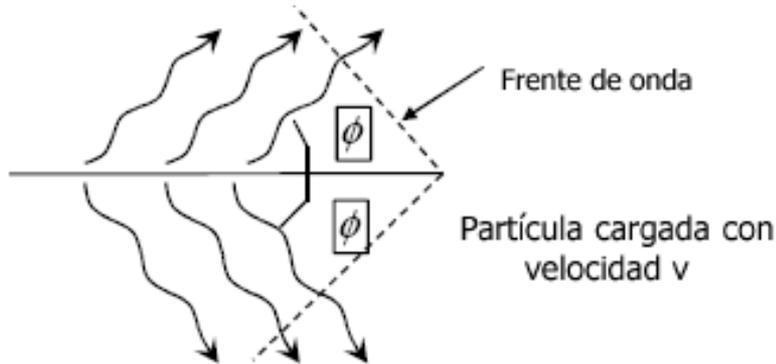
Constituye un modo subdominante de pérdida de energía $< 0.1\%$

Radiación Cherenkov

La energía umbral para producir Cherenkov se obtiene de la condición $v > c/n$.

$$\beta \geq \frac{1}{n}; E_{umbral} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-1/n^2}} = mc^2 \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$

La energía cinética umbral de la partícula en un medio material de índice n para producir efecto Cherenkov



$$T_{umbral} = mc^2 \left[\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1 \right]$$

El verdadero umbral se expresa en términos de velocidad, por tanto, en un mismo medio material, un electrón necesitará menor energía para producir radiación Cherenkov que otra partícula de mayor masa (p.e. un muón). Este hecho puede servir para distinguir entre partículas.

Radiación Cherenkov

La energía disipada por la radiación de Čerenkov, fue calculada por Tamm y Frank, como:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi e^2}{c^2} \int \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)$$

donde la integración es solo sobre aquellas frecuencias tales que $\beta n(\omega) > 1$.

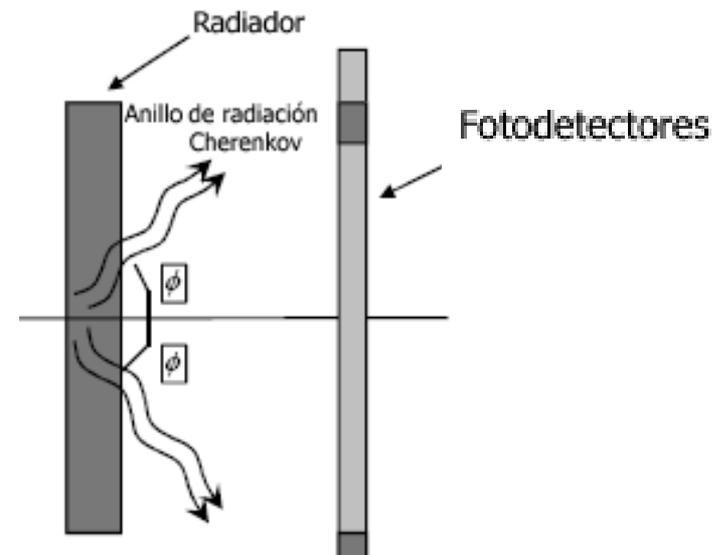
Esta pérdida de energía ya está incluida en la fórmula de Bethe-Bloch. Es importante a grandes velocidades relativistas.

Aun a estas energías su contribución es pequeña comparada con la pérdida por colisiones. De hecho, para materia condensada:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_c \approx 10^{-3} \text{ MeVcm}^2 \text{ g}^{-1} \quad \text{que es despreciable con respecto a la pérdida por colisiones}$$

Radiación Cherenkov

La emisión de la radiación se produce en un cono de luz, que se verá como un anillo. Del ángulo de semiapertura se puede calcular la velocidad de la partícula, v .



medio	n	Angulo max (grados)	Numero de fotones (eV-1 cm-1)	Energía cinética umbral (MeV) electrones
Aire	1.000283	1.36	0.208	21
Isobutano	1.00127	2.89	0.941	9.6
Agua	1.33	41.2	160.8	0.26
Cuarzo	1.46	46.7	196.4	0.19

En el rango de energías de electrones en medicina nuclear, el *efecto Cerenkov* ocurre en una fracción muy pequeña ($<1\%$).

Pero es detectable en soluciones acuosas que contengan un emisor β energético, por ejemplo ^{32}P , si se utiliza un contador centellador líquido.

Un emisor β con una energía de 1MeV viaja en agua con una velocidad $v \approx 0.8c$ mientras que la velocidad de la luz en agua (índice de refracción $n=1.33$) es $c' = c/n \approx 0.75c$.

El efecto Cerenkov puede ocurrir para electrones con energías de unos pocos cientos de keV, pero para partículas α y protones, se requieren energías de miles de MeV para llegar a las velocidades adecuadas.

Radiación Cherenkov

Para gases tales como H_2 , $-\frac{dE}{dx} \approx 0,01 \text{ MeVcm}^2 \text{ g}^{-1}$

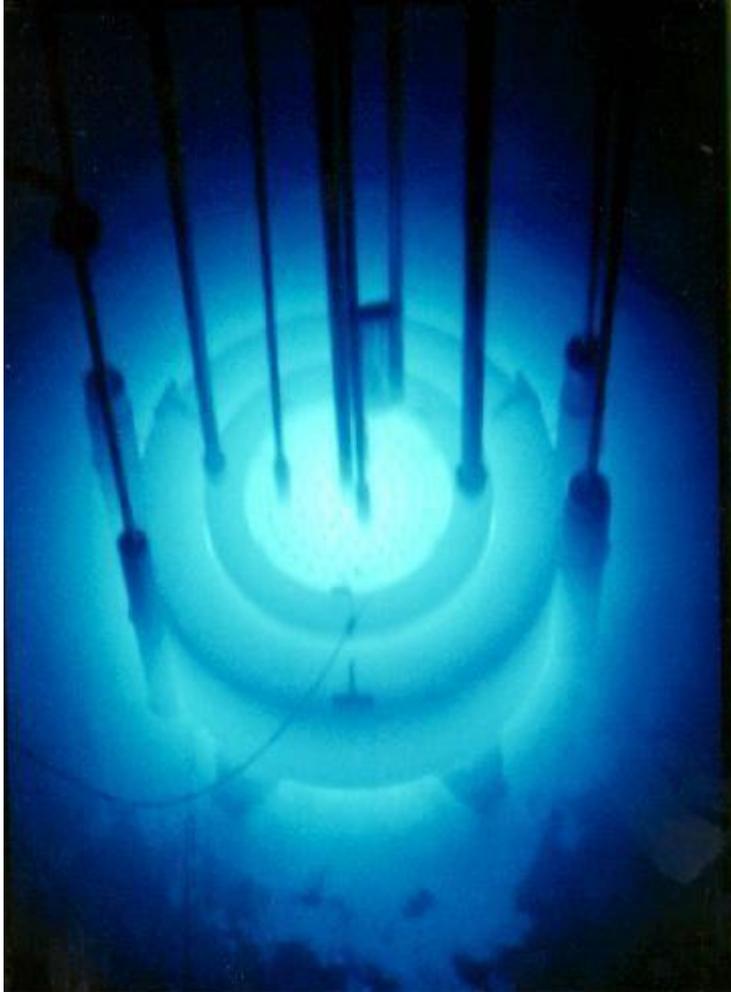
Mientras que para He y gases más pesados:

$$-\frac{dE}{dx} \approx 0,1 \text{ MeVcm}^2 \text{ g}^{-1}$$

La radiación Čerenkov, descubierta por los Curie, está caracterizada por un color azulado intenso.



Efecto Čerenkov en el agua de un reactor nuclear.



Colisiones con el campo nuclear

Bremsstrahlung (Tipo III)

Al igual que las partículas cargadas pesadas, los electrones y positrones sufren una pérdida de energía colisional cuando atraviesan la materia. Sin embargo, debido a su pequeña masa, un mecanismo adicional de pérdida de energía entra en juego: la emisión de radiación electromagnética que aparece debido a la dispersión por el campo eléctrico de un núcleo (*bremsstrahlung*).

A energías de algunos MeV, este proceso es un factor relativamente pequeño. Sin embargo, cuando la energía se incrementa hasta algunas decenas de MeV, la pérdida de energía por radiación es comparable o mayor que la pérdida de energía por colisiones. A energías mayores que esta *energía crítica*, el *bremsstrahlung* domina completamente.

La pérdida de energía total de electrones y positrones, entonces, se compone de dos partes.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{col}$$

Bremsstrahlung (Tipo III)

Clásicamente, una carga que sufre una aceleración radia energía. La radiación emitida por *bremsstrahlung* representa una disipación de energía por unidad de tiempo que se extiende sobre un rango continuo de frecuencias.

La intensidad de bremsstrahlung para una partícula de masa M y carga Ze resulta proporcional al cuadrado de su aceleración:

$$z^2 Z^2 e^6 / M^2 e$$

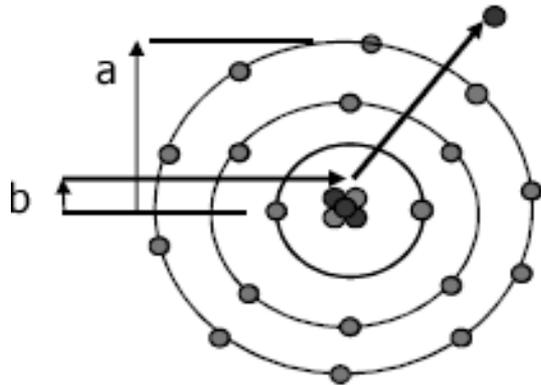
Por lo tanto, el efecto resulta mucho mayor para electrones que mesones, protones, alphas e iones pesados. El fenómeno es también más importante para elementos de alto Z .

La máxima energía que podrá irradiar será:

$$(h\nu)_{\max} = T$$

Ley de Duane y Hunt (1915).

Colisiones con el campo nuclear



Colisiones "hard" $a \gg b$

En estas colisiones el proyectil incide sobre el átomo con un parámetro de impacto tan pequeño que la interacción electromagnética tiene lugar en el campo de Coulomb que rodea al núcleo. La colisión en las energías de interés en dosimetría y radiología es elástica excepto en una pequeña fracción de sucesos (2 a 3%).

Bethe y Heitler (1934) desarrollaron un modelo no-relativista suponiendo un núcleo fijo y un proyectil de masa M (Jackson Electrodinámica Clásica)

$$\left[\frac{dE}{dx} \right]_{rad} \propto \frac{Z^2 z^4}{M^2}$$

La probabilidad de emisión depende de la inversa del cuadrado de la masa de la partícula:

$$\sigma \propto r_e^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

Así, la pérdida por radiación de muones ($m_\mu = 106 \text{ MeV}$), la próxima partícula más liviana, por ejemplo, es entonces 40000 veces menor que para un electrón!

Bremsstrahlung

La desaceleración de los electrones depende del campo eléctrico del núcleo. Si E es la energía inicial del electrón incidente y $E-W$ la energía total del fotón dispersado, en el modelo de Thomas Fermi, la variable:

$$\xi = \frac{100m_e c^2 h\nu}{E(E - h\nu)Z^{1/3}}$$

está relacionada con el grado de apantallamiento nuclear por los electrones,

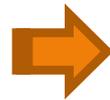
ξ está relacionado al radio del átomo.

$\xi \approx 0$, significa apantallamiento completo.

$\xi \gg 1$, implica "no apantallamiento"

El poder de frenado viene dado por:

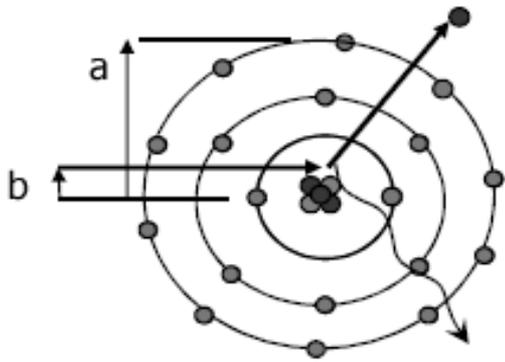
$$E \gg \frac{m_e c^2 Z^{1/3}}{\alpha}; \xi \approx 0$$



Apantallamiento completo

$$-\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{brem} = 4 \frac{N_A}{A} \alpha r_e^2 Z^2 E \left[\ln\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) + \frac{1}{18} - f(Z) \right]$$

Bremsstrahlung



A bajas energías (apantallamiento nulo)

$$E \ll \frac{m_e c^2 Z^{1/3}}{\alpha}; \xi \gg 1$$

$$-\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{brem} = 4 \frac{N_A}{A} \alpha r_e^2 Z^2 E \left[\ln\left(\frac{2E}{m_e c^2}\right) - \frac{1}{3} - f(Z) \right]$$

Aproximación de Born:

$$f(Z) = 1.202 \left(\frac{Z}{137}\right)^2; \text{ para } Z \text{ bajo}$$

$$f(Z) = 0.925 \left(\frac{Z}{137}\right)^2; \text{ para } Z \text{ alto}$$

Simplificando:

$$\left(\frac{dE}{\rho dx}\right)_{brem} \approx \frac{E}{X_0}$$

X_0 es la longitud de radiación, se define como el espesor para el cual la energía del electrón disminuye en $1/e$.

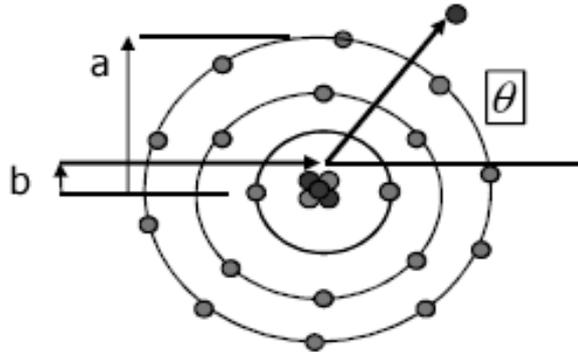
TABLE 8.6. Radiation Lengths for Selected Elements*

Element	Z	X_0 (g/cm ²)
H	1	63.04
He	2	94.39
C	6	43.35
Al	13	24.46
Cu	29	13.04
Sn	50	8.919
Pb	82	6.496
U	92	6.124

*After Selzer and Berger (1985).

Colisiones con el campo nuclear

Scattering (elástico) de Rutherford:



Para partículas cargadas pesadas:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth} = (1 - \beta^2) \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{Ze^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4(\theta/2)}$$

Para el caso de electrones, fue modificada por McFinley y Feschbach

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{McF}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ruth}} = 1 - \beta^2 \text{sen}(\theta/2) + \pi\beta \frac{Ze^2}{\hbar c} \text{sen}(\theta/2)(1 - \text{sen}(\theta/2))$$

Dependencia con E y M_0 :

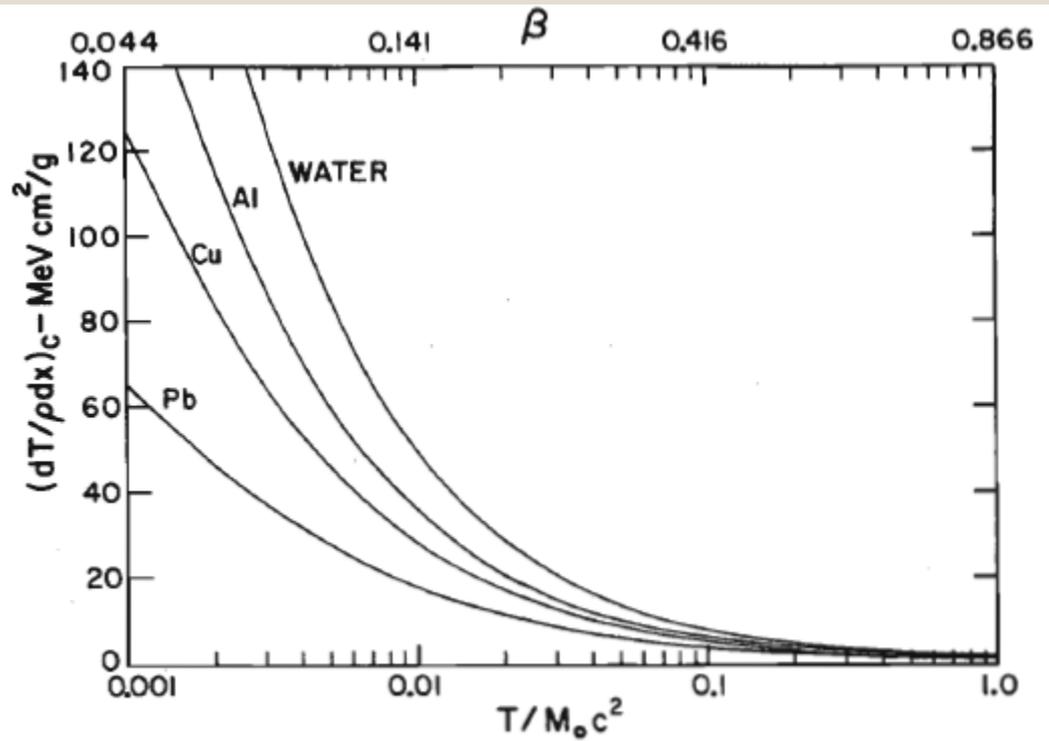


TABLE 8.1. Rest Energy and Charge of Heavy Particles

Particle	M_0c^2 (MeV)	z
Muon	105.66	1
Pion	139.60	1
Proton	938.28	1
Neutron	939.57	0
Deuteron	1875.63	1
Triton	2808.95	1
α -particle	3727.41	2

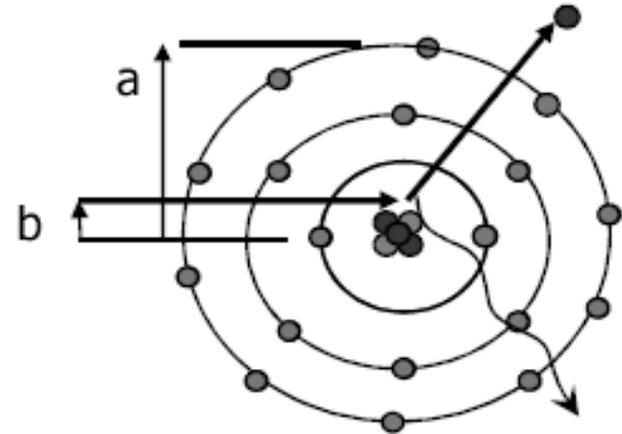
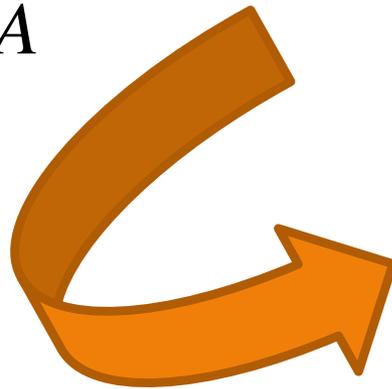
Para protones de
 $T=E=938\text{MeV}$,
 $T/M_0c^2=1$

Pérdida de energía total

Si analizamos las dependencias generales de cada uno de estos términos:

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx} \right)_{col} \propto \frac{N_A Z}{A}$$

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx} \right)_{rad} \propto \frac{N_A Z^2}{A}$$



$$\frac{\left(-\frac{dE}{\rho dx} \right)_{rad}}{\left(-\frac{dE}{\rho dx} \right)_{col}} \propto Z$$

Poder de frenado por radiación

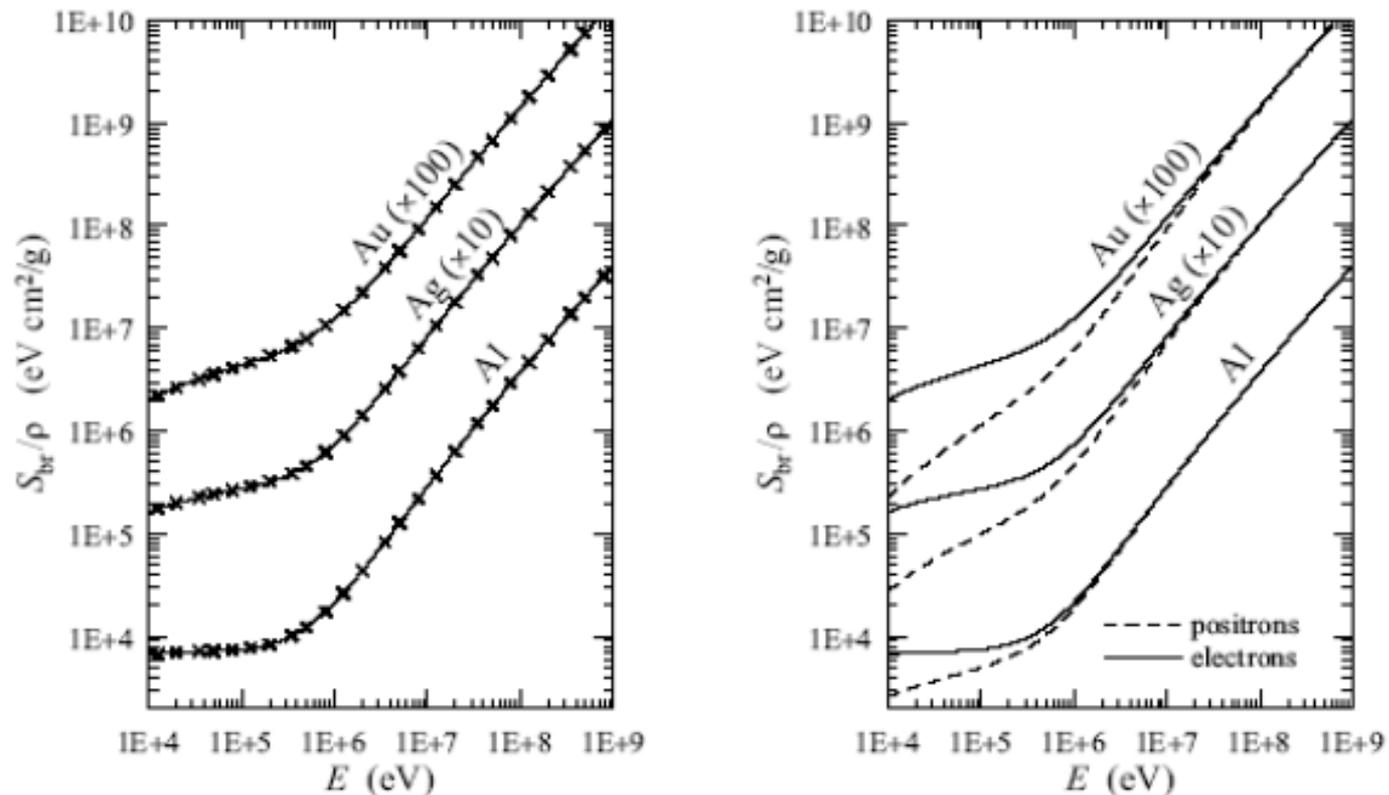
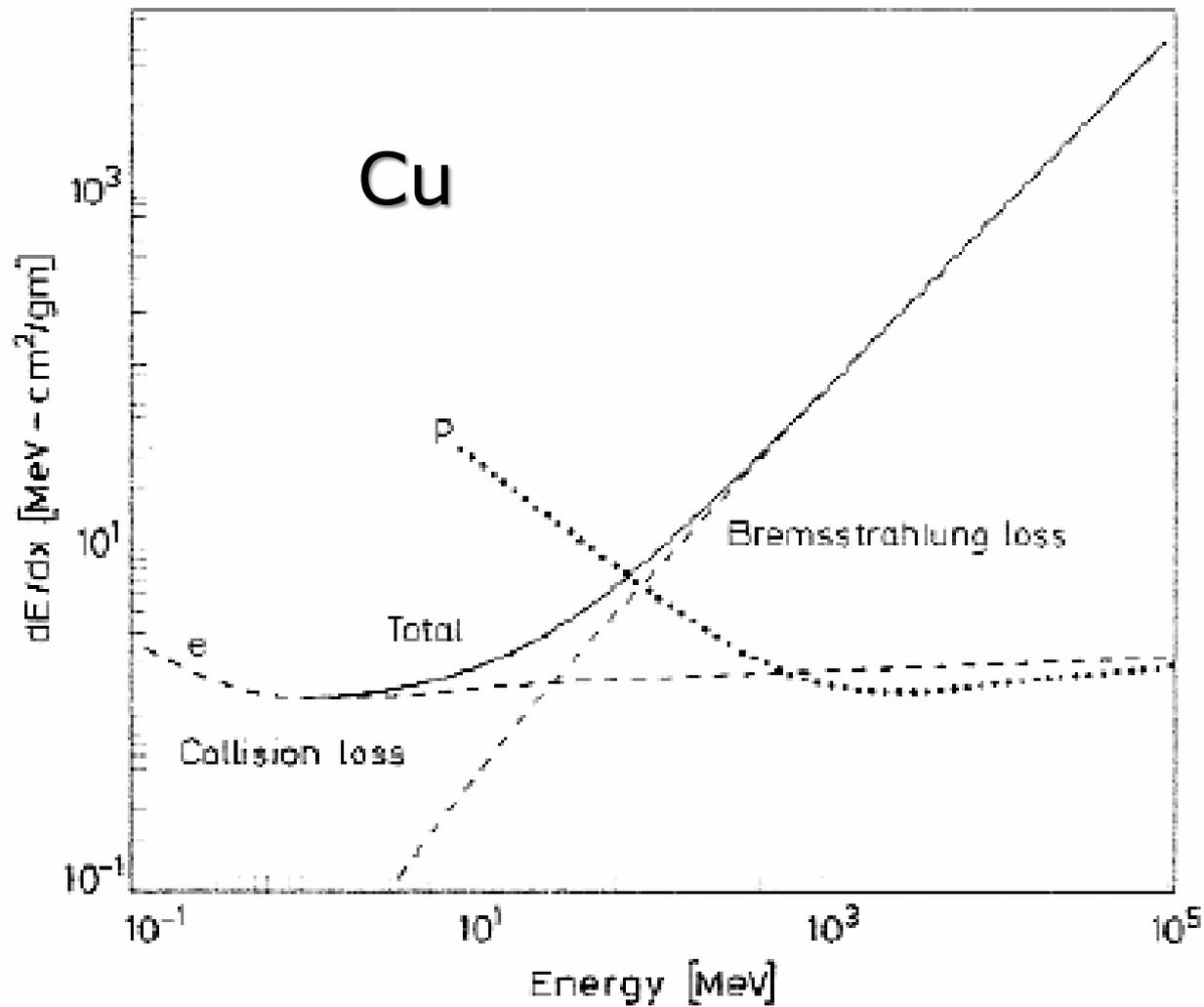


Figure 3.13: Radiative stopping power S_{br}/ρ for electrons and positrons in Al, Ag ($\times 10$) and Au ($\times 100$) as a function of the kinetic energy. Solid and dashed curves are results from the present model. Crosses are data from the ICRU37 report (1984) (also in Berger and Seltzer, 1982).

Poder de frenado por radiación



Poder de frenado para e^- y e^+

La ecuación para el poder de frenado másico de electrones y positrones se suele denominar por algunos autores como fórmula de Berger-Seltzer (H.Messel and D.F.Crawford. Pergamon Press,Oxford,1970)

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 4\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \beta^2 \gamma^2 (\gamma - 1)}{I^2} \right) - G^\pm(\beta) - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right]$$

La función G^+ corresponde a positrones y la G^- corresponde a electrones.

$$G^-(\beta) = \frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(\gamma-1)^2}{8} + 1 - (\gamma^2 + 2\gamma - 1) \ln(2) \right]$$

$$G^+(\beta) = -\frac{\beta^2}{24} \left[23 + \frac{14}{\gamma+1} + \frac{10}{(\gamma+1)^2} + \frac{4}{(\gamma+1)^3} \right] + \frac{\ln(2)}{2}$$

Podemos encontrar expresiones equivalentes en Knoll y Attix. En muchas referencias es habitual usar en lugar de β y γ la fracción de la energía cinética sobre la energía en reposo.

$$\tau = \frac{T}{m_e c^2}; \quad \tau = \gamma - 1; \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

Poder de frenado para e^- y e^+

La ecuación anterior también se puede reescribir como

$$-\frac{dE}{\rho dx} = 2\pi N_A \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{(m_e c^2)^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2I^2} \right) - H^\pm(\tau) - \delta - \frac{2C}{Z} \right]$$

$$\tau = \frac{T}{m_e c^2}$$

Siendo T la energía cinética del electrón incidente

La función H^+ corresponde a positrones y la H^- corresponde a electrones.

$$H^-(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{1}{(1 + \tau)^2} \left[\frac{\tau^2}{8} - (2\tau + 1) \ln(2) \right]$$

$$H^+(\tau) = 2 \ln(2) - \frac{\beta^2}{12} \left[23 + \frac{14}{\tau + 2} + \frac{10}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right]$$

Esta expresión y la de la diapositiva anterior son equivalentes.

Poder de frenado por colisión

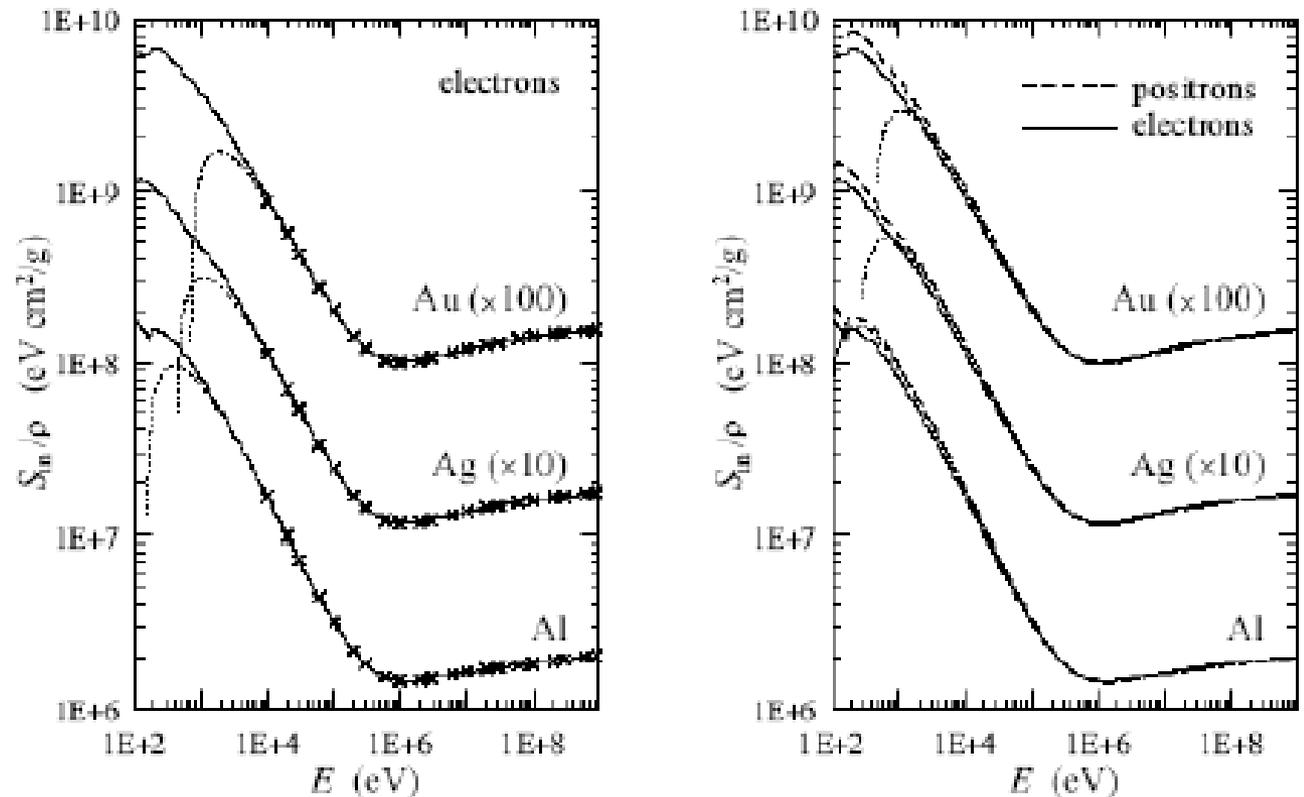
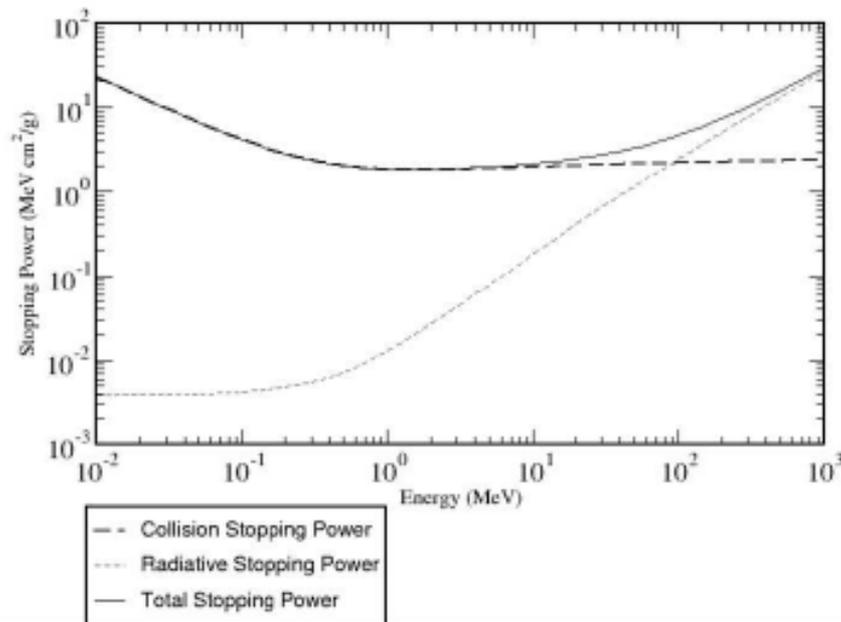


Figure 3.10: Collision stopping power S_{in}/ρ for electrons and positrons in Al, Ag ($\times 10$) and Au ($\times 100$) as a function of the kinetic energy. Continuous and dashed curves are results from the present model. Crosses are data from the ICRU37 tables (1984) [also, Berger and Seltzer, 1982]. The dotted curves are predictions from the Bethe formula (3.105), for electrons and positrons.

Poder de frenado total

El poder de frenado total de una partícula cargada en un medio material es la suma del poder de frenado por colisión (ionización+excitación) y el poder de frenado por radiación.

WATER, LIQUID



$$\left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{tot} = \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{col} + \left[\frac{dE}{\rho dx} \right]_{rad}$$

Poder de frenado total, por colisión y radiación para electrones en agua desde 0.01 MeV hasta 1000 MeV.

<http://www.physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>

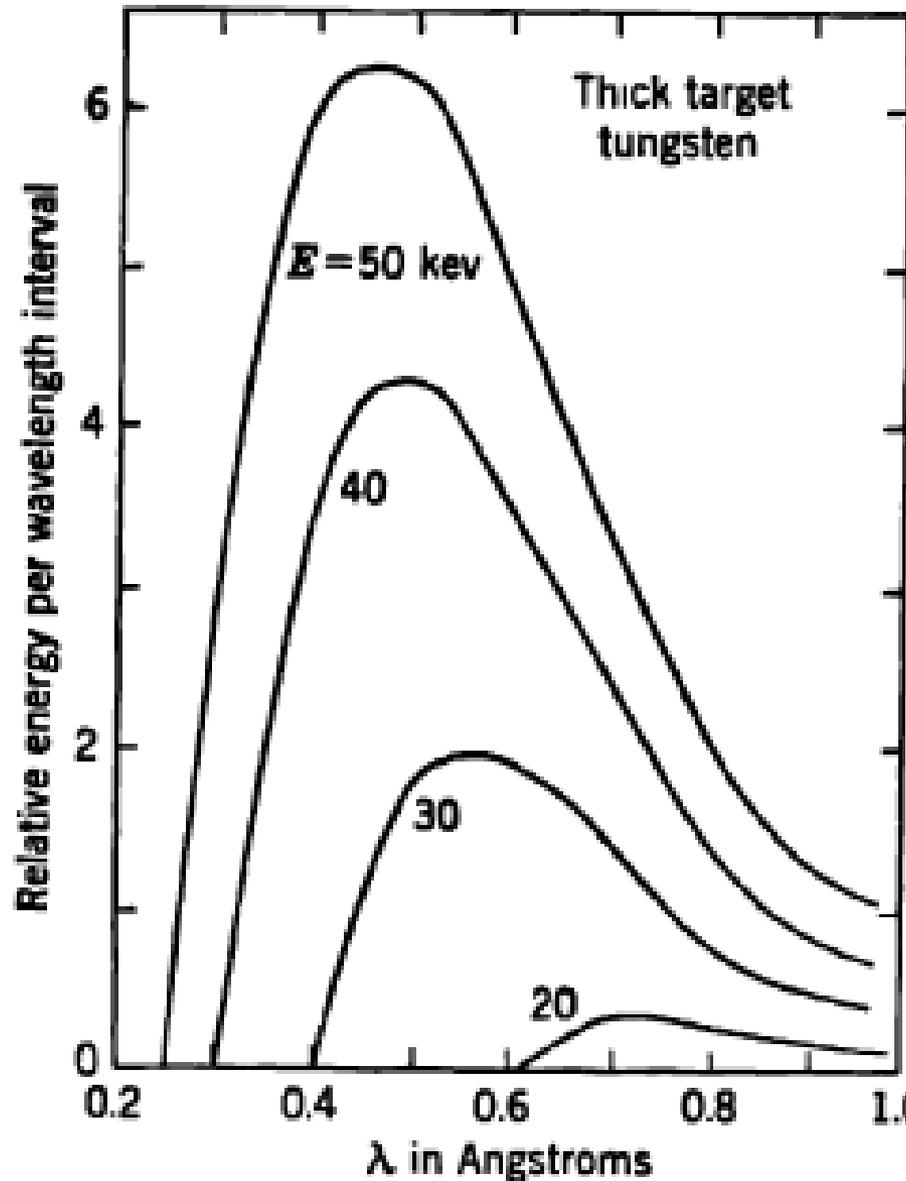


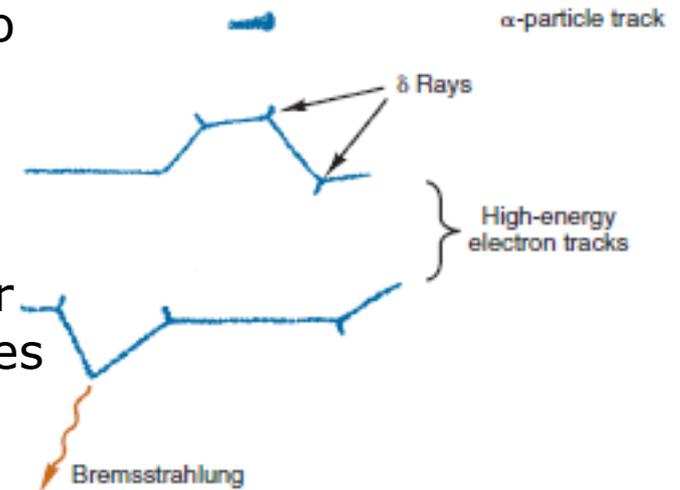
Fig. 2.2 Continuous X-ray spectra for homogeneous electrons, of kinetic energy E , incident on a thick tungsten target. The total bremsstrahlung energy (area under each curve) is empirically proportional to E^2 , for $E \ll m_0c^2$. The short wavelength limit, λ_{\min} , of each curve corresponds to $E = h\nu_{\max} = h(c/\lambda_{\min})$. [From Ulrey (U1).]

✓ La *pérdida de energía total* de partículas cargadas, entonces, se compone de dos partes.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx}\right)_{col}$$

✓ Una partícula cargada al atravesar la materia deja una estela de electrones secundarios y átomos ionizados. En tejidos o materiales de densidad similar el ancho de este camino es de $\approx 100 \mu m$.

✓ Las partículas pesadas producen relativamente bajo *bremsstrahlung* al chocar con los núcleos. Como resultado su camino es más recto y experimentan un frenado casi continuo perdiendo pequeñas cantidades de energía en un número grande de colisiones individuales.



✓ Para una dada cantidad de energía cinética, un e^- viaja a mayor velocidad que cualquier otra partícula: $T_\alpha = 4 \text{ MeV} \Rightarrow v_\alpha = 0.1c$, $T_{e^-} = 1 \text{ MeV} \Rightarrow v_e = 0.9c$.

✓ La *pérdida de energía* y las *densidades de ionización* dependen del tipo de partícula y su energía como así también de la composición y densidad del medio absorbente.

✓ En el rango de energía en medicina nuclear (≤ 10 MeV) *la pérdida de energía* se incrementa linealmente con la densidad del medio absorbente.

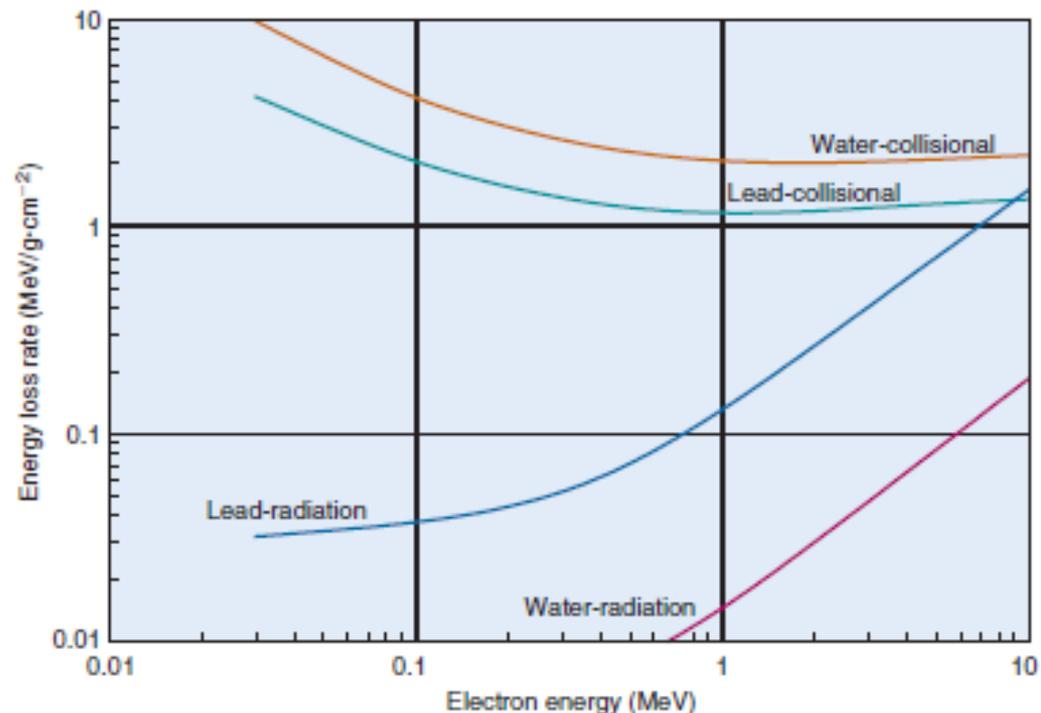


FIGURE 6-5 Collisional (ionization, excitation) and radiation (bremsstrahlung) energy losses versus electron energy in lead and in water. (Adapted from Johns HE, Cunningham JR: *The Physics of Radiology*, 3rd ed. Springfield, IL, 1971, Charles C Thomas, p 47.)

Rango-CSDA

¿Cómo calculamos en la práctica el rango de una partícula, conociendo la pérdida de energía?

$$R(T_0) = \int_0^{T_0} \left(\frac{dE}{dx} \right)^{-1} dE = \int_0^{T_0} \frac{dE}{S_{tot}} \quad \text{con} \quad S_{tot} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{tot} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{rad} + \left(\frac{dE}{dx} \right)_{col}$$

A medida que la partícula penetra en el medio, su energía va disminuyendo, habría que calcular el rango gradualmente con la disminución de energía: *continuous slowing down approximation* range.

Ejemplo en la práctica

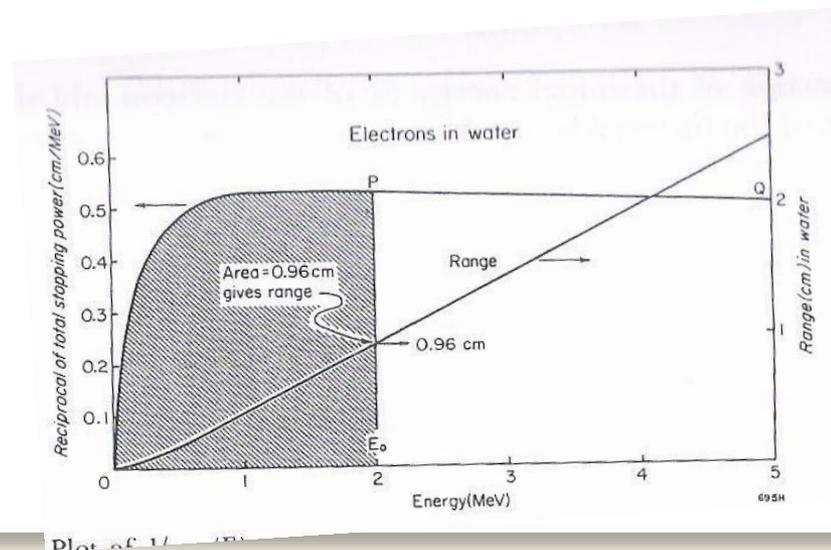


TABLE 6-3

Stopping Powers, Ranges, Radiation Yields and Average Stopping Powers for Electrons in Water

Energy E_0	S_{ion}	S_{rad} MeV cm ² /g	S_{tot}	Range R g/cm ² (eq. 6-28)	B-Fraction Energy Radiated (eq. 6-31)	\bar{S} , Average Ionizational Stopping Power (eq. 6-41)
keV						
10	22.56	.0039	22.56	.0003		39.8
20	13.17	.0040	13.18	.0009	.0001	23.4
40	7.777	.0040	7.781	.0029	.0003	13.7
80	4.757	.0041	4.762	.0098	.0005	8.19
100	4.115	.0042	4.120	.0143	.0006	6.99
200	2.793	.0048	2.798	.0447	.0010	4.47
400	2.148	.0063	2.154	.1282	.0017	3.12
800	1.886	.0104	1.897	.3294	.0029	2.42
MeV						
1	1.852	.0128	1.865	.4359	.0036	2.29
2	1.839	.0268	1.866	.9720	.0071	2.04
4	1.896	.0608	1.957	2.019	.0149	1.95
8	1.970	.1398	2.110	3.984	.0317	1.94
10	1.994	.1823	2.176	4.917	.0404	1.95
20	2.063	.4097	2.472	9.237	.0826	1.99
40	2.125	.8962	3.021	16.55	.1582	2.03
80	2.184	1.914	4.099	27.88	.2736	2.08
100	2.204	2.434	4.637	32.47	.3183	2.10

Rendimiento de Bremsstrahlung

Al atravesar una distancia Δx , la pérdida total de energía es ΔE , que tiene contribuciones de ΔE_{rad} y ΔE_{ion} :

$$\Delta E_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{rad}}(E)}{S_{\text{tot}}(E)} \Delta E$$

$$\Delta E_{\text{ion}} = \frac{S_{\text{ion}}(E)}{S_{\text{tot}}(E)} \Delta E$$

$$\text{Energía radiada} = \int_0^{T_0} \frac{S_{\text{rad}}(E)}{S_{\text{tot}}(E)} dE$$

$$B = \frac{1}{E_0} \int_0^{T_0} \frac{S_{\text{rad}}(E)}{S_{\text{tot}}(E)} dE$$

Fracción de energía radiada, llamada rendimiento de Bremsstrahlung

- ✓ La *pérdida de energía* de una partícula cargada se expresa en MeV/cm, se denomina *poder de frenado lineal* (linear stopping power), S_l .
- ✓ Un parámetro relacionado, la *transferencia de energía lineal* (linear energy transfer), LET, L es conocido como pérdida de energía que se deposita localmente a lo largo del camino de la partícula.
- ✓ L no incluye las pérdidas por radiación.
- ✓ En el rango de energías de interés en medicina nuclear tanto para e^- como para partículas α , las pérdidas por radiación S_l y L son prácticamente idénticas.
- ✓ El valor medio \bar{L} es el valor importante en física de la salud. Se mide en keV/ μm .
- ✓ Para energías 10keV-10MeV, \bar{L} estará 0.2-2 keV/ μm .

- ✓ e^- emitidos por ^3H , $E_\beta=5.6 \text{ keV}$, tienen valores mayores,
- ✓ Partículas α , $\bar{L} = 100 \text{ keV} / \mu\text{m}$
- ✓ La *ionización específica*, SI , se refiere al número total de iones producidos tanto por eventos primarios como secundarios.
- ✓ El cociente entre estos dos parámetros, W es la *energía promedio gastada por evento de ionización*:

$$W = L / SI$$

- ✓ En gases, $W=25-45 \text{ eV}$ por par iónico, en aire es $33,7 \text{ eV}$.

Zirkle et al. (1952)